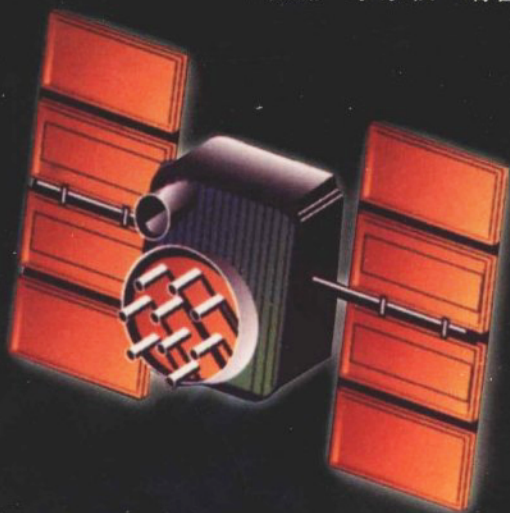


# 全球定位系统 (GPS)

## 测量原理及其数据处理基础

张勤 李家权 编著



西安地图出版社

责任编辑：刘 戎 李燕明

封面设计：翰辰设计公司

ISBN 7-80670-061-7



9 787806 700617 >

ISBN 7 - 80670 - 061 - 7 / K · 23

定价：18.50元



# 全球定位系统(GPS)测量 原理及其数据处理基础

张 勤 李家权 编著

西安地图出版社

## 内 容 提 要

本书是作者在多年从事 GPS 卫星定位测量教学和应用研究的基础上撰写而成的。书中介绍了 GPS 全球卫星定位系统的基础知识,包括卫星系统的组成、卫星的坐标和时间参考系统以及卫星的轨道,介绍了 GPS 卫星信号及其定位原理和有关的接收机。书中重点介绍了 GPS 静态和动态定位的原理,特别是利用载波相位进行静态相对定位和动态 GPS 差分定位的原理以及作业方法,讨论了卫星定位中的有关误差、GPS 测量中网的设计与实施作业。最后详细介绍了 GPS 定位中的数据处理,如 GPS 成果的坐标转换模型和方法,GPS 网平差模型和方法以及由 GPS 高程获取正常高程的数据处理方法。

本书的编写注重理论性和实用性相结合,系统性和最新发展相结合,并引入一些作者的研究和应用成果。为了便于读者理解,每章后均列有思考题。本书可作为高等院校测绘类本专科生、研究生教材,也可作为测绘专业的科技人员和从事定位与导航工作的科技人员及高等院校相关专业师生的参考书。

## 图书在版编目

全球定位系统(GPS)测量原理及其数据处理基础/  
张勤编著. —西安:西安地图出版社,2001

ISBN 7-80670-061-7/K·23

I. 全… II. 张… III. ①全球定位系统(GPS)—  
测量—理论②全球定位系统(GPS)—数据处理  
IV. P228.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 038546 号

全球定位系统(GPS)测量原理及其数据处理基础

张 勤 李家权 编著

西安地图出版社出版发行

(西安友谊东路 334 号 邮政编码 710054)

新华书店经销 长安大学雁塔印刷厂印刷

787×1092 毫米 1/16 开本 13.125 印张 319.2 千字

2001 年 8 月第 1 版 2001 年 8 月第 1 次印刷

印数:1-1000 册

ISBN 7-80670-061-7/K·23

定价:18.50 元

# 前 言

自 1957 年 10 月人类把第一颗地球人造卫星送入太空以来,空间科学即以非常迅猛的速度发展。60 年代问世的地球人造卫星导航定位技术,到 70 年代已发展为全球定位系统(GPS),向人类提供全球、全天候、高精度实时导航与定位服务。GPS 定位技术从问世之初取代常规大地测量和工程控制测量,发展到目前,它已渗入工程测量、地籍测量、交通管理、导航、地理信息系统、海洋、气象和地球科学等许多研究领域。差分 GPS(DGPS)与相位差分 GPS(RTK)技术,实现了高精度实时动态导航与定位,可以在一个瞬间获得米级或厘米级精度的测站坐标。GPS 全站仪已经向传统的全站仪发起了挑战。GPS 定位技术日益广泛应用,使它成为测绘类专业本科生和研究生的一门必修课程。

我校于 1984 年初起为本科生和专科生开设 GPS 卫星定位测量课程,以后又为研究生开设此课程,并利用 GPS 定位技术承担和完成了大量的生产以及科研任务。本书就是作者在多年从事 GPS 卫星定位测量教学和 GPS 卫星定位测量应用研究的基础上撰写而成的。全书共 6 章,内容包括:GPS 卫星定位测量基础, GPS 卫星信号及其测量原理, GPS 静态与动态定位原理, GPS 控制网的设计与外业工作, GPS 网平差与数据处理方法等。书中第 1~2 章由李家权教授编写,第 4~6 章由张勤副教授编写,第 3 章由李家权教授和张勤副教授编写,王利同志和张绍春同志参加了第 3 章的部分编写工作,李家权教授和王利同志编写了各章的思考题,王利同志还承担了本书的校对与插图制作工作,张绍春同志和高庆华同志参加了本书初稿插图制作。张勤副教授完成了全书最后的审阅工作。

本书可作为高等院校测绘类专业本科生、研究生学习 GPS 课程的教材,也可作为测绘专业的科技人员与定位和导航有关人员及高等院校有关专业师生的参考书。内容以介绍 GPS 定位测量的基础知识为主,对于最近几年表现很活跃的差分 GPS 以及 GPS RTK 技术也进行了比较系统的介绍,目的是使本书内容尽可能接近 GPS 当前的发展水平。此外还特别讨论了 GPS 网的优化设计理论,包括 GPS 网的精度、可靠性以及起算数据的兼容性等内容(其中加星号章节属选学内容),希望通过这些章节的学习,对将来从事 GPS 定位工作的人们有所帮助。

# 前 言

---

GPS 卫星定位测量是测绘学科的一门新课程,涉及数学、天文学、数字通讯技术、计算机科学以及测绘学科的许多相关知识,作者水平有限,加之本书成稿匆忙,错误在所难免,恳请国内专家学者和广大读者指正。

作 者

2001 年 5 月 16 日

# 目 录

<b>第 1 章 GPS 卫星定位测量基础</b> .....	( 1 )
1.1 GPS 定位系统概述 .....	( 1 )
1.1.1 GPS 卫星定位测量的发展概况 .....	( 1 )
1.1.2 GPS 系统的组成 .....	( 5 )
1.1.3 其他卫星导航定位系统 .....	( 8 )
1.2 GPS 定位系统的坐标系 .....	( 9 )
1.2.1 天球概述 .....	( 9 )
1.2.2 岁差和章动 .....	( 10 )
1.2.3 两种天球坐标系及其转换模型 .....	( 11 )
1.2.4 极移与国际协议地极原点 .....	( 13 )
1.2.5 两种地球坐标系及其转换模型 .....	( 14 )
1.2.6 瞬时极(真)天球坐标系到瞬时极(真)地球坐标系 的转换模型 .....	( 17 )
1.2.7 WGS-84 世界大地坐标系 .....	( 17 )
1.3 GPS 定位的时间系统 .....	( 18 )
1.3.1 世界时系统 .....	( 18 )
1.3.2 原子时(Atomic Time - AT) .....	( 20 )
1.3.3 力学时(Dynamic Time - DT) .....	( 20 )
1.3.4 协调世界时(Coordinate Universal Time - UTC) .....	( 21 )
1.3.5 GPS 时间系统(GPST) .....	( 22 )
1.4 地球人造卫星的正常轨道运动 .....	( 22 )
1.4.1 二体问题意义下卫星的运动方程 .....	( 22 )
1.4.2 开普勒定律和卫星运动的轨道参数 .....	( 23 )
1.4.3 卫星的瞬时位置计算 .....	( 29 )
1.4.4 卫星运动的瞬时速度计算 .....	( 31 )
1.5 地球人造卫星的受摄运动 .....	( 31 )
1.5.1 卫星运动的摄动力和受摄运动方程 .....	( 32 )

# 目 录

---

1.5.2	地球引力场摄动力及其对卫星轨道运动的影响	(33)
1.5.3	日、月引力摄动	(35)
1.5.4	太阳光压摄动	(36)
1.5.5	其他摄动力影响	(36)
<b>第2章</b>	<b>GPS 卫星信号及其测量原理</b>	<b>(38)</b>
2.1	GPS 卫星的测距码信号与伪距测量原理	(38)
2.1.1	码的基本概念	(38)
2.1.2	伪随机噪声码及其产生	(39)
2.1.3	GPS 卫星的测距码信号	(41)
2.1.4	码相关伪距测量原理	(42)
2.2	GPS 卫星的导航电文	(44)
2.2.1	导航电文的组成格式	(44)
2.2.2	导航电文的内容	(44)
2.3	GPS 卫星星历	(46)
2.3.1	GPS 卫星的预报星历	(47)
2.3.2	GPS 卫星的后处理星历	(47)
2.4	GPS 卫星的载波信号与相位测量原理	(47)
2.4.1	GPS 卫星的载波信号	(48)
2.4.2	GPS 卫星信号的调制	(48)
2.4.3	GPS 卫星信号的解调	(49)
2.4.4	载波相位测量原理	(51)
2.5	美国政府关于 GPS 卫星信号的限制使用政策	(52)
2.5.1	GPS 工作卫星的 SA 技术	(52)
2.5.2	GPS 用户的反限制技术措施	(53)
2.6	GPS 卫星信号接收机	(54)
2.6.1	GPS 信号接收机的基本工作原理	(54)
2.6.2	GPS 信号接收机分类	(57)



# 目 录

2.6.3	几种常见的测量型 GPS 信号接收机	(59)
<b>第 3 章</b>	<b>GPS 静态定位原理</b>	<b>(64)</b>
3.1	GPS 定位方法分类及其误差源	(64)
3.1.1	GPS 定位方法分类	(64)
3.1.2	GPS 测量误差概述	(66)
3.1.3	卫星星历误差	(67)
3.1.4	时钟误差	(68)
3.1.5	卫星信号传播误差	(69)
3.1.6	与接收设备有关的误差	(75)
3.2	静态绝对定位原理	(76)
3.2.1	伪距观测方程及其线性化	(76)
3.2.2	伪距法绝对定位解	(77)
3.2.3	卫星几何分布精度因子	(79)
3.3	静态相对定位原理	(80)
3.3.1	静态相对定位的一般概念	(81)
3.3.2	载波相位观测方程及其线性化	(82)
3.3.3	基线向量的单差模型及其解算	(84)
3.3.4	基线向量的双差和三差模型及其解算	(87)
3.3.5	相位观测量线性组合的相关性	(89)
3.4	整周末知数的确定方法与周跳分析	(91)
3.4.1	整周末知数的确定方法	(91)
3.4.2	周跳的探测与修复	(95)
3.5	GPS 快速静态相对定位	(97)
3.5.1	准动态定位法	(98)
3.5.2	快速整周末知数解算原理	(99)
3.5.3	快速整周末知数求解方法	(100)
3.5.4	快速静态定位作业方式	(101)
<b>第 4 章</b>	<b>GPS 动态定位原理</b>	<b>(103)</b>

# 目 录

---

4.1	GPS 动态绝对定位原理 .....	(103)
4.2	GPS 动态相对定位与差分 GPS .....	(105)
4.3	差分 GPS 定位原理 .....	(106)
4.3.1	位置差分原理 .....	(107)
4.3.2	伪距差分原理 .....	(107)
4.3.3	相位平滑伪距差分 .....	(109)
4.4	载波相位差分原理 .....	(111)
4.4.1	载波相位差分 GPS 定位原理 .....	(112)
4.4.2	整周未知数的动态求解 .....	(114)
4.4.3	RTK GPS 定位设备 .....	(117)
4.5	动态相对定位中的坐标转换 .....	(118)
4.5.1	三维空间直角坐标系下的坐标转换 .....	(118)
4.5.2	平面坐标转换 .....	(119)
4.6	广域差分 GPS .....	(120)
4.6.1	单站差分 GPS(SRDGPS) .....	(120)
4.6.2	局部区域差分 GPS(LADGPS) .....	(121)
4.6.3	广域差分 GPS 系统(WADGPS) .....	(121)
<b>第 5 章</b>	<b>GPS 控制网设计与外业工作 .....</b>	<b>(125)</b>
5.1	GPS 网的构网特点与网形设计一般原则 .....	(125)
5.1.1	GPS 网的构网特点 .....	(125)
5.1.2	GPS 控制网的构网方式 .....	(126)
5.1.3	GPS 控制网网形设计的一般原则 .....	(128)
5.2	GPS 控制网的优化设计 .....	(128)
5.2.1	GPS 测量的特点以及优化设计的内容 .....	(128)
5.2.2	GPS 网基准的优化设计 .....	(129)
5.2.3	GPS 网的精度设计 .....	(131)
5.2.4	GPS 网精度设计实例 .....	(132)
5.3	GPS 网的可靠性设计 .....	(133)

# 目 录

5.3.1	GPS网可靠性概念	(133)
5.3.2	传统控制网可靠性设计标准	(134)
5.3.3	GPS控制网可靠性设计标准	(136)
5.3.4	顾及可靠性标准的GPS网的设计	(139)
5.4	GPS网的应变强度设计	(141)
5.4.1	位移与应变的关系	(141)
5.4.2	GPS基线向量的应变分析	(143)
5.4.3	GPS网的应变强度设计	(144)
5.5	GPS测量的外业工作	(146)
5.5.1	选点与埋设标志	(146)
5.5.2	GPS接收机的检验	(147)
5.5.3	GPS卫星预报与观测调度计划	(148)
5.5.4	GPS外业观测工作	(149)
5.5.5	GPS相对定位作业模式	(151)
5.6	GPS基线向量解算与网平差概述	(153)
5.6.1	GPS基线向量解算	(153)
5.6.2	GPS网平差与坐标转换概述	(154)
5.7	GPS观测成果检验与技术总结	(154)
5.7.1	GPS观测成果的检验	(154)
5.7.2	GPS测量的技术总结与上交资料	(156)
<b>第6章</b>	<b>GPS定位测量数据处理</b>	<b>(158)</b>
6.1	概述	(158)
6.2	国家坐标系与地方独立坐标系	(159)
6.2.1	旋转椭球与参心坐标系	(159)
6.2.2	54北京和80西安国家坐标系	(160)
6.2.3	站心坐标系	(162)
6.2.4	地方独立坐标系	(163)
6.2.5	高斯平面直角坐标系和UTM坐标系	(163)

# 目 录

---

6.3	GPS 定位测量中的坐标转换	(165)
6.3.1	空间直角坐标系与椭球大地坐标系的关系	(166)
6.3.2	三维坐标转换模型	(168)
6.3.3	三维坐标差转换模型	(169)
6.3.4	联合平差确定转换参数	(170)
6.4	GPS 网的三维平差	(172)
6.4.1	三维无约束平差	(173)
6.4.2	GPS 网的三维约束平差	(174)
6.4.3	GPS 网的三维联合平差	(177)
6.4.4	GPS 网的三维平差中若干问题的处理	(178)
6.5	GPS 基线向量网的二维平差	(182)
6.5.1	GPS 基线向量网的二维投影变换	(182)
6.5.2	GPS 基线向量网的二维平差	(185)
6.5.3	GPS 网平差约束基准兼容性检验	(186)
6.6	GPS 高程	(192)
6.6.1	高程系统简介	(192)
6.6.2	GPS 水准	(193)
6.6.3	GPS 重力高程	(196)
6.6.4	GPS 高程精度	(197)
	参考文献	(199)

# 第 1 章

## GPS 卫星定位测量基础

GPS 是全球定位系统(Global Positioning System)的英文缩写,它是随着现代科学技术的迅速发展而建立起来的新一代精密卫星导航定位系统。GPS 卫星定位测量是研究利用 GPS 系统解决大地测量问题的一项空间技术。本章介绍 GPS 卫星定位测量的基础知识,包括:GPS 系统简介,卫星定位测量采用的坐标系统和时间系统,GPS 卫星的轨道运动和星历计算等内容。

### 1.1 GPS 定位系统概述

#### 1.1.1 GPS 卫星定位测量的发展概况

1957 年 10 月 4 日,世界上第一颗地球人造卫星发射成功,它使空间科学技术的发展迅速进入一个崭新的时代。

随着地球人造卫星不断入轨运行,利用地球人造卫星进行定位测量已成为现实。20 世纪 60 年代卫星定位测量技术问世,并逐渐发展成为利用地球人造卫星解决大地测量问题的一项空间技术。追溯卫星定位测量技术的发展过程,大致可归结为如下三个阶段,即:卫星三角测量,卫星多普勒定位测量,GPS 卫星定位测量。

##### 1.1.1.1 卫星三角测量

卫星定位测量问世之初,地球人造卫星仅作为一种空间的动态观测目标,由地面上的测站拍摄卫星的瞬时位置而测定地面点的坐标,称为卫星三角测量。设  $A$ 、 $B$  是地面上两个已知点, $C$  是待定点(图 1-1), $A$ 、 $C$  两个测站上用卫星摄影仪(记时照相机)同步拍摄卫星  $S_1$  的相片,由此得到的摄影底片,既有卫星  $S_1$  在两张相片上的同步影像  $S_1'$ 、 $S_1''$ 。

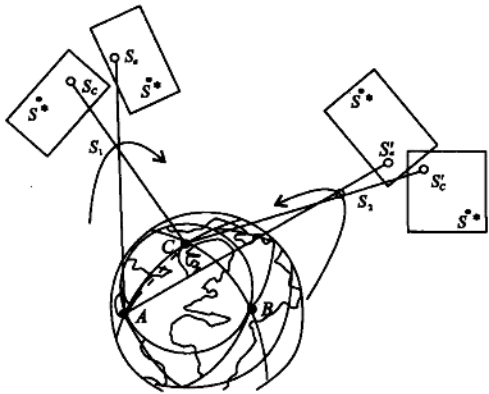


图 1-1 卫星三角测量原理

和  $S_1$ , 又有某些恒星的影像  $S^*$ 。在天文年历中可查出恒星  $S^*$  的坐标, 并以此为起算数据在相片上量算  $S_1$  和  $S_2$  的坐标, 进而推算方向  $AS_1$  和  $CS_1$ , 获得同步平面  $ACS_1$ 。用同样的方法观测另一颗卫星  $S_2$ , 可得另一同步平面  $ACS_2$ 。两平面的交线即弦  $AC$ 。

类似地, 在  $B, C$  设站, 同样观测卫星  $S_1$  和  $S_2$ , 则可得弦  $BC$ 。

弦  $AC$  与  $BC$  的交点, 即待定点  $C$ 。如果  $A, B$  两测站位于大陆, 而  $C$  点在远海岛屿上, 则用上述卫星三角测量的方法可实现大陆与海岛间的联测定位, 这是常规大地测量技术所不及的。

1966~1972 年间, 美国国家大地测量局 (NGS) 在美国和联邦德国测绘部门的协作下, 应用上述卫星三角测量的方法, 测量了具有 45 个测站的全球三角网, 并获得了 5 m 的点位精度。但是, 卫星三角测量资料处理过程复杂, 且定位精度不高, 不能获得待定点三维地心坐标, 因此, 目前已成为一种过时的测量技术。卫星三角测量是卫星定位测量历史发展的初级阶段, 随着科学技术的进一步发展, 卫星定位测量也由初级阶段进入高级阶段。

### 1.1.1.2 卫星多普勒定位测量

1958 年 12 月, 美国海军和詹斯·霍普金斯 (Johns Hopkins) 大学应用物理实验室开始联合研制美国海军导航卫星系统, 简称为 NNSS 系统 (Navy Navigation Satellite System)。1959 年 9 月发射了第一颗试验卫星。美国海军研制 NNSS 系统的目的, 是为了给北极星核潜艇提供全球性导航系统。经过几年试验研究, 该系统于 1964 年建成并投入使用。1967 年美国政府宣布, NNSS 系统解密提供民用。

NNSS 系统又称子午卫星导航系统, 由 6 颗工作卫星组成所谓子午卫星星座。卫星高度在 950~1200 km 之间, 运行周期约为 107 min, 卫星轨道近于圆形且经过地球南、北极上空, 故称子午卫星 (Transit)。子午卫星导航系统的出现, 标志着卫星大地测量技术由初级阶段进入高级阶段, 其特点是:

(1) 卫星不再作为一种单纯的空间动态观测目标, 而是通过其轨道参数介入定位计算的动态已知点。

(2) 观测不再采用传统的几何模式, 而是通过地面测站接收卫星发射的信号测定站星距离定位。

利用子午卫星射电信号测定地面点位置的技术, 称为卫星多普勒定位技术。其基本原理是基于奥地利物理学家多普勒 (Christian Doppler, 1803~1853) 于 1842 年发现的多普勒效应, 多普勒发现当波源与观测者作相对运动时, 波源发射频率与观测者接收频率之间成立关系:

$$f_r = \frac{c}{c - v \cos \alpha} f_s \quad (1-1)$$

式中:  $f_s$  为波源发射频率;  $f_r$  为测站接收频率;  $c$  为光速;  $\alpha$  为波源运动方向与测站方向间的夹角;  $v$  为波源运动速度 (图 1-2)。

由图 1-2 容易看出, 卫星即波源运动的向径速度  $\dot{\rho}$  可表示为:

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} = -v \cos \alpha \quad (1-2)$$

上式代入式 (1-1), 略加整理后可得:

$$f_r = (1 - \frac{\dot{\rho}}{c})f_s \quad (1-3)$$

记  $\Delta f = f_s - f_r$ , 称为多普勒频移, 于是有:

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} = \frac{c}{f_s} \Delta f \quad (1-4)$$

多普勒频移一经确定, 即可求出  $\dot{\rho}$ , 积分后可得卫星与测站间的距离  $\rho$ 。

如果已知卫星在地心空间直角坐标系中的瞬时位置  $\vec{r}$ , 并由卫星多普勒定位技术测得卫星距离向量  $\vec{\rho}$ , 那么测站位置向量  $\vec{R}$  就可由下式求得(图 1-3)。

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{\rho} \quad (1-5)$$

卫星多普勒定位技术具有经济、快速和不受天气、时间限制等许多优点, 在地球上任何地方只要能见到子午卫星, 便可进行原点定位和联测定位, 采集两天数据可获得分米级定位精度的测站三维地心坐标。世界许多国家都采用了卫星多普勒定位技术, 美洲大陆及其附近大约测设了 500 个多普勒点; 西欧各国测设了 30 多个多普勒点; 法国除在本土建立了多普勒网以外, 还在阿尔及利亚、利比亚、圭亚那和加蓬等国测设了 115 个多普勒点。我国也测设了近百个多普勒点, 并布设了全国性的多普勒网, 实现了大陆和西沙、南沙群岛的联测。

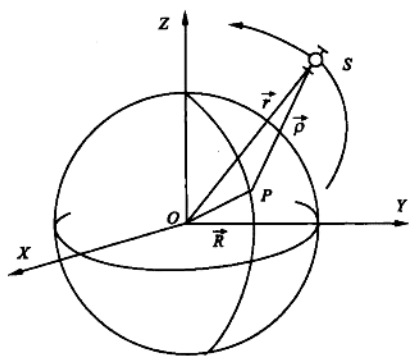


图 1-3 卫星定位测量原理

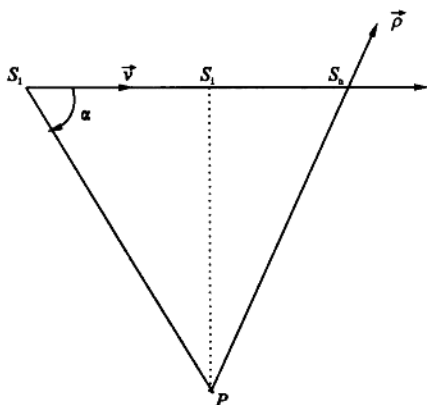


图 1-2 多普勒效应示意图

尽管卫星多普勒定位技术在导航与定位技术的发展中具有划时代的意义, 子午卫星系统被称为第一代卫星导航定位系统, 但是该系统仍有许多明显的缺点, 主要是:

(1) 卫星颗数少, 不能实现连续实时导航定位。

由于子午卫星星座仅有 6 颗工作卫星, 且运行轨道都通过地球南、北极上空(图 1-4)。因而地面测站观测到卫星的时间间隔较短(平均 1.5 h)。同一颗子午卫星, 每天通过测站上空的次数最多为 13 次, 而一台卫星多普勒接收机一般需要观测 15 次合格的通过卫星, 才能达到  $\pm 10$  m 的单点定位精度。当每测站上观测了公共的 17 次合格的通过卫星时, 联测定位精度才能达到  $\pm 0.5$  m 左右。由于卫星通过测站上空的时间间隔太短, 而所需要的观测时间又过长, 所以无法提供连续、实时的三维导航和定位服务。

(2) 卫星轨道高度低, 难以实现精密定轨。

子午卫星飞行的平均高度为 1 070 km, 属于低轨道卫星。在这种情况下, 地球引力场模型误差, 大气密度、卫星质面比、大气阻力系数等摄动因子误差, 大气阻力模型误差, 都将阻碍子



图 1-4 子午卫星运行图

午卫星定轨精度的提高。换句话说,子午卫星星历参数的精度较低,致使卫星多普勒的定位精度局限在米级水平。

(3) 信号频率低,难以补偿电离层效应的影响。

子午卫星射电信号的频率分别为 400 MHz 和 150 MHz,用这两种频率的信号进行双频多普勒定位时,只能削弱电离层效应的低阶项影响,而难以削弱电离层效应的高阶项影响。而电离层效应的高阶项影响,在地球赤道附近将导致测站高程 $\pm 1$  m 以上的偏差。

子午卫星导航定位系统的上述缺陷,使其应用受到较大的限制。为了突破子午卫星导航系统的局限性,实现全天候、全球性和高精度的实时导航与定位,美国国防部于 1973 年 12 月批准陆海空三军联合研制了一种新的军用卫星导航系

统——NAVSTAR GPS (Navigation System Timing and Ranging - Global Positioning System), 今译为导航卫星测时与测距全球定位系统,简称 GPS 卫星全球定位系统。

### 1.1.1.3 GPS 卫星定位测量

GPS 系统的研制计划分 3 个阶段实施:

(1) 原理与可行性实验阶段,自 1973 年 12 月算起,到 1978 年 2 月 22 日第一颗试验卫星发射成功为止,历时 5 年。

(2) 系统研制与实验阶段,由 1978 年 2 月 22 日算起,到 1989 年 2 月 14 日第一颗工作卫星发射成功为止,历时 11 年。

(3) 工程发展与完成阶段,由 1989 年 2 月 14 日算起,到 1995 年 4 月 27 日为止,历时 7 年。

1995 年 4 月 27 日美国国防部(DOD)宣布:“GPS 系统已具备全部运作能力”。意即在全世界任何地方、任意时刻都可以实现全天候的导航、定位和定时。GPS 计划的实现历时 23 年,耗资 130 多亿美元,前后共发射 35 颗 GPS 卫星,目前仍在轨道上正常工作的有 25 颗卫星,其中 1 颗为实验卫星,24 颗为工作卫星。

GPS 系统是第二代卫星导航定位系统,它的出现导致测绘行业一场深刻的技术革命。和子午卫星导航定位系统相比,GPS 系统具有如下一些显著的优点:

(1) 可提供全天候、全球性的导航、定位服务。

GPS 系统卫星数目多而且分布合理,地球上任何地点、任意时刻均可连续同步观测到 4 颗以上卫星。从而保证了该系统导航、定位服务的全天和全球性。

(2) 可进行高精度、高速度的实时精密导航和定位。

GPS 卫星在轨道平均高度、卫星钟稳定度以及信号频率等方面,都比子午卫星提高了 1



个数量级以上,其定位精度也相应地提高到厘米甚至毫米级,观测时间则缩短到几小时甚至几秒钟。

目前,GPS单点实时定位观测几秒钟,定位精度可达25~100 m;静态相对定位观测1~3 h,精度可达 $(1\sim 0.1)\times 10^{-6}$ ;如采用快速静态相对定位技术,观测时间可缩短到几分钟。近期发展起来的GPS差分动态定位技术(DGPS)和相位差分动态定位技术(RTK GPS),进一步缩短了观测时间,提高了定位精度,实现了厘米级实时导航和定位。

图1-5比较了各种定位方法的精度,该图说明,在5~500 km距离内,GPS定位的精度优于其他各种定位方法。

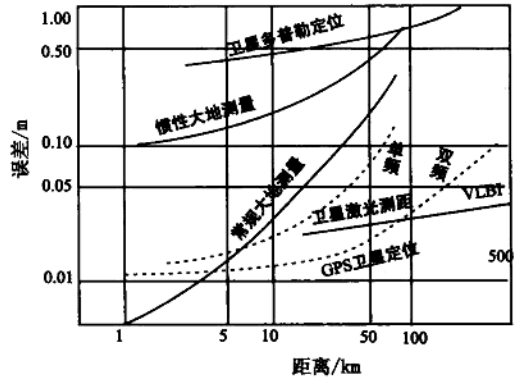
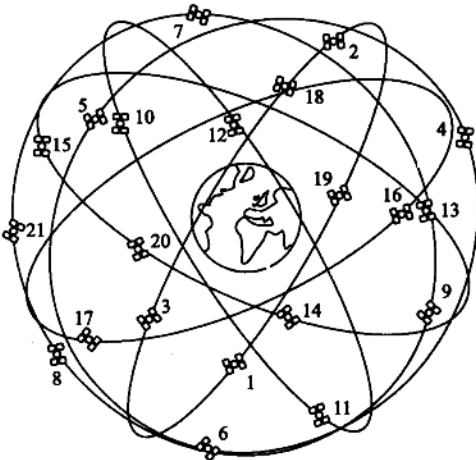
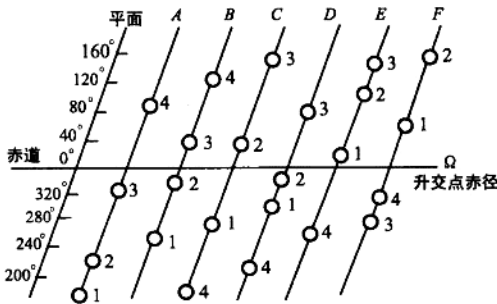


图1-5 GPS和其他各种定位方法的精度比较<sup>[1-6]</sup>



GPS工作卫星星座



GPS星座的卫星分布

图1-6 GPS工作卫星星座及卫星分布

GPS信号除了用于导航、定位以外,还可用于高精度的测速和测时。目前,GPS测速精度可达0.1 m/s,而测时精度为数十纳秒。

(3) 用途广泛,操作简便。

GPS技术的用途十分广泛,诸如海空导航、车辆引行、导弹制导、精密定位、工程测量、动态观测、设备安装、时间传递、速度测量等许多方面,都可以应用这一技术。尤其是对于大地和工程测量来讲,GPS定位技术不仅精度高、速度快,而且自动化程度很高,操作十分简便。在一个测站上,作业员仅需安置和开关仪器、量取天线高,以及监视仪器的工作状态。而捕获、跟踪卫星、记录卫星信号等一系列测量工作都由仪器自动完成。

## 1.1.2 GPS系统的组成

GPS系统由3部分组成,即空间部分、地面监控部分和用户设备部分。

### 1.1.2.1 空间部分

GPS系统的空间部分是指GPS工作卫星星座。GPS工作卫星星座由24颗卫星组成,其中21颗工作卫星,3颗备用卫星,均匀分布在6

个轨道上(图 1-6)。

卫星轨道平面相对地球赤道面的倾角为  $55^\circ$ ，各个轨道平面的升交点赤经相差  $60^\circ$ ，轨道平均高度 20 200 km，卫星运行周期为 11 小时 58 分(恒星时)，同一轨道上各卫星的升交角距为  $90^\circ$ ，GPS 卫星的上述时空配置，保证了在地球上的任何地点，在任何时刻均至少可以同时观测到 4 颗卫星，以便满足精密导航和定位的需要(图 1-7)。

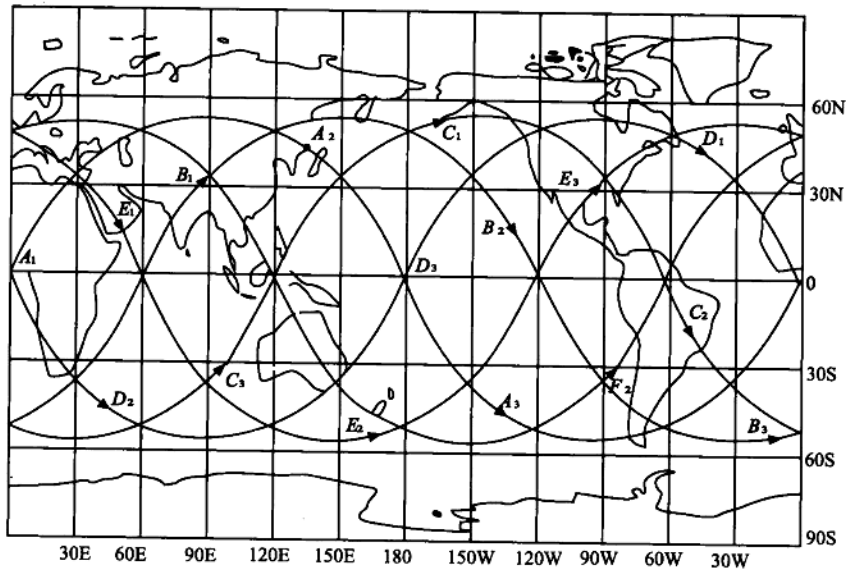


图 1-7 GPS 卫星星座的地面轨迹<sup>[56]</sup>

GPS 卫星的主体呈圆柱形，直径约为 1.5 m，重约 774 kg(其中包括 310 kg 燃料)，两侧各安装两块双叶太阳能电池板，能自动对日定向，以保证卫星正常工作的用电(图 1-8)。每颗 GPS 卫星带有 4 台高精度原子钟，其中 2 台为铷钟，2 台为铯钟。原子钟为 GPS 定位提供高精度的时间标准。

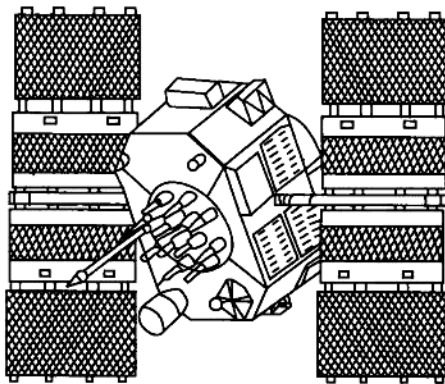


图 1-8 GPS 卫星示意图

GPS 卫星的 3 个基本功能：

- (1) 执行地面监控站的控制指令，接收和储存由地面监控站发来的导航信息。
- (2) 向 GPS 用户播送导航电文，提供导航和定位信息。
- (3) 通过高精度卫星钟(铯钟和铷钟)向用户提供精密的时间标准。

GPS 卫星上设有微处理机，可进行必要的数据处理工作。并可根据地面监控站指令，调整卫星姿态、启动备用卫星。

至今已发射的 GPS 卫星，包括 I 型卫星、II 型和 IA 型卫星、IR 型卫星。其中，I 型卫

星(Block I)共研制发射了 11 颗,用于全球定位系统的实验,通常称 I 型卫星为实验卫星。I 型和 I A 型卫星(Block I 与 Block I A)用于组成 GPS 工作卫星星座,通常称为 GPS 工作卫星。I 型和 I A 型卫星共研制了 28 颗,卫星的设计寿命为 7.5 年,自 1989 年初开始发射至 1994 年发射完成,目前在天空中运行的 GPS 卫星大部分就是这种 I 型和 I A 型卫星。美国从 1997 年开始发射 I R 型卫星,这是 I 型卫星中的第二代卫星,它有比 I 型和 I A 型卫星原子钟频率稳定度高一个数量级的新铷原子钟,可提高用户收到信号的功率,并能发送和接收其他 GPS 卫星的导航数据形成 GPS 卫星间相互定位的能力。今后 I R 型卫星将逐渐替换现有的 I 型和 I A 型卫星,并计划在 2002 年发射 I 型卫星中的第三代 I F 型卫星,那时 GPS 卫星导航和定位精度,将有较大幅度的提高。

### 1.1.2.2 地面监控部分

GPS 系统的地面监控部分目前由 5 个地面站组成,包括主控站、信息注入站和监测站,其分布见图 1-9。

主控站设在美国本土科罗拉多·斯平士(Colorado Spings)的联合空间执行中心 CSOC。主控站除协调、管理所有地面监控系统的工作外,主要有 4 个任务:

(1) 据各监测站提供的观测资料推算编制各颗卫星的星历、卫星钟差和大气层修正参数等,并把这些数据传送到注入站。

(2) 提供全球定位系统的时间基准。

各监测站和 GPS 卫星的原子钟均应与主控站的原子钟同步或测出其间的钟差,并将钟差信息编入导航电文送到注入站。

(3) 调整偏离轨道的卫星,使之沿预定的轨道运行。

(4) 启用备用卫星以取代失效的工作卫星。

注入站现有 3 个,分别设在印度洋的迭哥加西亚(Diego Garcia)、南大西洋的阿松森岛(Ascencion)和南太平洋的卡瓦加兰(Kwajalein)。注入站的主要设备包括一台直径为 3.6 m 的天线、一台 C 波段发射机和一台计算机。其主要任务是在主控站的控制下,将主控站推算和编制的卫星星历、钟差、导航电文和其他控制指令等注入到相应卫星的存储系统,并监测注入信息的正确性。

监测站的主要任务是为主控站编算导航电文提供观测数据。监测站现有 5 个,其中 4 个和主控站、注入站重叠,另外一个设在夏威夷。每个监测站均用 GPS 信号接收机,对每颗可见卫星每 6 秒钟进行一次伪距测量和积分多普勒观测,并采集气象要素等数据。

整个 GPS 的地面监控部分,除主控站外均无人值守。各站间用现代化的通讯系统联系,在原子钟和计算机的驱动和精确控制下,各项工作实现了高度的自动化和标准化。

### 1.1.2.3 用户设备部分

GPS 系统的用户设备部分由 GPS 接收机硬件和相应的数据处理软件以及微处理机及其



图 1-9 GPS 地面监控站的分布

终端设备组成。GPS 接收机硬件包括接收机主机、天线和电源,它的主要功能是接收 GPS 卫星发射的信号,以获得必要的导航和定位信息及观测量,并经简单数据处理而实现实时导航和定位。GPS 软件是指各种后处理软件包,它通常由厂家提供,其主要作用是对观测数据进行精加工,以便获得精密定位结果。

由于众多 GPS 用户的要求不同,GPS 接收机也有许多不同的类型,一般可分为导航型、测量型和授时型三类。用于测量工作的接收机,目前已有众多的生产厂家,且产品更新率很快。我国测量单位也从不同国家的厂家,引进了许多种型号不同的接收机,本书将在第 2 章中向读者介绍接收机的工作原理及其类型。

### 1.1.3 其他卫星导航定位系统

GPS 系统的广泛应用价值,引起了各国科学家的关注和研究。前苏联和西欧各国的科学家,在积极开发利用 GPS 信号资源的同时,还致力于研究各自的卫星导航定位系统。

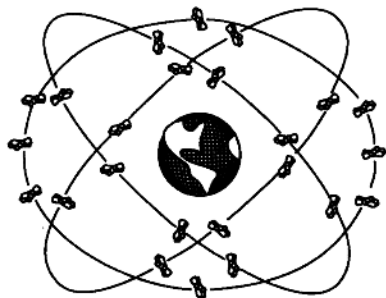


图 1-10 GLONASS 工作卫星星座

前苏联自 1982 年 10 月开始,就陆续发射第二代导航卫星,目标是建成自己的第二代卫星导航定位系统——ГЛОНАСС (GLONASS—全球卫星导航系统)。计划在 1995 年前建成 GLONASS 工作卫星星座,与 GPS 工作卫星星座一样,该系统包括 21 颗工作卫星和 3 颗备用卫星,均匀分布在 3 个轨道平面内(图 1-10)。卫星高度 19 100 km,轨道平面倾角  $64.8^\circ$ ,卫星运行

周期 11 小时 15 分(恒星时),卫星信号频率  $1.6 \times 10^3$  MHz 和  $1.2 \times 10^3$  MHz。GLONASS 系统是在认真吸取 GPS 系统的成功经验的基础上发展起来的,因此和 GPS 系统极其类似。自 1982 年至 1987 年,前苏联共发射了 27 颗 GLONASS 试验卫星,图 1-10 所表示的是截止 1993 年 2 月在轨工作的部分试验卫星。

表 1-1 NAVSAT 卫星的轨道参数<sup>[2]</sup>

参 数	卫星名称	
	HEO	GEO
卫星运行周期	12 恒星时	24 恒星时
长半轴/km	26 600	42 164
偏心率	0.713	0.423
近地点高度/km	1 250	17 961
远地点高度/km	39 105	53 632
轨道倾角/ $^\circ$	63.45	
近地点角距/ $^\circ$	90 或 270	

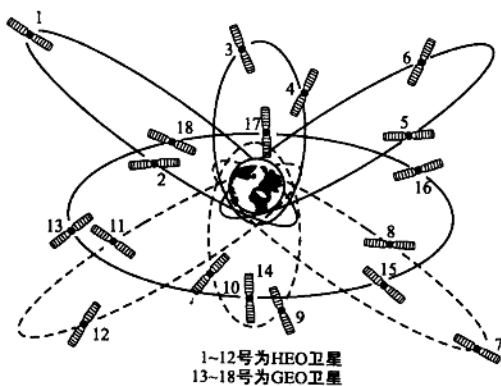


图 1-11 NAVSAT 混合卫星星座<sup>[2]</sup>

欧洲空间局(ESA)正在筹建一种民用卫星导航系统,称为 NAVSAT 导航卫星系统。包括 6 颗地球同步卫星(GEO)和 12 颗高椭圆轨道卫星(HEO),组成混合卫星星座(图1-11)。12 颗 HEO 卫星均匀分布在 6 个轨道平面内,6 颗 GEO 卫星同在一个轨道平面内。NAVSAT 卫星的其他轨道参数如表 1-1。

## 1.2 GPS 定位系统的坐标系

GPS 定位测量涉及两类坐标系,即天球坐标系和地球坐标系。天球坐标系是一种惯性坐标系。即其坐标原点和各坐标轴的指向在空间保持不动,可较方便地描述卫星的运行位置和状态。而地球坐标系则是与地球体相固联的坐标系统,用于描述地面测站的位置。本节介绍几种主要的天球和地球坐标系,以及坐标系之间转换模型。

### 1.2.1 天球概述

天球是指以地球质心为中心,以无穷大为半径的理想球体。天文学中通常把天体投影到天球的球面上,并在天球面上研究天体的位置、运动规律和天体间的相互关系。在天球上建立坐标系,必然会涉及到天球上一些有参考意义的点、线、面,现介绍摘要如下:

#### 1.2.1.1 天轴和天极

天轴是指地球自转轴的延伸直线,天轴和天球表面的交点称为天极  $P$ (图 1-12),与地球北极相应的是北天极  $P_N$ ,与地球南极相应的是南天极  $P_S$ 。天极并不真正不动,后面将要讲到天极有岁差和章动的变化。扣除了章动影响的天极称为平天极,而天极包含岁差和章动影响的瞬时位置则称为真天极。

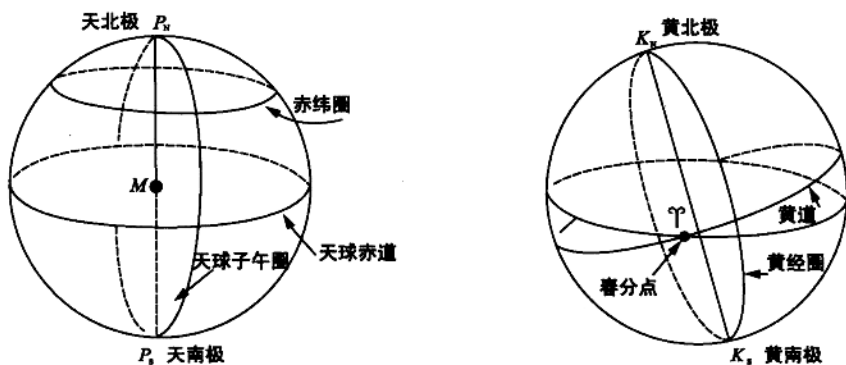


图 1-12 天球概述

#### 1.2.1.2 天球赤道面和天球赤道

天球赤道面是指通过地球质心并与天轴垂直的平面。天球赤道面和天球表面的交线称为天球赤道,显然,天球赤道是一半径为无穷大的圆周。

### 1.2.1.3 天球子午面和天球子午圈

包含天轴并通过天球面上任意一点的平面称为天球子午面,天球子午面和天球表面相交的大圆称天球子午圈。

### 1.2.1.4 时圈

通过天轴的平面和天球表面相交的半个大圆称时圈。

### 1.2.1.5 黄道

黄道是指地球绕太阳公转时的轨道平面和天球表面相交的大圆。或者说,当地球绕太阳公转时,地球上的观测者所看到的太阳在天球面上视运动轨迹称为黄道。

黄道平面和天球赤道面的夹角 $\epsilon$ 称为黄赤交角, $\epsilon$ 约等于 $23.5^\circ$ 。

### 1.2.1.6 黄极

黄极是指过天球中心且垂直于黄道平面的直线和天球表面的交点。显然,黄极也有黄北极( $K_N$ )和黄南极( $K_S$ )的区分。

### 1.2.1.7 春分点

春分点是指太阳由南半球向北半球运动时,所经过的天球黄道与天球赤道的交点。

春分点和天球赤道面是建立天球坐标系的基准点和基准面。

## 1.2.2 岁差和章动

由于地球形状接近于一个两极扁平赤道隆起的椭球体,因此在日月引力和其他天体引力的作用下,地球在绕太阳运行时,其自转轴方向并不保持恒定不变,而是绕着北黄极缓慢地旋转。地球自转轴的这种旋转运动,使地球绕太阳的状态,像一只巨大的陀螺。

地球自转轴的这种变化,意味着天极的运动,即北天极绕着北黄极作缓慢的旋转运动。天极运动由于受到引力场不均匀变化而十分复杂,天文学中把天极的运动分解为一种长周期运动——岁差,以及一种短周期运动——章动。

天极位置既然是变化的,天文学中就称天极的瞬时位置为真天极。并且与真天极相对应,把扣除章动影响后的天极称平天极。显然,平天极也是运动的,但它只有岁差而无章动的变化。相应地,天球赤道也有“真”与“平”的区分。

所谓岁差就是指平北天极的以北黄极为中心,以黄赤交角 $\epsilon$ 为半径的一种顺时针圆周运动。由于岁差,北天极在天球表面上画出一个以北黄极为中心,以黄赤交角 $\epsilon$ 为半径的圆周(图1-13)。天极的这种变化,必然导致天球赤道面的变化,而实际反映出来的是春分点位置的变化。根据近代天文学精确测量的结果,平春分点在黄道上每年西移约 $50.26''$ ,使回归年比恒星年约72年短1天。岁差作为一种天文现象,早在公元前就有记载,我国东晋成帝咸和年间的虞

喜(公元 330 年)曾测定回归年比恒星年约 50 年短 1 天。

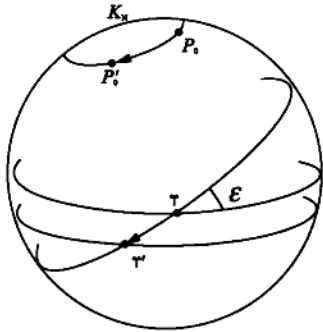


图 1-13 岁差示意图

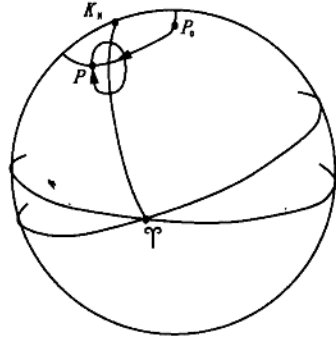


图 1-14 章动示意图

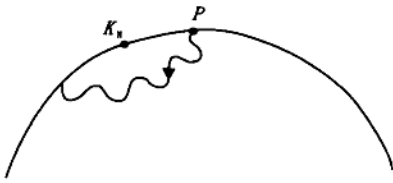


图 1-15 真北天极的运动轨迹

章动是指真北天极绕平北天极所作的顺时针椭圆运动。椭圆轨迹的长半径约  $9.2''$ ，短半径约  $6.9''$ 。章动周期为  $18.6 \text{ a}$ ，与岁差相比是一种短周期运动。图 1-14 描绘了章动的概略情况，图中  $P_0$  是平北天极， $P$  是真北天极。

综合岁差和章动的影响，真北天极绕北黄极的旋转运动，实际如图 1-15 所示。

### 1.2.3 两种天球坐标系及其转换模型

天极有“真”、“平”的区分，天球坐标系同样有“真”、“平”两种形式。

(1) 瞬时极(真)天球坐标系。

瞬时极(真)天球坐标系(图 1-16)：原点为地球质心  $M$ ； $Z$  轴指向为真(瞬时)北天极  $P_N$ ； $X$  轴指向为真春分点  $\Upsilon$ ； $Y$  轴垂直于  $XMZ$  平面，且与  $X$  轴和  $Z$  轴构成右手系。

(2) (历元)平天球坐标系。

(历元)平天球坐标系：原点为地球质心  $M$ ； $Z$  轴指向为(历元)平北天极  $P_0$ ； $X$  轴指向为(历元)平春分点  $OP_0$ ； $Y$  轴垂直于  $XMZ$  平面，且与  $X$  轴和  $Z$  轴构成右手系。

这里，“历元”是天文学术语，其意思是“起始时刻”。(历元)平北天极和(历元)平春分点，是指某个起始时刻的平北天极和相应的春分点。上述两种天球坐标系的差异，在于采用了不

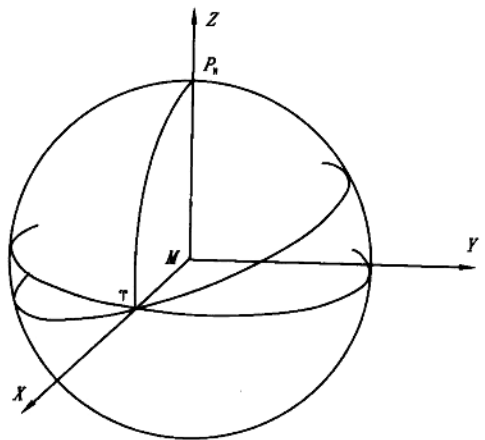


图 1-16 瞬时极(真)天球坐标系

同的北天极,因此要实现上述两种天球坐标系之间的转换,实际就是要转换北天极的位置。由(历元)平天球坐标系到真(瞬时极)天球坐标系的转换,需要做两个旋转变换,即岁差旋转和章动旋转。

### 1.2.3.1 岁差旋转

图 1-17 中,  $P_0$  是历元时刻  $t_0$  的平北天极,即(历元)平北天极,  $P_t$  是观测时刻  $t$  的平北天极,称为(观测)平北天极,而  $\gamma_0$  与  $\gamma_t$  则表示相应的春分点。由(历元)平天球坐标系变换到(观测)平天球坐标系,相当于要求两坐标系的  $Z$  轴由  $Z_0$  沿岁差小圆顺时针转动到  $Z_t$  的位置,而转动的角距恰好等于  $t_0$  到  $t$  时刻的岁差,因此称为岁差旋转。

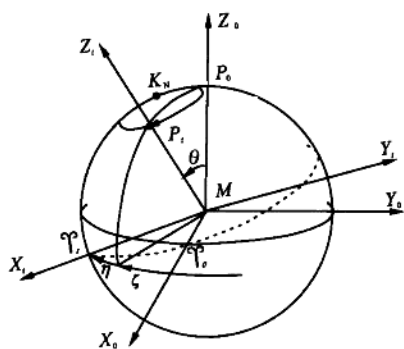


图 1-17 岁差旋转

其意义是以  $Y_0$  轴为旋转轴,逆时针转动  $\theta$  角,使坐标轴  $Z_0$  与  $Z_t$  重合,这时  $X_0$  轴也将随着转动到相应于(观测)平天极的赤道面上。最后,再作顺时针 Givens 转动:

$$R_z(-\eta) = \begin{bmatrix} \cos \eta & -\sin \eta & 0 \\ \sin \eta & \cos \eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-8)$$

使坐标轴  $X_0$  与  $X_t$  重合。由于坐标轴之间的两两正交关系,这时坐标轴  $Y_0$  也必定和坐标轴  $Y_t$  重合,这样就最终完成了岁差旋转。

岁差旋转矩阵可表示为:

$$R_{zyz}(-\eta, \theta, -\zeta) = R_z(-\eta)R_y(\theta)R_z(-\zeta) \quad (1-9)$$

而由(历元)平天球坐标系到(观测)平天球坐标系的转换模型则为:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_t = R_{zyz}(-\eta, \theta, -\zeta) \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{t_0} \quad (1-10)$$

式中:  $\zeta, \theta, \eta$  是三个旋转量,其表达式为:

岁差旋转,可由三次 Givens 转动  $R_z(-\zeta), R_y(\theta)$  与  $R_z(-\eta)$  合成。

首先作顺时针 Givens 转动:

$$R_z(-\zeta) = \begin{bmatrix} \cos \zeta & -\sin \zeta & 0 \\ \sin \zeta & \cos \zeta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-6)$$

其意义是以  $Z_0$  轴为旋转轴,顺时针转动  $\zeta$  角,使  $X_0$  轴旋转并到达通过(观测)平天极的子午面上。第二步是作逆时针 Givens 转动:

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1-7)$$



$$\begin{aligned} \zeta &= 0.640\ 616\ 1^\circ T + 0.000\ 083\ 9^\circ T^2 + 0.000\ 005\ 0^\circ T^3 \\ \theta &= 0.556\ 753\ 0^\circ T - 0.000\ 118\ 5^\circ T^2 - 0.000\ 011\ 6^\circ T^3 \\ \eta &= 0.640\ 616\ 1^\circ T + 0.000\ 304\ 1^\circ T^2 + 0.000\ 051^\circ T^3 \end{aligned} \quad (1-11)$$

式中:  $T$  为起始历元  $t_0$  至观测历元  $t$  的儒略世纪数。儒略历是公元罗马皇帝儒略·凯撒所实行的一种历法, 一个儒略世记含 36 525 个儒略日。儒略日是由公元前 4 713 年儒略历 1 月 1 日格林尼治平正午起算的连续天数。

### 1.2.3.2 章动旋转

如果要使(观测)平天球坐标系转换为瞬时极(真)天球坐标系, 尚需作章动旋转。即通过旋转变换, 使  $Z$  轴由指向(观测)平天极  $P_0$  改为指向瞬时(真)天极  $P_1$  (图 1-18)。实现这一目标, 同样要经过三次旋转变换, 与其相应的旋转矩阵为:

$$R_X(\epsilon) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \epsilon & \sin \epsilon \\ 0 & -\sin \epsilon & \cos \epsilon \end{bmatrix} \quad (1-12)$$

$$R_Z(-\Delta\psi) = \begin{bmatrix} \cos \Delta\psi & -\sin \Delta\psi & 0 \\ \sin \Delta\psi & \cos \Delta\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-13)$$

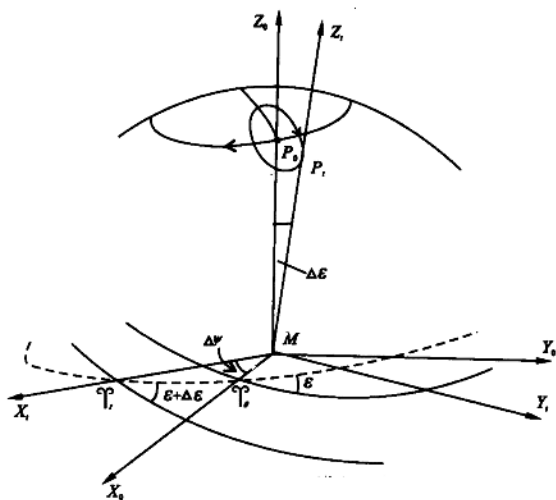


图 1-18 章动旋转

以及

$$R_X(-\epsilon - \Delta\epsilon) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\epsilon + \Delta\epsilon) & -\sin(\epsilon + \Delta\epsilon) \\ 0 & \sin(\epsilon + \Delta\epsilon) & \cos(\epsilon + \Delta\epsilon) \end{bmatrix} \quad (1-14)$$

由此, 章动旋转矩阵为:

$$R_{XZZ}(-\epsilon - \Delta\epsilon, -\Delta\psi, \epsilon) = R_X(-\epsilon - \Delta\epsilon)R_Z(-\Delta\psi)R_X(\epsilon) \quad (1-15)$$

而由(观测)平天球坐标系到真(瞬时极)天球坐标系的转换模型为:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{t(\text{真})} = R_{XZZ}(-\epsilon - \Delta\epsilon, -\Delta\psi, \epsilon) \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{t(\text{平})} \quad (1-16)$$

式中: 旋转变量  $\epsilon$  为黄赤平交角, 其表达式为:

$$\epsilon = 23^\circ 26' 21.448'' - 46.815''T - 0.000\ 59''T^2 + 0.001\ 813''T^3 \quad (1-17)$$

$\Delta\epsilon$  是章动交角,  $\Delta\psi$  是黄经章动, 它们的表达式为多达 106 项的级数展开式。在实用上可根据  $T$  值在天文年历中查取。

由于(历元)平天球坐标系的  $Z$  轴固定, 用它研究卫星运动轨道比较方便。因此, 在工作中

首先采用(历元)平天球坐标系研究卫星运动,然后再将研究结果通过岁差旋转和章动旋转变换到瞬时极(真)天球坐标系。

### 1.2.4 极移与国际协议地极原点

地球自转轴不仅由于受到日、月引力作用而在空间变化,而且还受到地球内部质量不均匀影响而在地球体内部运动。前者导致产生岁差和章动,后者导致地极在地球表面上的位置随时间而变化,这种现象称为地极移动,简称极移。

根据长期的观测和研究,得知极移的轨迹为一不规则的圆形螺旋线(图 1-19)。极移主要包含两种周期性变化,一种是周期约为 1 年,振幅约为  $0.1''$  的变化;另一种是周期约为 432 天,振幅约为  $0.2''$  的变化(张德勒周期变化)。

极移使地球坐标系的坐标轴指向产生变化,由此给实际定位工作带来困难。为此,国际天文联合会(IAU)和国际大地测量学协会(IAG),于 1967 年建议,采用国际上 5 个纬度服务站(见表 1-2),在 1900~1905

表 1-2 国际纬度站分布<sup>[1]</sup>

站 址	纬度 $\varphi$	经度 $\lambda$
卡洛福特(Carloforte) /意大利	$39^{\circ}08'09''$	$8^{\circ}18'44''$
盖瑟斯堡(Gaithersburg) /美国	$39^{\circ}08'13''$	$-77^{\circ}11'57''$
基塔布(Kitab)前苏联	$39^{\circ}08'02''$	$66^{\circ}52'51''$
水泽(Mizusawa)/日本	$39^{\circ}08'04''$	$141^{\circ}07'51''$
尤凯亚(Ukiah)/美国	$39^{\circ}08'12''$	$-123^{\circ}12'35''$

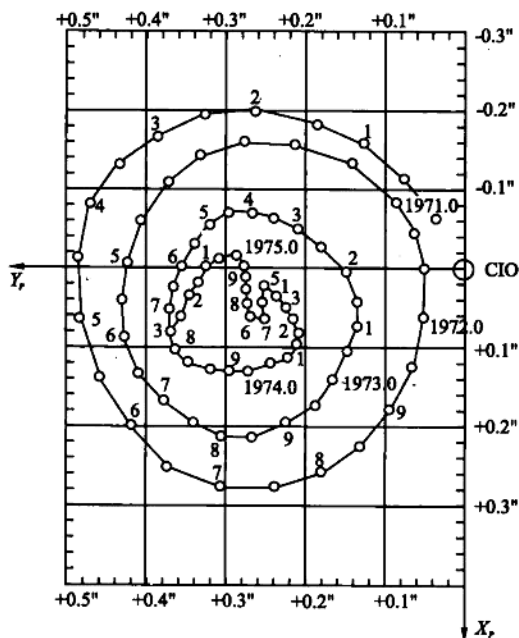


图 1-19 极移轨迹

年间测定的平均纬度所确定的平均地极位置为国际协议地极原点(Conventional International Origin—CIO),简称平极,与 CIO 原点相应的赤道面,称协议赤道面或平赤道面。图 1-19 所描绘的是由 1971 年至 1975 年间地极相对于 CIO 原点的运动轨迹。

### 1.2.5 两种地球坐标系及其转换模型

地球坐标系同样也有“平”、“真”两种形式。

#### 1.2.5.1 协议(平)地球坐标系

协议(平)地球坐标系的地极位置采用国际协议地极原点 CIO,它又有如下两种形式。

(1) 地心空间直角坐标系(图 1-20):原点——地球质心  $M$ ;  $Z$  轴指向国际协议地极原点  $CIO$ ;  $X$  轴指向由国际时局(BIH)定义的格林尼治起始子午面与地球平赤道的交点;  $Y$  轴垂直于  $XMZ$  平面, 且与  $X$  轴和  $Z$  轴构成右手系。

(2) 地心大地坐标系(图 1-21):地球椭球中心和地球质心重合, 椭球短轴与地球自转轴重合。大地纬度  $B$  为过地面点的椭球面法线与椭球赤道面的夹角; 大地经度  $L$  为过地面点的椭球子午面与格林尼治平大地子午面之间的夹角; 大地高  $H$  为地面点沿椭球面法线到椭球面的距离。

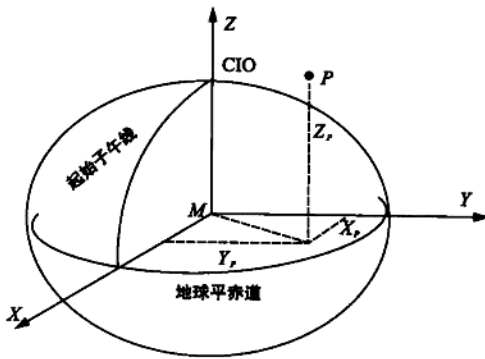


图 1-20 地心空间直角坐标系

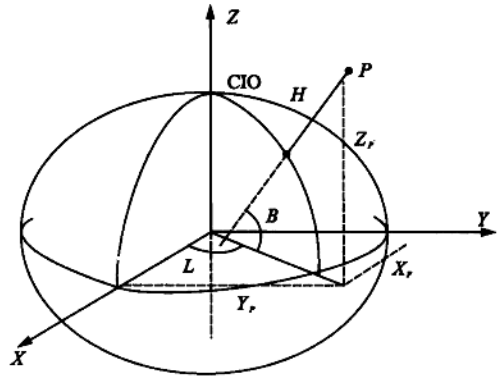


图 1-21 地心大地坐标系

所以,地面任意一点  $P$  的位置,在地球坐标系中可表示为地心空间直角坐标  $(X, Y, Z)$  或地心大地坐标  $(B, L, H)$ 。这两种坐标系的换算关系为:

$$\left. \begin{aligned} X &= (N + H)\cos B \cos L \\ Y &= (N + H)\cos B \sin L \\ Z &= [N(1 - e^2) + H]\sin B \end{aligned} \right\} \quad (1-18)$$

式中:  $N$  为椭球的卯酉圆曲率半径,  $e$  为椭球的第一偏心率, 它们的表达式为:

$$N = a / (1 - e^2 \sin^2 B)^{1/2} \quad (1-19)$$

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad (1-20)$$

式中:  $a$  为椭球长半径;  $b$  为椭球短半径。

当需要由空间直角坐标换算大地坐标时,可采用下式计算:

$$\left. \begin{aligned} B &= \arctg \left[ \frac{1}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \left( Z + \frac{ce^2 \operatorname{tg} B}{\sqrt{1 + e'^2 + \operatorname{tg}^2 B}} \right) \right] \\ L &= \arcsin \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \\ H &= \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\cos B} - N \end{aligned} \right\} \quad (1-21)$$

式中:  $c = a^2/b$  为椭球扁率,  $e'^2 = (a^2 - b^2)/b^2$  为椭球第二偏心率。

式(1-21)需迭代计算,但其收敛速度很快,迭代 4 次,大地高  $H$  的精度可达 1 mm, 大地纬度  $B$  的精度可达  $0.000\ 01''$ 。

协议(平)地球坐标系由于采用了固定地极,因此又称为地固坐标系。

### 1.2.5.2 真(瞬时极)地球坐标系

原点为地球质心  $M$ ;  $Z$  轴为指向地球的瞬时极,即与地球的瞬时自转轴一致;  $X$  轴为指向平格林尼治起始子午面与地球瞬时(真)赤道的交点;  $Y$  轴垂直于  $XMZ$  平面,且与  $X$  轴和  $Z$  轴构成右手系。

前面讨论过,地球瞬时(真)极相对国际协议地极原点  $CIO$  移动的现象,称为极移。为了定量地描述极移,可构造一平面直角坐标系,该坐标系取  $CIO$  为原点,  $X$  轴的指向为平格林尼治起始子午线方向,  $Y$  轴指向平格林尼治起始子午面以西  $90^\circ$  方向。因此,任一历元瞬间,地球瞬时(真)极相对国际协议地极原点  $CIO$  的位置,可通过一对坐标,即极移分量  $(x_p, y_p)$  表示(图 1-22)。

极移分量  $(x_p, y_p)$  均以角秒表示,可在上海天文台发布的《地球自转参数公报》中查取,也可在国际时局(BIH)出版的“B”“D”简报中找到。

图 1-23 说明,由瞬时极(真)地球坐标系到协议(平)地球坐标系的变换,可通过顺时针转动极移分量  $y_p$  与  $x_p$  实现。所以,由瞬时极(真)地球坐标系到协议(平)地球坐标系的转换模型

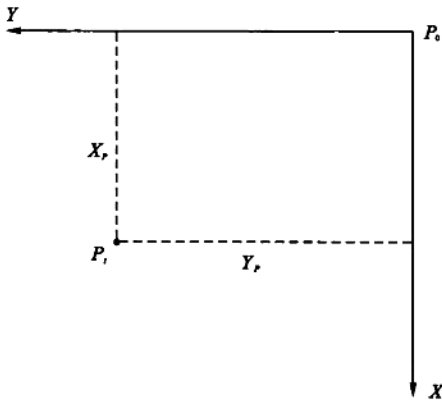


图 1-22 极移分量

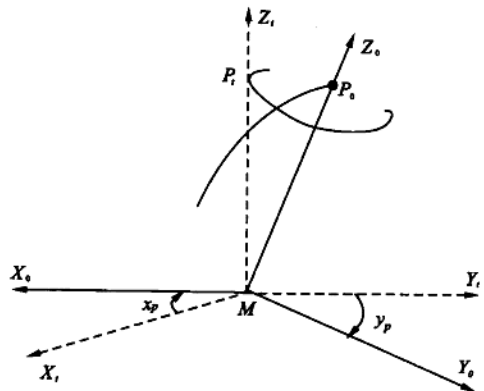


图 1-23 极移旋转

可表示为:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{(平)} = R_y(-x_p)R_x(-y_p) \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{(真)} \quad (1-22)$$

式中:  $R_y(-x_p)$  与  $R_x(-y_p)$  为顺时针 Givens 转动矩阵,它们的表达式分别为:

$$R_x(-y_p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos y_p & \sin y_p \\ 0 & \sin y_p & \cos y_p \end{bmatrix} \quad (1-23)$$

以及

$$R_y(-x_p) = \begin{bmatrix} \cos x_p & 0 & -\sin x_p \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin x_p & 0 & \cos x_p \end{bmatrix} \quad (1-24)$$

如果考虑到极移分量很小,且当  $\alpha$  很小时,  $\sin \alpha \approx \alpha, \cos \alpha \approx 1$ , 则转换模型(1-22)可写成:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{(平)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_p \\ 0 & 1 & -y_p \\ x_p & y_p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{(真)} \quad (1-25)$$

### 1.2.6 瞬时极(真)天球坐标系到瞬时极(真)地球坐标系的转换模型

根据定义,真天球坐标系和真地球坐标系的原点都是地心  $M$ , 且其  $Z$  轴都与地球真自转轴重合。它们之间的差异,仅在于  $X$  轴的指向不同。

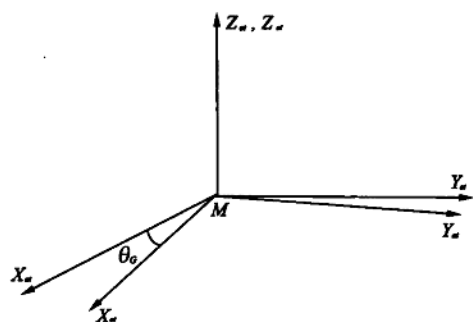


图 1-24 瞬时极(真)天球坐标系到瞬时极(真)地球坐标系的转换

真天球坐标系的  $X$  轴指向真春分点,而真地球坐标系的  $X$  轴指向平格林尼治起始子午面和地球真赤道的交点,两者之间的夹角  $\theta_G$ ,称为对应于平格林尼治起始子午面的真春分点时角(图 1-24)。

因此,由真天球坐标系到真地球坐标系的变换,仅需绕  $Z$  轴逆时针转动  $\theta_G$  角,其相应的转换模型为:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{(地)} = R_z(\theta_G) \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{(天)} \quad (1-26)$$

式中:  $R_z(\theta_G)$  为以  $Z$  轴为旋转轴的逆时针 Givens 转动矩阵,显然有:

$$R_z(\theta_G) = \begin{bmatrix} \cos \theta_G & \sin \theta_G & 0 \\ -\sin \theta_G & \cos \theta_G & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-27)$$

且由天文学知

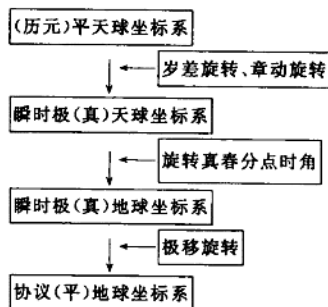
$$\theta_G = \theta_0 + \frac{d\theta_0}{dt}U_t + \Delta\psi \cos \epsilon \quad (1-28)$$

这里,  $\theta_0$  为世界时 0 点的格林尼治平恒星时;  $\Delta\psi$  为黄经章动;  $\epsilon$  为黄赤平交角。

$$\theta_0 = 6^h 41^m 50^s.5481 + 8640184^s.812866T + 0^s.093104T^2 - 6^s.2 \times 10^{-6}T^3 \quad (1-29)$$

式中:  $T$  为自公元 2000 年起算的世界时儒略世纪数。

在 GPS 卫星定位测量中,通常在(历元)平天球坐标系中研究地球人造卫星的轨道运动,而在协议地球坐标系中研究地面点(测站)的坐标,这样就产生了由(历元)平天球坐标系到协议(平)地球坐标系的变换问题。这一变换过程可综合描述如框图。



### 1.2.7 WGS-84 世界大地坐标系

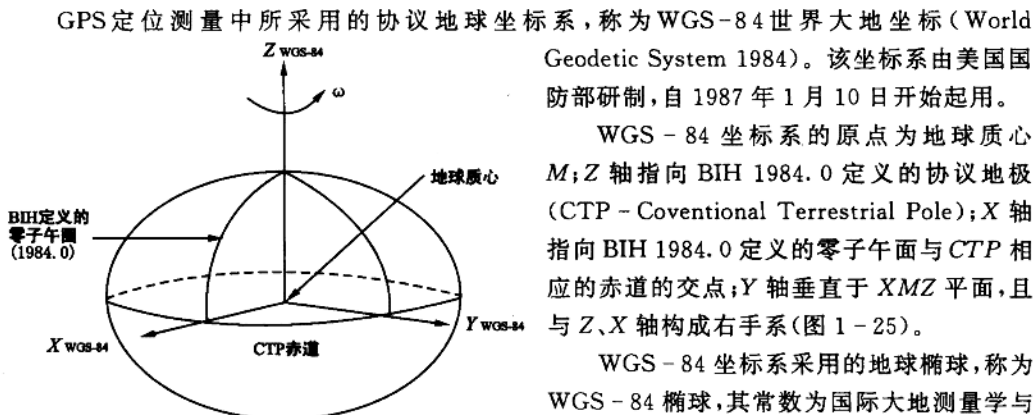


图 1-25 WGS-84 坐标系

GPS定位测量中所采用的协议地球坐标系,称为WGS-84世界大地坐标(World Geodetic System 1984)。该坐标系由美国国防部研制,自1987年1月10日开始起用。

WGS-84坐标系的原点为地球质心M;Z轴指向BIH 1984.0定义的协议地极(CTP-Coventional Terrestrial Pole);X轴指向BIH 1984.0定义的零子午面与CTP相应的赤道的交点;Y轴垂直于XMZ平面,且与Z、X轴构成右手系(图1-25)。

WGS-84坐标系采用的地球椭球,称为WGS-84椭球,其常数为国际大地测量学与地球物理学联合会(IUGG)第17届大会的推荐值,4个主要参数如下:

- (1) 长半径  $a=6\,378\,137\pm 2\text{ m}$ 。
- (2) 地球(含大气层)引力常数  $GM=(39\,686\,005\times 10^8\pm 0.6\times 10^8)\text{m}^3/\text{s}^2$ 。
- (3) 正常二阶带谐系数  $C_{2,0}=-484.166\,85\times 10^{-6}\pm 0.6\times 10^{-6}$ 。
- (4) 地球自转角速度  $\omega=(7\,292\,115\times 10^{-11}\pm 0.150\,0\times 10^{-11})\text{rad}/\text{s}$ 。

利用上述4个基本参数,可算出WGS-84椭球的扁率为: $f=1/298.257\,223\,563$ 。

第6章中我们将对WGS-84坐标系作进一步讨论,并介绍由WGS-84坐标系到其他参心坐标系的变换模型。

## 1.3 GPS 定位的时间系统

GPS卫星作为一个高空动态已知点,其位置是随时间不断变化的。因此,在给出卫星运行位置的同时,必须给出相应的瞬间时刻。并且,卫星位置的精度和时刻的精度密切相关,例如:当要求GPS卫星的位置误差小于1cm时,相应的时刻误差应小于 $2.6\times 10^{-6}\text{ s}^{[1]}$ 。

这就是说,利用GPS技术进行精密定位与导航,需要一个精确的时间系统。以下介绍与GPS测量有关的几种时间系统,即:世界时,原子时和力学时。

确定一个时间系统和确定其他测量基准一样,要定义时间单位(尺度)和原点(起始历元)。

### 1.3.1 世界时系统

世界时系统是以地球自转为基准的一种时间系统。但是,由于观察地球自转运动时,所选

择的空间参考点不同,世界时系统又包括以下几种不同的形式。

### 1.3.1.1 恒星时(Sidereal Time—ST)

如果以春分点为参考点,则由春分点的周日视运动所确定的时间,称为恒星时。

春分点连续两次经过本地子午圈的时间间隔为一恒星日,包含 24 个恒星小时。所以恒星时在数值上等于春分点相对于本地子午圈的时角。因为恒星时是以春分点通过本地子午圈时为原点计算的,所以恒星时具有地方性,有时也称之为地方恒星时。

同时,由于岁差、章动的影响,地球自转轴在空间的指向是变化的,与此相应春分点在天球上的位置也不固定,有真春分点和平春分点之分。因此,相应的恒星时也有真恒星时和平恒星时之分。

恒星时是以地球自转为基础,并与地球的自转角度相对应的时间系统。

### 1.3.1.2 太阳时(Solar Time)

太阳时有真太阳时和平太阳时(Mean Solar Time-MT)两种。如果以真太阳作为观察地球自转的参考点,那么由真太阳周日视运动所确定的时间,称为真太阳时。即可定义真太阳中心连续两次经过本地子午圈所经历的时间间隔为一个真太阳日,同样,一个真太阳日也包含 24 个真太阳时。显然,真太阳时也有地方性,而且由于地球的公转轨道为一椭圆,根据天体运动的开普勒定律可知,太阳的视运动速度是不均匀的。以真太阳作为观察地球自转运动的参考点,将不符合建立时间系统的基本要求。为此,假设某个参考点的视运动速度,等于真太阳周年运动的平均速度,且其在天球赤道上作周年视运动。这个假设的参考点,在天文学中称为平太阳。平太阳连续两次经过本地子午圈的时间间隔,为一个平太阳日,而一个平太阳日包含有 24 个平太阳时。平太阳时也具有地方性,故常称为地方平太阳时。

平太阳日由平正午开始,即平正午为 0 时,平子夜为 12 时。1925 年国际天文联合会决定,改平太阳日由平子夜开始,即平子夜为 0 时,平正午为 12 时,简称平时或民用时。

### 1.3.1.3 世界时(Universal Time—UT)

以平子夜为零时起算的格林尼治平太阳时称为世界时 UT。

如果以  $\theta_{G_m}$  代表平太阳相对格林尼治子午圈的时角,则世界时  $UT_0$  可表示为:

$$UT_0 = \theta_{G_m} + 12(\text{h}) \quad (1-30)$$

世界时与平太阳时的尺度基准相同,其差别仅仅是起算点不同。

世界时系统是以地球自转为基础的时间系统,而地球自转速度是不均匀的,存在长周期变化、季节性短周期变化和不规则变化。并且,地球的自转轴在地球内部的位置也不固定,即存在极移。地球自转的这种不稳定性,导致了世界时  $UT_0$  的不均匀性。为了弥补这一缺陷,1955 年 9 月国际天文联合会决定,在世界时  $UT_0$  中引入极移改正,经此改正的世界时,相应表示为  $UT_1$  和  $UT_2$ 。即:

$$UT_1 = UT_0 + \Delta\lambda \quad (1-31)$$

$$UT_2 = UT_1 + \Delta T, \quad (1-32)$$

这里  $\Delta\lambda$  为观测瞬间,地极相对国际协议地极原点 CIO 的极移改正,其表达式为:

$$\Delta\lambda = \frac{1}{15}(X'' \sin \lambda_0 + Y'' \cos \lambda_0) \operatorname{tg} \varphi_0 \quad (1-33)$$

式中:  $X'', Y''$  为观测瞬间的极移分量;  $\lambda_0, \varphi_0$  为测站的天文经度和纬度。

$\Delta T_1$  为地球自转速度的季节性变化改正, 自 1962 年起国际上采用如下经验公式:

$$\Delta T_1 = a \sin 2\pi t + b \cos 2\pi t + c \sin 4\pi t + d \cos 4\pi t \quad (1-34)$$

式中:  $a=0.022(\text{s}); b=-0.012(\text{s}); c=-0.006(\text{s}); d=0.007(\text{s}); t$  为由本年 1 月 0 日起算的年小数。

很明显, 世界时  $UT_1$  经过极移改正后, 仍含有地球自转速度变化的影响, 而  $UT_2$  虽经地球自转季节性变化的改正, 但仍含有地球自转速度长期变化和不规则变化的影响, 所以世界时  $UT_2$  仍不是一个严格均匀的时间系统。

世界时  $UT_0, UT_1$  与  $UT_2$  之间显然成立关系:

$$UT_2 = UT_0 + \Delta\lambda + \Delta T_1 \quad (1-35)$$

### 1.3.2 原子时(Atomic Time - AT)

随着空间科学技术和现代天文学和大地测量学的发展, 对时间系统的准确度和稳定度的要求不断提高。以地球自转为基础的世界时系统, 已难以满足要求。为此, 人们从 20 世纪 50 年代, 便建立了以物质内部原子运动的特征为基础的原子时间系统。

因为物质内部的原子跃迁所辐射和吸收的电磁波频率, 具有很高的稳定性和复现性, 所以由此而建立的原子时, 便成为当代最理想的时间系统。

原子时秒长的定义为: 位于海平面上的铯<sup>[133]</sup>原子基态两个超精细能级, 在零磁场中跃迁辐射振荡 9 192 631 770 周所持续的时间, 为一原子时秒。该原子时秒作为国际制秒(SI)的时间单位。

这一定义严格地确定了原子时的尺度, 而原子时的原点由下式确定:

$$AT = UT_2 - 0.0039(\text{s}) \quad (1-36)$$

原子时出现后, 得到了迅速的发展和广泛的应用, 许多国家都建立了各自的地方原子时系统。但不同的地方原子时之间存在着差异。为此, 国际上大约有 100 座原子钟, 通过相互对比, 并经数据处理推算出统一的原子时系统, 称为国际原子时(International Atomic Time - IAT)。原子时是通过原子钟来守时和授时的, 因此, 原子钟振荡器频率的准确度和稳定度便决定了原子时的精度。当前常用的几种频率标准的特性, 如表 1-3 所列。

表 1-3 几种常用频标的特性比较<sup>[1]</sup>

特征值	振荡器的种类			
	晶体振荡器	铷汽泡	铯原子束	氢原子激励器
相对频率稳定度/1 s	$10^{-6} \sim 10^{-12}$	$2 \cdot 10^{-11} \sim 5 \cdot 10^{-12}$	$5 \cdot 10^{-11} \sim 5 \cdot 10^{-13}$	$5 \cdot 10^{-13}$
相对频率稳定度/1 d	$10^{-6} \sim 10^{-12}$	$5 \cdot 10^{-12} \sim 5 \cdot 10^{-13}$	$10^{-13} \sim 10^{-14}$	$10^{-13} \sim 10^{-14}$
钟误差达 1 $\mu\text{s}$ 的时间	1~10 d	1~10 d	7~30 d	7~30 d
相对频率再现性	不可应用必须校准	$10^{-10}$	$10^{-11} \sim 2 \cdot 10^{-12}$	$5 \cdot 10^{-13}$
相对频率漂移	$10^{-9} \sim 10^{-11}/\text{天}$	$10^{-11}/\text{月}$	$< 5 \cdot 10^{-13}/\text{天}$	$< 5 \cdot 10^{-13}/\text{年}$



在卫星大地测量中,原子时作为高精度的时间基准,用于精密测定卫星信号的传播时间。

### 1.3.3 力学时(Dynamic Time - DT)

力学时是天体力学中用以描述天体运动的时间单位。根据天体运动方程,所对应的参考点不同,力学时又分为质心力学时和地球力学时的两种形式。

质心力学时(Barycentric Dynamic Time - TDB),是相对太阳系质心的天体运动方程所采用的时间参数。

地球力学时(Terrestrial Dynamic Time - TDT),是相对地球质心的天体运动方程所采用的时间参数。

地球力学时(TDT)的基本单位是国际制秒(SI),与原子时的尺度一致。国际天文学联合会决定,于 1977 年 1 月 1 日原子时(IAT)0 时与地球力学时的严格关系定义如下:

$$\text{TDT} = \text{IAT} + 32.184(\text{s}) \quad (1-37)$$

若以  $\Delta T$  表示地球力学时(TDT)与世界时(UT1)之差的差,则由上式可知

$$\Delta T = \text{TDT} - \text{UT1} = \text{IAT} - \text{UT1} + 32.184(\text{s}) \quad (1-38)$$

该差值可通过国际原子时与世界时的比对而确定,通常载于天文年历中。

在 GPS 测量中,地球力学时作为一种严格均匀的时间尺度和独立的变量而用于描述卫星的运动。

### 1.3.4 协调世界时(Coordinate Universal Time - UTC)

在许多应用部门,如大地天文测量、天文导航和空间飞行器的跟踪定位等部门,当前仍需要以地球自转为基础的世界时。但是,由于地球自转速度长期变慢的趋势,近 20 年来,世界时每年比原子时约慢 1 s,两者之差逐年积累。为了避免发播的原子时与世界时之间产生过大的偏差,所以,从 1972 年便采用了一种以原子时秒长为基础,在时刻上尽量接近于世界时的一种折衷的时间系统,这种时间系统称为协调世界时(UTC),或简称协调时。

协调世界时的秒长严格等于原子时的秒长,采用闰秒(或跳秒)的办法使协调时与世界时的时刻相接近。当协调时与世界时的时刻差超过  $\pm 0.9$  s 时,便在协调时引入一闰秒(正或负),闰秒一般在 12 月 31 日或 6 月 30 日末加入。具体日期由国际时间局安排并通告。

为了使用世界时的用户得到精度较高的 UT1 时刻,时间服务部门在发播协调时(UTC)时号的同时,还给出  $\text{UT}_1$  与 UTC 的差值。这样用户便可以很容易地由 UTC 得到相应的  $\text{UT}_1$ 。

目前,几乎所有国家时号的发播,均以 UTC 为基准。时号发播的同步精度约为  $\pm 0.2$  ms,考虑到电离层折射时的影响,在一个台站上接收世界各国的时号,其互差将不会超过  $\pm 1$  ms。

### 1.3.5 GPS 时间系统(GPST)

为了保证导航和定位精度,全球定位系统(GPS)建立了专门的时间系统,简称 GPST。

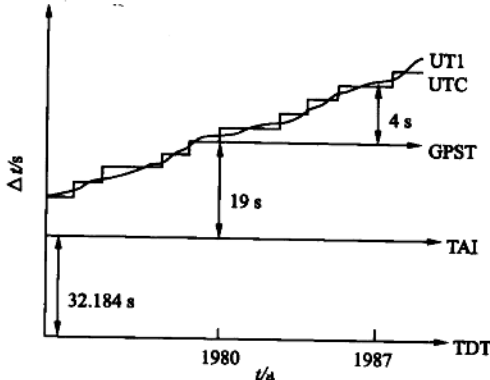


图 1-26 GPS 测量中不同时间系统间的关系<sup>[1]</sup>

GPST 属原子时系统,其秒长为国际制秒 (SI),与原子时相同,但其起点与国际原子时 (IAT)的起点不同。因此,GPST 与 IAT 之间存在一个常数差,它们的关系为:

$$IAT - GPST = 19(s) \quad (1-39)$$

GPST 与协调时(UTC)规定于 1980 年 1 月 6 日 0 时相一致,其后随着时间成整倍数积累,至 1987 年该差值为 4 s。

GPST 由主控站原子钟控制。

图 1-26 描述了 GPS 测量中,所应用的几种主要时间系统的关系。

## 1.4 地球人造卫星的正常轨道运动

在利用 GPS 系统进行导航和定位时,GPS 卫星作为高空动态已知点,需要计算它在协议地球坐标系中的瞬时坐标。而实现这项计算的基础,就是 GPS 卫星的轨道运动理论。本节介绍地球人造卫星的正常轨道运动理论(卫星的无摄运动),以及卫星瞬时位置的计算过程。

### 1.4.1 二体问题意义下卫星的运动方程

假如地球是一质量分布均匀的球体,因此地球的引力就等效于一个质点的引力。地球可视为质量全部集中在其质心的质点,卫星当然同样可以看作是质量集中的质点。研究两个质点在万有引力作用下的相对运动问题,在天体力学中称为二体问题。在二体问题意义下,地球人造卫星的轨道运动,称为正常轨道运动。

根据万有引力定律,地球受卫星的引力  $\vec{F}_e$  可表示为(图 1-27):

$$\vec{F}_e = \frac{GM \cdot m}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad (1-40)$$

式中: $M$  为地球质量; $m$  为卫星质量; $G=6.672 \times 10^{-8} \text{ cm}^3/\text{g} \cdot \text{s}^2$  为万有引力常数; $\vec{r}$  为卫星在(历元)平天球坐标系中的位置向量; $r=|\vec{r}|$  为向量  $\vec{r}$  的模,即卫地距离。

卫星受地球的引力  $\vec{F}_s$ ,其大小与  $\vec{F}_e$  相等而方向相反,即

$$\vec{F}_s = -\frac{GMm}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad (1-41)$$

按照牛顿第二定律,可写出卫星运动方程

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{GMm}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad (1-42)$$

和地球运动方程:

$$M \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{GMm}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad (1-43)$$

由此,在二体问题意义下卫星相对地球的运动方程为:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{G(m+M)}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad (1-44)$$

因为卫星的质量(约 774 kg)远小于地球的质量(约  $5.97 \times 10^{21}$  t),所以通常略去  $m$  项,并记  $\mu=GM$  为地球引力常数。根据向量分析知识,位置向量  $\vec{r}$  及其二阶导数  $d^2\vec{r}/dt^2$ ,可分别用其坐标  $(X, Y, Z)$  以及二阶导数的三个分量  $(d^2X/dt^2, d^2Y/dt^2, d^2Z/dt^2)$  表示。于是,卫星相对地球的运动可写成:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 X}{dt^2} &= -\frac{\mu}{r^3} X \\ \frac{d^2 Y}{dt^2} &= -\frac{\mu}{r^3} Y \\ \frac{d^2 Z}{dt^2} &= -\frac{\mu}{r^3} Z \end{aligned} \right\} \quad (1-45)$$

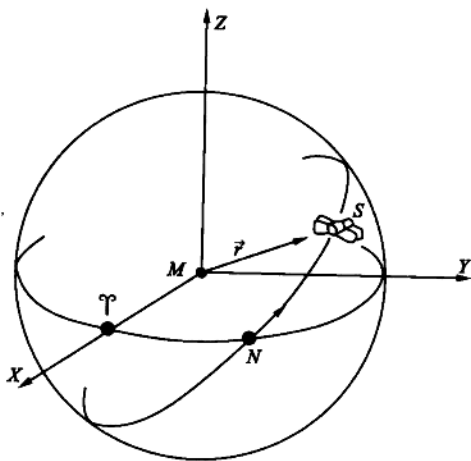


图 1-27 卫星的正常轨道运动

### 1.4.2 开普勒定律和卫星运动的轨道参数

二阶常数微分方程组(1-45)的积分含 6 个积分常数,卫星运动状态就由这 6 个积分常数确定,它们被称为卫星的轨道参数或卫星星历。而卫星的运动规律,则可由德国天文学家开普勒(kepler, 1571~1630)所发现的行星运动三大定律描述。这是因为,在二体问题意义下,行星绕太阳的运动,与卫星绕地球的运动有相同的力学关系。

#### 1.4.2.1 开普勒第一定律

卫星在通过地球质心的平面内运动,其向径扫过的面积与所经历的时间成正比。

开普勒第一定律指出,微分方程组(1-45)的通解,应当是一通过原点的平面方程。事实上,由式(1-45)之第二式乘以  $Z$  再减去第三式乘以  $Y$ ,可得:

$$Z \frac{d^2 Y}{dt^2} - Y \frac{d^2 Z}{dt^2} = 0$$

由此,进一步可写成

$$\frac{d}{dt} \left( Z \frac{dY}{dt} - Y \frac{dZ}{dt} \right) = 0$$

积分后得 
$$Z \frac{dY}{dt} - Y \frac{dZ}{dt} = A \quad (1-46)$$

类似地,若由第一式乘以  $Z$  减去第三式乘以  $X$ ,积分后则可得:

$$X \frac{dZ}{dt} - Z \frac{dX}{dt} = B \quad (1-47)$$

再若以第二式乘以  $X$  减去第一式乘以  $Y$ ,那么积分后就有:

$$Y \frac{dX}{dt} - X \frac{dY}{dt} = C \quad (1-48)$$

现在对(1-46~1-48)三式,分别乘以  $X, Y$  和  $Z$  并求和,则不难获得:

$$AX + BY + CZ = 0 \quad (1-49)$$

式(1-49)为一通过原点的平面方程,它是微分方程组(1-45)的通解。这就证明了,在二体问题意义下,卫星在通过地球质心的平面内运动。式中,  $A, B, C$  为三个积分常数,以下进一步分析这三个积分常数的几何意义。

显然,积分常数  $A, B, C$  是卫星轨道平面方程的三个方向数,于是有轨道平面法线方向的单位向量

$$\vec{n} = \left( \frac{A}{h}, \frac{B}{h}, \frac{C}{h} \right) \quad (1-50)$$

式中:  $h = (A^2 + B^2 + C^2)^{1/2}$ , 并且  $A/h, B/h, C/h$  分别是单位法向量  $\vec{n}$  的三个方向余弦(图 1-28)。

设  $i$  是地球人造卫星的轨道平面和天球赤道面的交角,称为轨道平面倾角。根据图 1-28 显然有

$$i = \arccos(\vec{z}, \vec{n}) = \arccos\left(\frac{C}{h}\right) \quad (1-51)$$

又设  $N$  为卫星由南半球运行至北半球时,卫星与天球赤道的交点,称为升交点。 $\Omega$  为春分点至升交点的角距,称为升交点赤经。容易看出:

$$\Omega = \arctg\left(\frac{Y_N}{X_N}\right) = \arctg\left(-\frac{A}{B}\right) \quad (1-52)$$

轨道平面倾角  $i$  和升交点赤经  $\Omega$  合称轨道平面参数。 $i$  和  $\Omega$  一经确定,轨道平面在空间的位置也就完全确定了。

为了证明常数  $h$  的几何意义,考虑卫星运动的角动量。设  $\vec{V}(dx/dt, dy/dt, dz/dt)$  是卫星运动的速度向量,则相应的角动量可表示为:

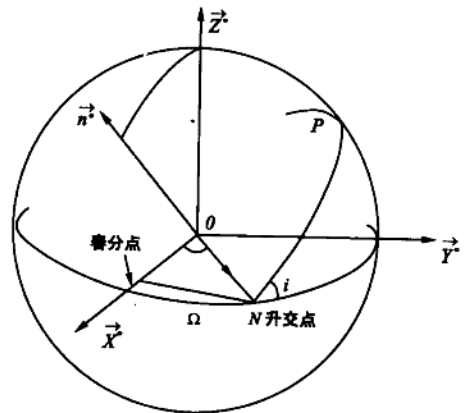


图 1-28 卫星的轨道平面参数

$$\vec{r} \times m\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X & Y & Z \\ m \frac{dx}{dt} & m \frac{dy}{dt} & m \frac{dz}{dt} \end{vmatrix}$$

按照行列式的乘法规则展开上式,并顾及(1-46~1-48)三式,不难获得:

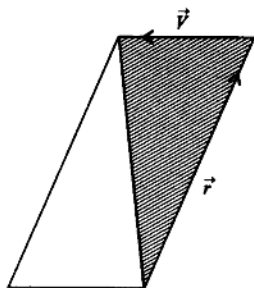


图 1-29 面积速度

$$\vec{r} \times m\vec{V} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} m = \vec{h} m$$

于是,显然成立关系式:

$$\vec{r} \times \vec{V} = \vec{h} \quad (1-53)$$

$\vec{h}$  是常向量,它的模  $h = |\vec{r} \times \vec{V}|$  是卫星运动时向径(即位置向量) $\vec{r}$  在单位时间内扫过面积的二倍(图 1-29),因此  $h/2$  又称为面积

速度。并且,向径 $\vec{r}$ 扫过的面积,显然与所经历的时间成正比。由于常数 $i, \Omega, h$ 具有明确的几何意义,因此通常用它们代替积分常数 $A, B, C$ 。

### 1.4.2.2 开普勒第二定律

卫星运动的轨道为一椭圆,地球位于此椭圆的一个焦点上。

为了证明开普勒第二定律,我们建立轨道平面上的卫星运动方程。如图 1-30 所示, $O-xy$ 为轨道平面直角坐标系,其中原点 $O$ 仍为地心, $x$ 轴指向升交点 $N$ , $y$ 轴按右手系与 $x$ 轴垂直。容易看出,在轨道平面直角坐标系中,卫星运动方程为:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3}x \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3}y \end{cases} \quad (1-54)$$

考虑到解算方便起见,现将上述运动方程转换为极坐标形式。顾及关系式:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ r = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \quad (1-55)$$

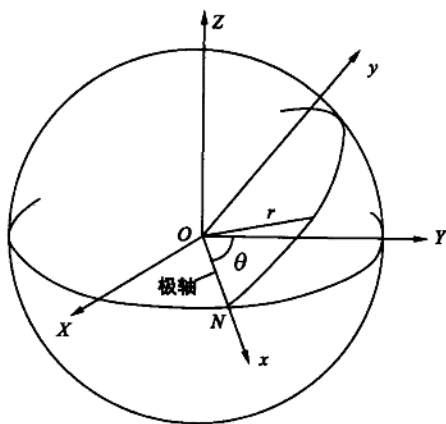


图 1-30 轨道平面坐标系

微分后代入式(1-54)可得:

$$\left[ \frac{d^2r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \cos \theta - \left( r \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right) \sin \theta = -\frac{\mu}{r^2} \cos \theta \quad (1-56)$$

$$\left[ \frac{d^2r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \sin \theta + \left( r \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right) \cos \theta = -\frac{\mu}{r^2} \sin \theta \quad (1-57)$$

这里, $\theta$ 为极角。式(1-56)乘以 $\cos \theta$ ,式(1-57)乘以 $\sin \theta$ ,相加后可得:

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{\mu}{r^2} \quad (1-58)$$

再以  $\sin \theta$  乘式(1-56),  $\cos \theta$  乘式(1-57), 相减后可得:

$$r \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} = 0 \quad (1-59)$$

式(1-58)与式(1-59)即轨道平面上卫星运动方程的极坐标形式。

容易看出, 式(1-59)乘以  $r$  后可写成:

$$\frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = 0$$

积分后得

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = h \quad (1-60)$$

式中:  $h$  为积分常数, 其物理意义仍旧是卫星运动时向径  $r$  扫过面积的二倍。

现作变量变换, 令  $u=1/r$ , 则有  $d\theta/dt=u^2h$ , 以此式代入式(1-57), 略加整理后可得:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu}{h^2} \quad (1-61)$$

上式为二阶常系数线性非齐次方程, 根据常微分方程理论中解这类方程的规则, 不难求得其通解:

$$u = \frac{\mu}{h^2} [1 + e \cos(\theta - \omega)]$$

由变量置换关系  $r=1/u$ , 即得卫星运动的轨道方程:

$$r = \frac{h^2/\mu}{1 + e \cos(\theta - \omega)} \quad (1-62)$$

式(1-62)是极坐标形式的椭圆方程, “极”位于椭圆的一个焦点上。这就说, 卫星的运动轨道是一椭圆, 地球在椭圆的一个焦点上, 因此开普勒第二定律被证明。

式(1-62)中:  $e$  为椭圆的离心率;  $a = \frac{h^2}{\mu(1-e^2)}$  为椭圆的长半径;  $f = \theta - \omega$  为极角, 由近地点起算(图 1-31), 称为真近点角。

于是, 卫星的轨道椭圆方程, 可以写成

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e \cos f} \quad (1-63)$$

由此, 当卫星运动至近地点时, 显然有  $f_0 = \theta_0 - \omega = 0$ , 即  $\omega = \theta$ 。为近地点至升交点的角距, 称为近升角距。

椭圆长半径  $a$  和离心率  $e$  称为轨道椭圆形状参数, 而近升角距  $\omega$  则称为轨道椭圆定向参数。  $a, e, \omega$ , 再加上轨道平面参数  $i$  和  $\Omega$ , 我们总共确定了 5 个轨道参数。常数  $h$ , 由于它与参数  $a, e$  函数相关, 因此不是独立的轨道参数。最后一个轨道参数, 将由开普勒第三定律给出。

#### 1.4.2.3 开普勒第三定律

卫星运动周期之平方与轨道椭圆长半径之立方的比值为—常数。即成立关系式:

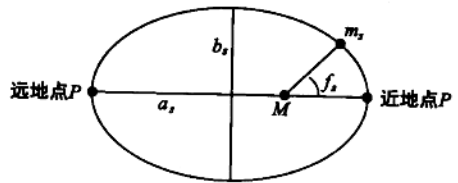


图 1-31 卫星的轨道椭圆

$$a^3 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \mu T^2 \quad (1-64)$$

式中:  $T$  为卫星运动周期。定义:

$$n = \frac{2\pi}{T} \quad (1-65)$$

为卫星运动的平均角速度。当卫星运动一个整周期  $T$  时,其向径扫过的面积。

$$\frac{1}{2} h \cdot T = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1-e^2}$$

顾及  $h^2 = \mu a(1-e^2)$ , 代入上式后就有

$$\mu a(1-e^2)T^2 = (2\pi)^2 a^4(1-e^2)$$

略加整理可得

$$a^3 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \mu T^2 \quad (1-66)$$

或者考虑到  $T = 2\pi/n$ , 则又有:

$$n^2 a^3 = \mu \quad (1-67)$$

至此,开普勒第三定律已被证明。但欲求出卫星运动方程的第 6 个积分常数,也就是第 6 个轨道参数,尚需进一步研究卫星的运动速度。

在轨道平面坐标系中,卫星运动方程为:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu \frac{x}{r^3} \quad (1-68)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\mu \frac{y}{r^3} \quad (1-69)$$

现对式(1-68)乘以  $dx/dt$ , 对式(1-69)乘以  $dy/dt$ , 相加后可得:

$$\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3} \left( \frac{dx}{dt}x + \frac{dy}{dt}y \right) \quad (1-70)$$

若记:  $v = \sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2}$  为卫星运动速度, 则上式等号左边:

$$\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(v^2)$$

而其右边

$$-\frac{\mu}{r^3} \left( \frac{dx}{dt} \cdot x + \frac{dy}{dt} \cdot y \right) = -\frac{\mu}{r^2} \cdot \frac{dr}{dt}$$

于是成立等式

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}(v^2) = -\frac{\mu}{r^2} \frac{dr}{dt}$$

积分后可得

$$\frac{1}{2} v^2 = \frac{\mu}{r} + c \quad (1-71)$$

式中:  $c$  为积分常数。为确定积分常数  $c$ , 需顾及表达式:  $x = r \cos \theta$  与  $y = r \sin \theta$ , 将卫星运动速度改写成极坐标形式:

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \quad (1-72)$$

当卫星运动至近地点时,真近点角  $f=0$ , 于是有  $r=a(1-e)$ ,  $dr/dt=0$ 。并且, 已知

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}$$

所以, 当卫星运动至近地点时, 其速度的平方

$$v^2 = \frac{h^2}{r^2}$$

注意到  $h^2 = \mu a(1 - e^2)$ , 则可得:

$$v^2 = \frac{\mu(1 + e)}{a(1 - e)}$$

以此代入式(1-71), 就有:

$$\frac{\mu(1 + e)}{2a(1 - e)} = \frac{\mu}{a(1 - e)} + c$$

移项后, 经简单运算即得:

$$c = -\frac{\mu}{2a} \quad (1-73)$$

以  $c$  的表达式(1-73)代入式(1-72), 即得在二体问题意义下描述卫星运动速度的公式——活力公式:

$$v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \quad (1-74)$$

活力公式反映出在二体问题意义下, 卫星运动的动能和势能间的守恒关系。根据活力公式(1-74)和式(1-72)有:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

顾及  $d\theta/dt = h/r^2$ ,  $h^2 = a\mu(1 - e^2)$ , 则上式可写成:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a} - \frac{a\mu(1 - e^2)}{r^2}$$

再以  $\mu = n^2 a^3$  代入上式, 可得

$$\frac{dr}{dt} = \frac{na}{r} \sqrt{a^2 e^2 - (a - r)^2} \quad (1-75)$$

引进辅助变量, 令  $a - r = a \cos E$ , 于是有

$$r = a(1 - e \cos E) \quad (1-76)$$

以及

$$\frac{dr}{dt} = a \sin E \frac{dE}{dt} \quad (1-77)$$

上述结果代入式(1-75)后, 不难获得一阶微分方程:

$$(1 - e \cos E) \frac{dE}{dt} = n$$

积分后得

$$E - e \sin E = n(t - \tau) \quad (1-78)$$

式中:  $E$  称为偏近点角;  $\tau$  则是积分常数。如果偏近点角  $E=0$ , 则由式(1-76)可看出, 这时  $r = a(1 - e)$ , 即卫星运动行至近地点。并且, 当  $E=0$  时, 显然有  $t = \tau$ , 即  $\tau$  是卫星通过近地点的时刻, 称为卫星通过近地点的时刻参数。

二体问题意义下, 地球人造卫星运动的 6 个轨道参数至此已全部求得, 它们是:

轨道平面参数:  $i$  为轨道平面倾角;  $\Omega$  为升交点赤经。

轨道椭圆形状参数:  $a$  为轨道椭圆长半径;  $e$  为轨道椭圆离心率。

轨道椭圆定向参数:  $\omega$  为近升角距。



时间参数:  $\tau$  为卫星通过近地点的时刻。

如果已知这 6 个轨道参数, 就唯一地确定了二体问题意义下卫星的运动状态。换句话说, 只要已知这 6 个轨道参数, 就可以计算卫星的瞬时位置和瞬时速度。

图 1-32 描述了卫星在空间的运动状态, 并指出了部分轨道参数的几何意义。

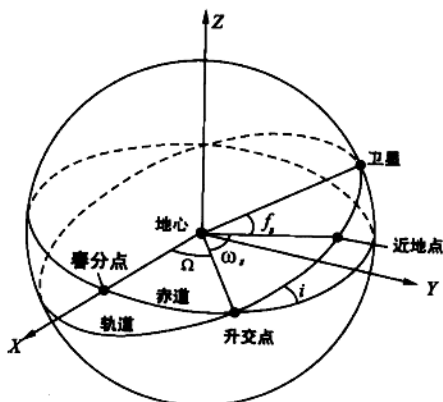


图 1-32 卫星的空间运动状态

### 1.4.3 卫星的瞬时位置计算

卫星的瞬时位置(包括瞬时速度)计算, 通常称为卫星的星历计算, 因此卫星的轨道参数又叫星历参数。在二体问题意义下卫星的星历计算, 包括如下过程:

(1) 由已知轨道参数  $a$ , 计算平均角速度  $n$ :

$$n^2 a^3 = \mu, \quad (1-79)$$

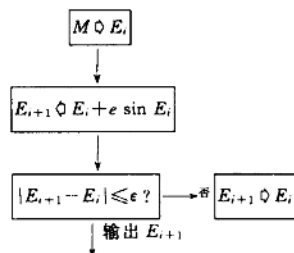
$\mu = 3.986\ 005 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$  为地球引力常数。

(2) 由已知轨道参数  $\tau$  和  $e$  求偏近点角  $E$ :

$$M = E - e \sin E \quad (1-80)$$

式中:  $M = n(t - \tau)$  称为平近点角, 式(1-80)称为开普勒方程。

具体算时可先求平近点角  $M$ , 然后按如下方式迭代解算开普勒方程求偏近点角  $E$  如框图:



(3) 计算真近点角  $f$ :

根据式(1-76), 已知:

$$r = a(1 - e \cos E) \quad (1-81)$$

又由式(1-63)知:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f}$$

比较上述两式, 容易看出成立等式:

$$1 - e^2 = (1 - e \cos E)(1 + e \cos f)$$

由此就有

$$\frac{1 - e^2}{1 - e \cos E} - 1 = e \cos f$$

不难解出

$$\cos f = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} \quad (1-82)$$

或者写成

$$\sin f = \frac{\sqrt{1 - e^2} \cdot \sin E}{1 - e \cos E} \quad (1-83)$$

当然还有

$$\operatorname{tg} \frac{f}{2} = \frac{\sin f}{1 + \cos f} = \frac{\sqrt{1 + e}}{1 - e} \operatorname{tg} \frac{E}{2} \quad (1-84)$$

式(1-82)、(1-83)、(1-84)都可以方便地计算真近点角  $f$ 。

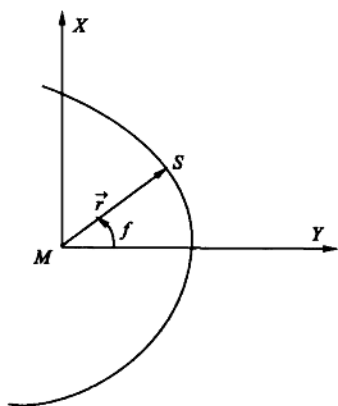


图 1-33  $x$  轴指向近地点时的轨道坐标系

(4) 根据已知的近升角距  $\omega$  求升交角距  $\theta$ :

$$\theta = f + \omega \quad (1-85)$$

(5) 求卫星在轨道平面坐标系中的坐标:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (1-86)$$

或者如图 1-33 所示, 令  $x$  轴指向近地点, 那样就有:

$$\begin{cases} x = r \cos f \\ y = r \sin f \end{cases} \quad (1-87)$$

(6) 作旋转变换, 计算卫星在天球坐标系中的瞬时位置。

首先将轨道平面坐标系扩展为空间坐标系, 为此定义  $z$  轴指向北天球一侧, 并与轨道平面法线重合(图 1-34)。于是式(1-87)可写成:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos f \\ r \sin f \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1-88)$$

以表达式(1-81)、(1-82)与(1-83)代入上式, 并略加整理后可得:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(\cos E - e) \\ a \sqrt{1 - e^2} \cdot \sin E \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1-89)$$

由图 1-34 容易看出, 旋转矩阵

$$R = R_z(-\Omega)R_x(-i)R_z(-\omega) \quad (1-90)$$

可使卫星坐标由轨道坐标系变换到天球坐标系。式中:

$$R_z(-\Omega) = \begin{bmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_x(-i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{bmatrix}$$

$$R_z(-\omega) = \begin{bmatrix} \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

为顺时针 Givens 转动矩阵。于是, 卫星在天球坐标系中的瞬时位置可表示为:

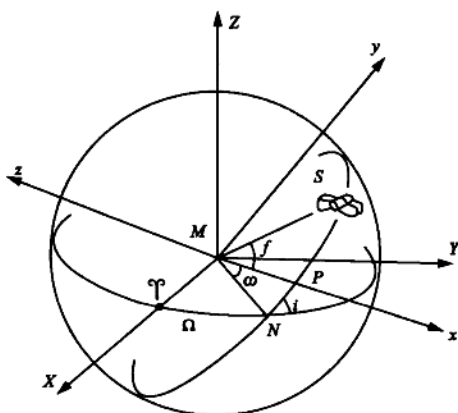


图 1-34 卫星位置由轨道坐标系到天球坐标

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_a = R \begin{bmatrix} a(\cos E - e) \\ a \sqrt{1 - e^2} \cdot \sin E \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1-91)$$

卫星坐标由天球坐标系到地球坐标系的变换,可按 1.2 中的方法计算,这里不再重复讨论。

#### 1.4.4 卫星运动的瞬时速度计算

在轨道坐标系中,卫星运动的瞬时速度,显然可表示为:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \sin E \cdot \frac{\partial E}{\partial \alpha} \\ a \sqrt{1 - e^2} \cdot \cos E \cdot \frac{\partial E}{\partial \alpha} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1-92)$$

后得开普勒方程  $M = E - e \sin E$  (1-93)

以及平近点角  $M$  的表达式:  $M = n(t - \tau)$

容易得到式(1-92)中  $\frac{\partial E}{\partial \alpha} = \frac{n}{1 - e \cos E}$

以此代入(1-92)式,并注意到  $r = a(1 - e \cos E)$ ,则可得轨道坐标中卫星运动的瞬时速度:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{a^2 n}{r} \cdot \sin E \\ \frac{a^2 n}{r} \sqrt{1 - e^2} \cdot \cos E \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1-94)$$

如果以旋转矩阵  $R$ (式 1-90)作用上式右边,则可得天球坐标系中卫星运动的瞬时速度:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} -\frac{a^2 n}{r} \cdot \sin E \\ \frac{a^2 n}{r} \sqrt{1 - e^2} \cdot \cos E \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1-95)$$

按 1.2 中所介绍的方法继续进行旋转变换,可得地球坐标系中卫星运动的瞬时速度,这里不再重复讨论。

## 1.5 地球人造卫星的受摄运动

在讨论卫星的正常轨道运动时,视地球为一均质球体,其全部质量集中在质心  $M$ ,研究在地球质心引力作用下卫星相对地球的运动。这是卫星运动轨道的第一次近似,称为卫星运动的正常轨道或开普勒轨道。要想获得卫星运动的精密轨道,就不能只考虑地球的质心引力作用,而必须顾及卫星运动中所受到的地球非质心引力和其他各种作用力的综合影响。这些力称为摄动力。卫星在地球质心引力和各种摄动力综合影响下的轨道运动,称为卫星的受摄运动,相应的卫星运动轨道称为摄动轨道或瞬时轨道。摄动轨道偏离正常轨道的差异,称为卫星的轨道摄动。

### 1.5.1 卫星运动的摄动力和受摄运动方程

卫星在运行中,除主要受地球的质心引力  $\vec{f}_c$  的作用外,还要受以下各种摄动力的影响。

$\vec{f}_{nc}$  为地球的非球性与非匀质性引起的作用力,即地球的非质心引力; $\vec{f}_s$  为太阳的引力; $\vec{f}_m$  为月球的引力; $\vec{f}_r$  为太阳的光辐射压力; $\vec{f}_a$  为大气阻力; $\vec{f}_p$  为地球潮汐作用力,包括海洋潮汐和地球固体潮所引起的作用力;其他作用力。

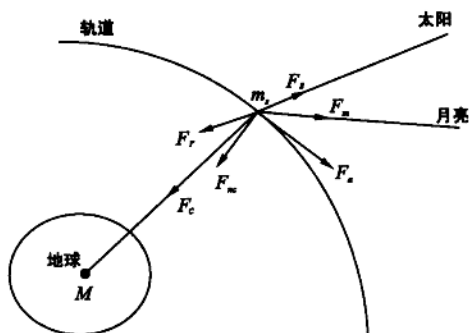


图 1-35 卫星运动所受的力

图 1-35 描述了这些摄动力。由于摄动力作用,卫星的实际运行轨道,即瞬时轨道,比正常轨道要复杂得多。瞬时轨道的轨道平面在空间的方向并不固定不变,轨道的形状同样不固定并且不是严格标准的椭圆。这些说明,在摄动力作用下,轨道参数不是常数,而是时间的函数。轨道摄动,对卫星的星历精度带来不容忽视的影响。仅地球的非质心引力一项,就可以在卫星运行的 3 h 弧段上造成 2 km 的位置偏差。表 1-4 指出了各种摄动力加速度所起的卫星位置偏差。显然,这些偏差对任何用途的导航与定位工作,都是不能接受的。为此,必须建立卫星运行的受摄运动方程,修正卫星运动的正常轨道。

如果记向量  $\vec{F}$  为地球质心引力与各种摄动力的总和,即:

$$\vec{F} = \vec{f}_c + \vec{f}_{nc} + \vec{f}_s + \vec{f}_m + \vec{f}_r + \vec{f}_a + \vec{f}_p \quad (1-96)$$

那么,根据牛顿第二定律,卫星受摄运动方程可以写成:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \quad (1-97)$$

表 1-4 摄动力对 GPS 卫星的影响<sup>[1]</sup>

摄动源	加速度/(m/s <sup>2</sup> )	轨道摄动/m		
		3 小时弧段	2 日弧段	
地球的非对称性	(a) $\bar{C}_{20}$	$5 \times 10^{-5}$	$\approx 2 \text{ km}$	$\approx 14 \text{ km}$
	(b) 其他调和项	$3 \times 10^{-7}$	5~80	100~1500
日、月点质影响	$5 \times 10^{-6}$	5~150	1 000~3 000	
地球潮汐位	(a) 固体潮汐	$1 \times 10^{-9}$	—	0.5~1.0
	(b) 海洋潮汐	$1 \times 10^{-9}$	—	0.0~2.0
太阳辐射压	$1 \times 10^{-7}$	5~10	100~800	
反照压	$1 \times 10^{-8}$	—	1.0~1.5	

在空间直角坐标系中,式(1-97)可分解为:

$$\begin{cases} m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x \\ m \frac{d^2y}{dt^2} = F_y \\ m \frac{d^2z}{dt^2} = F_z \end{cases} \quad (1-98)$$

受摄运动方程(1-97)等号右边项是位置、速度和时间的函数,即

$$\vec{F} = \vec{F}(X, Y, Z, v, t) \quad (1-99)$$

称为摄动力函数,其内涵十分复杂。因此,微分方程组(1-98)的求解也非常困难。本书不准备详细讨论有关这一问题的数学理论,有兴趣的读者可以参阅文献[8,9]等专著。

### 1.5.2 地球引力场摄动力及其对卫星轨道运动的影响

地球不仅其内部质量分布不均匀,而且其形状也不规则,显然,地球的形状接近于一个长短轴相差约为 21 km 的椭球,但在地球北极大地水准面高出椭球面约 19 m,而在地球南极大地水准面却低于椭球面约 26 m,在赤道附近两者之差最大竟达 108 m。

地球体的这种不均匀和不规则性,引起地球引力场的摄动,这时地球引力位模型,含有一摄动位  $\Delta V$ 。若设  $V$  是地球引力位,则有:

$$V = \frac{\mu}{r} + \Delta V \quad (1-100)$$

式中: $\mu$  为地球引力常数; $r$  为卫星至地心的距离。摄动位  $\Delta V$  的球谐函数展开式一般形式如下:

$$\Delta V = \mu \sum_{k=1}^n r^{\frac{k}{2}-1} \sum_{m=0}^k P_{km}(\sin\varphi) (C_{km} \cos m\lambda + S_{km} \sin m\lambda) \quad (1-101)$$

式中: $a$  为地球长半径; $P_{km}(\sin\varphi)$  为  $k$  阶  $m$  次勒让德函数; $C_{km}, S_{km}$  为球谐系数; $n$  为预定的某一最高阶次; $\varphi, \lambda$  为测站的纬度和经度。

地球引力场是保守力场,其位函数的重要特性之一是它对三个坐标的导数,分别等于质点

沿三坐标轴方向的加速度。于是有：

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu}{r} + \Delta V \right) = -\frac{\mu}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (\Delta V) = -\frac{\mu}{r^3} x + \frac{\partial}{\partial x} (\Delta V) \quad (1-102)$$

类似地有 
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3} Y + \frac{\partial}{\partial y} (\Delta V) \quad (1-103)$$

以及 
$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^2} Z + \frac{\partial}{\partial z} (\Delta V) \quad (1-104)$$

式(1-102)、(1-103)与(1-104)就是顾及地球引力场摄动位的卫星运动方程。式中：

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} (\Delta v) \\ \frac{\partial}{\partial y} (\Delta v) \\ \frac{\partial}{\partial z} (\Delta v) \end{cases} \quad (1-105)$$

就是地球引力场摄动力加速度。日月引力、潮汐摄动力等也都是保守力场，而这些摄动力的卫星运动方程，显然将有类似的形式。

地球引力场摄动力对卫星轨道的影响主要有两点：

(1) 引起轨道平面在空间旋转，使升交点赤经  $\Omega$  产生周期性变化。其变化速率：

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = -\frac{3nJ_2}{2} \left[ \frac{a}{a_1(1-e_1^2)} \right]^2 \cos i \quad (1-106)$$

式中： $a$  为地球椭球长半径； $a_1$  为卫星轨道椭圆长半径； $e_1$  为轨道椭圆离心率； $J_2$  为二阶带谐系数。

GPS 卫星轨道椭圆长半径  $a_1$  约等于 26 559 km，离心率约 0.006。若取  $J_2 = 1.082 63 \times 10^{-3}$ ，则可算出升交点沿地球赤道每天西移 3.3 km。任意时刻的升交点赤经：

$$\Omega(t) = \Omega(t_0) + \frac{\partial \Omega}{\partial t} (t - t_0) \quad (1-107)$$

式中： $\Omega(t_0)$  为参考时刻的升交点赤经。

(2) 引起近地点在轨道平面内旋转，导致近升角距  $\omega$  的变化，其变化率可近似地表示为：

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -\frac{3}{4} n J_2 \left[ \frac{a}{a_1(1-e_1^2)} \right]^2 (1 - 5 \cos^2 i) \quad (1-108)$$

当轨道倾角  $i \approx 63.4^\circ$  时， $\partial \omega / \partial t \approx 0$ 。

类似地，可写出任意时刻近升角距的表达式：

$$\omega(t) = \omega(t_0) + \frac{\partial \omega}{\partial t} (t - t_0) \quad (1-109)$$

式中： $\omega(t_0)$  为参考时刻  $t_0$  的近升点角。

由于 GPS 卫星的轨道平面倾角  $i = 55^\circ$ ，接近标准倾角  $63.4^\circ$ ，因此  $\frac{\partial \omega}{\partial t} \approx 0$ ，即近地点几乎是不动的。

(3) 引起平近点角  $M$  的变化，其变化率可表示为：

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -\frac{3}{4} \cdot n J_2 \left( \frac{a}{a_1} \right)^2 (1 - e_1^2)^{-3/2} (1 - 3 \cos^2 i) \quad (1-110)$$

于是,任意时刻的平近点角可表示为:

$$M(t) = M(t_0) + \frac{\partial M}{\partial \alpha}(t - t_0) \quad (1-111)$$

式中:平近点角变化率  $\partial M/\alpha$ ,在二体问题意义下就是平均角速度  $n$ 。所以,若设:

$$\Delta n = \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} + \frac{\partial M}{\partial \alpha} \quad (1-112)$$

那么  $\Delta n$  就是平均角速度改正数,或称卫星的平均运行速度差。对于 GPS 卫星来说,可算得  $\Delta n = -0^{\circ}.01/\text{天}$ 。由于升交点和近地点在地球引力场摄动力作用下的缓慢变化,卫星的轨道运动实际并不在同一平面上,而是在空间画出一条螺旋状的曲线(图 1-36)。

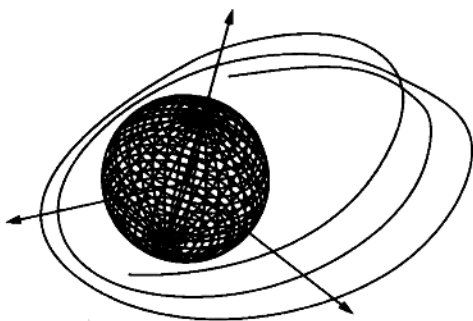


图 1-36 卫星的受摄轨道运动<sup>[1]</sup>

### 1.5.3 日、月引力摄动

日、月作为质点,其引力是一种典型的第三体摄动力。由此引起的摄动位可表示成:

$$\Delta v = \frac{Gm^*}{r^*} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{r}{r^*}\right)^k P_k(\cos \varphi) \quad (1-113)$$

式中: $m^*$ 为第三体质量; $r^*$ 为第三体地心距; $P_k(\cos \varphi)$ 为  $k$  阶勒让德函数; $\varphi$ 为卫星与第三体在地心处的夹角(图 1-37)。

由日、月摄动位引起的卫星轨道摄动力加速度,可表示为:

$$\frac{\partial^2 \vec{r}_s}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \vec{r}_M}{\partial t^2} = Gm_s \left( \frac{\vec{r}_s - \vec{r}}{|\vec{r}_s - \vec{r}|^3} - \frac{\vec{r}_s}{|\vec{r}|^3} \right) + Gm_M \left( \frac{\vec{r}_M - \vec{r}}{|\vec{r}_M - \vec{r}|^3} - \frac{\vec{r}_M}{|\vec{r}|^3} \right) \quad (1-114)$$

其中: $\vec{r}_s$ 、 $\vec{r}_M$ 为太阳、月球的地心向径; $\vec{r}$ 为卫星的地心向径; $m_s$ 、 $m_M$ 为太阳、月球的质量; $G$ 为万有引力常数。

日、月引力引起的卫星位置摄动,主要表现为一种长周期摄动。它们作用在 GPS 卫星上的加速度约为  $5 \times 10^{-6} \text{ m/s}^2$ ,如果忽视这项影响,将造成 GPS 卫星在 3 小时弧段上,在径向、法向和切向上产生 50~150 m 的位置误差。

尽管太阳的质量远大于月球的质量,但其距离太远,所以太阳引力的影响,仅为月球引力影响的

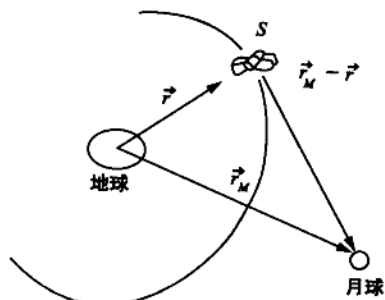


图 1-37 三体问题示意图

表 1-5 轨道参数摄动<sup>[1]</sup>

轨道参数	月球引力所产生的摄动/m
$a$	220
$e$	140
$i$	80
$\Omega$	80
$\omega + M$	500

46%。月球的引力影响,可使 GPS 卫星在 4 小时弧段上,产生如表 1-5 所示的轨道参数摄动。

太阳系的其他行星对 GPS 卫星的影响,远小于太阳引力的影响,一般均可忽略。

### 1.5.4 太阳光压摄动

卫星在运行中,将直接受太阳光辐射压力的影响而摄动(图 1-38)。太阳光辐射压对卫星产生的摄动加速度,不仅与卫星、太阳、地球三者间的相对位置有关,而且也与卫星表面的反射特性、卫星接受阳光照射的有效截面积与卫星质量的比有关。常可近似地用一个简单模型表示:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \gamma P_r C_r \frac{A}{m} r_s^2 \left( \frac{\vec{r}_s - \vec{r}}{|\vec{r}_s - \vec{r}|} \right) \quad (1-115)$$

式中: $P_r$  为太阳光压; $C_r$  为卫星表面反射因子; $A/m$  为卫星有效截面积与卫星质量之比,这里假定卫星的太阳能电池板总是朝向太阳,即是一个常数; $r_s$  为太阳的地心距; $\gamma$  为蚀因子,在阴影区  $\gamma=0$ ,在阳光直接照射区  $\gamma=1$ ,在半阴影区  $0 < \gamma < 1$ (图 1-39)。

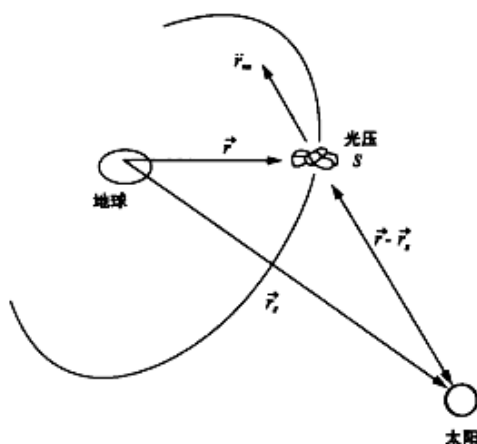


图 1-38 太阳光压摄动力示意图

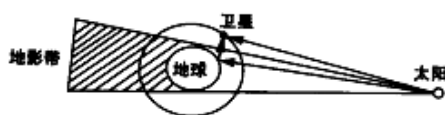


图 1-39 太阳光压

表 1-6 太阳光压摄动<sup>[1]</sup>

轨道参数	太阳光压影响/m
$a$	5
$e$	5
$i$	2
$\Omega$	5
$\omega + M$	10

太阳光压对 GPS 卫星约产生  $10^{-7} \text{m/s}^2$  的摄动力加速度,忽略这一影响,可使卫星在 3 小时

弧段上产生 5~10 m 的位置偏差。这一偏差对于基线长大于 50 km 的相对定位,一般也是不容忽视的。表 1-6 指出了太阳光压摄动对 4 小时弧段产生的摄动量。由地球表面反射回来到达卫星的间接的太阳辐射,称为漫反射效应。间接辐射压对 GPS 卫星运动的影响较小,一般只有直接辐射压的 1%~2%,因此通常忽略这一影响。

### 1.5.5 其他摄动力影响

#### 1.5.5.1 固体潮和海洋潮汐摄动

固体潮和海洋潮汐同样会改变地球重力位,对 GPS 卫星产生摄动力加速度,其量级约为  $10^{-9} \text{m/s}^2$ 。忽略固体潮汐影响,将在两天弧段上产生 0.5~1 m 的轨道误差。而忽略海洋潮汐影响,对于



两天弧段将产生 1~2 m 的轨道误差。对于大多数 GPS 测量来说,这项影响可忽略不计。

### 1.5.5.2 大气阻力摄动

大气阻力摄动对低轨道卫星特敏感,其影响程度,主要取决于大气的密度、卫星截面积与质量之比以及卫星的运动速度。飞行高度为 200 km 的卫星,所受到的大气摄动力加速度约为  $2.51 \times 10^{-7} \text{ m/s}^2$ 。GPS 卫星飞行高度在 20 000 km 以上,那里大气密度甚微,一般可以忽略这项影响。

### 思 考 题

#### [1] 名词解释

天球;赤经;赤纬;黄道;春分点;岁差;章动;极移;世界时;原子时;协调世界时;儒略日。

- [2] 简述卫星大地测量的发展历史,并指出其各个发展阶段的特点。
- [3] 试说明 GPS 全球定位系统的组成。
- [4] 为什么说 GPS 卫星定位测量技术问世是测绘技术发展史上的一场革命?
- [5] 简述 GPS、GLONASS 与 NAVSAT 三种卫星导航定位系统工作卫星星座的主要参数。
- [6] 简述(历元)平天球坐标系、(观测)平天球坐标系以及瞬时极(真)天球坐标系之间的差别。
- [7] 怎样进行岁差旋转与章动旋转?它们有什么作用?
- [8] 为什么要进行极移旋转?怎样进行极移旋转?
- [9] 简述协议地球坐标系的定义。
- [10] 试写出由大地坐标到地心空间直角坐标的变换过程。
- [11] 综述由(历元)平天球坐标系到协议地球坐标系的变换过程。
- [12] 简述恒星时、真太阳时与平太阳时的定义。
- [13] 什么是 GPS 定位测量采用的时间系统?它与协调世界时 UTC 有什么区别?
- [14] 试述描述 GPS 卫星正常轨道运动的开普勒三大定律。
- [15] 试画图并用文字说明开普勒轨道 6 参数。
- [16] 简述地球人造卫星轨道运动所受到的各种摄动力。
- [17] 地球引力场摄动力对卫星的轨道运动有什么影响?
- [18] 日、月引力对卫星的轨道运动有什么影响?
- [19] 简述太阳气压产生的摄动力加速度,并说明它对卫星轨道运动有何影响?
- [20] 综述考虑摄动力影响的 GPS 卫星轨道参数。
- [21] 试写出计算 GPS 卫星瞬时位置的步骤。

# 第 2 章 GPS 卫星信号及其测量原理

---

GPS 卫星定位测量是通过用户接收机接收 GPS 卫星发射的信号来测定测站坐标的,那么究竟什么是 GPS 卫星信号呢?粗略地说, GPS 卫星信号包括测距码信号(即 P 码和 C/A 码信号)、导航电文(或称 D 码,即数据码信号)和载波信号。GPS 卫星信号的产生、调制和解调都非常复杂,涉及到现代数字通讯理论和技术方面的若干高科技问题。作为 GPS 信号用户,虽然可以不去深入钻研这些问题,但了解其基本知识和概念,将有助于理解 GPS 卫星导航和定位测量的原理,因而仍旧是十分必要的。

本章介绍 GPS 信号的一般知识,以及 GPS 信号接收机的一般原理和几种常见的 GPS 信号接收机。

## 2.1 GPS 卫星的测距码信号与伪距测量原理

GPS 卫星发射的测距码信号包括 C/A 码和 P 码,它们都是二进制伪随机噪声序列,具有特殊的统计性质。本节从码的基本概念引入,介绍伪随机噪声序列及其产生,以及 C/A 码和 P 码的产生及其特征,并简要介绍码相关伪距测量原理。

### 2.1.1 码的基本概念

码是指表达信息的二进制数及其组合。

例如,若分地面控制网为四个等级,则可取两位二进制数的不同组合:11,10,01,00,依此代表控制网的一、二、三、四等。这些二进制数的组合形式便称为码。其中每一位二进制数称为一个码元或叫一比特(binary digit-bit),比特的意思就是二进制数,它是码的度量单位,也是信息量的度量单位。如果将各种信息,例如声音、图像以及文字等,通过量化并按某种规则表示为二进制数的组合形式,则这一过程就称为编码,也就是信息的数字化。

在二进制数字化信息的传输中,每秒钟传输的比特数称为数码率,用以表示数字化信息的传输速度,其单位为 bit/s 或记为 BPS。

一组二进制数的码序列,又可以看作是以 0 和 1 为幅度的时间函数(图 2-1),用记号  $u(t)$

表示。如果一组码序列  $u(t)$ , 对某个时刻  $t$ , 码元是 0 或 1 完全是随机的, 但其出现的概率均为  $1/2$ 。这种码元幅值是完全无规律的码序列, 称为随机噪声码序列。它是一种非周期序列, 无法复制。但是, 随机噪声码序列却有良好的自相关性, GPS 码信号测距就是利用了 GPS 测距码的良好自相关性才获得成功。

这里, 自相关性是指两个结构相同的码序列的相关程度, 它由自相关函数描述。那么, 什么是自相关函数呢? 为了说明这一问题, 可将随机噪声码序列  $u(t)$  平移  $k$  个码元, 获得具有相同结构的新的码序列  $\tilde{u}(t)$ 。比较两个码序列  $u(t)$  与  $\tilde{u}(t)$ , 假定它们俩的对应码元中, 码值(0

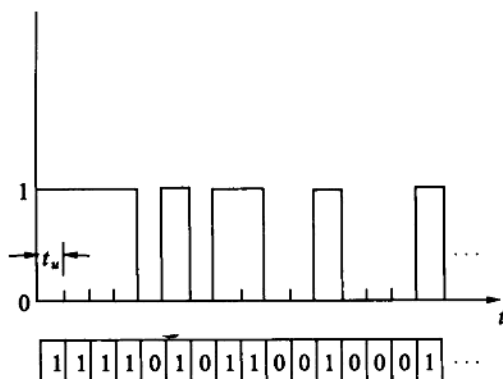


图 2-1 码序列——以 0 和 1 为幅度的时间函数

或 1) 相同的码元个数为  $S_u$ , 而码值相异的码元个数为  $D_u$ , 那么两者之差  $S_u - D_u$  与两者之和  $S_u + D_u$  (即码元总数) 的比值, 即定义为随机噪声码序列的自相关函数, 并以符号  $R(t)$  表示。即有:

$$R(t) = \frac{S_u - D_u}{S_u + D_u} \quad (2-1)$$

在实用中, 可通过自相关函数  $R(t)$  的取值判断两个随机噪声码序列的相关性。很明显, 当平移的码元个数  $k=0$  时, 两个结构相同的码序列其相应码元完全相同, 这时  $D_u=0$ , 而自相关函数  $R(t)=1$ ; 相反, 当  $k \neq 0$  时, 且假定码序列中的码元总数充分大, 那么由于码序列的随机性, 将有  $S_u \approx D_u$ , 这时自相关函数  $R(t) \approx 0$ 。由此, 根据自相关函数  $R(t)$  的取值, 即可确定两个随机噪声码序列是否已经“相关”, 或者通俗地讲, 两个码序列的相应码元是否已完全“对齐”。

假设 GPS 卫星发射一个随机序列  $u(t)$ , 而 GPS 信号接收机在收到信号的同时复制出结构与  $u(t)$  完全相同的随机序列  $\tilde{u}(t)$ , 则这时由于信号传播时间延迟的影响, 被接收的  $u(t)$  与  $\tilde{u}(t)$  之间产生平移, 即相应码元已错开, 因而  $R(t) \approx 0$ 。如果通过一个时间延迟器来调整  $\tilde{u}(t)$ , 使之与  $u(t)$  的码元相互完全对齐, 即有  $R(t)=1$ , 那么就可以从 GPS 接收机的时间延迟器中, 测出卫星信号到达用户接收机的准确传播时间, 再乘以光速便可准确地确定由卫星至观测站的距离。所以随机噪声码序列的良好自相关特性, 为 GPS 测距奠定了基础。

## 2.1.2 伪随机噪声码及其产生

虽然随机码具有良好的自相关特性, 但由于它是一种非周期性的码序列, 没有确定的编码规则, 所以实际上无法复制和利用。因此, 为了能够实际应用, GPS 采用了一种伪随机噪声码 (Pseudo Random Noise—PRN), 简称伪随机码或伪码。这种码序列的主要特点是, 不仅具有类似随机码的良好自相关特性, 而且具有某种确定的编码规则。它是周期性的、可人工复制的

码序列。

伪随机码由多级反馈移位寄存器产生。这种移位寄存器由一组连接在一起的存储单元组成,每个存储单元只有“0”或“1”两种状态,并接受钟脉冲和置“1”脉冲的驱动和控制。

假定一由4个存储单元组成的四级反馈和移位寄存器,如图2-2所示。在钟脉冲的驱动下,每个存储单元的内容,都按次序由上一单元转移到下一单元,而最后一个存储单元的内容便输出。并且,其中某两个存储单元,例如单元3和4的内容进行模二相加,再反馈输入给第一存储单元。

所谓模二相加,是二进制数的一种加法运算,常用符号 $\oplus$ 表示,其运算规则是:

$$1 \oplus 1 = 0, \quad 0 \oplus 1 = 1, \quad 1 \oplus 0 = 1, \quad 0 \oplus 0 = 0$$

当移位寄存器开始工作时,置“1”脉冲使各级存储单元全处于“1”状态,此后在钟脉冲的驱动下,移位寄存器将经历15种不同的状态,然后再返回到全“1”状态,从而完成了一个周期(表2-1)。在四级反馈移位寄存器经历上述15种状态的同时,其最末级存储单元输出了一个具有15个码元,且周期为 $15tu$ 的二进制数码序列,称为 $m$ 序列。 $tu$ 表示钟脉冲的时间间隔,也就是码元的宽度。

表2-1 四级反馈移位寄存器状态序列<sup>[1]</sup>

状态编号	各级状态 ④ ③ ② ①	模二加反馈 3 $\oplus$ 4	末级输出的 二进制数
1	1 1 1 1	0	1
2	1 1 1 0	0	1
3	1 1 0 0	0	1
4	1 0 0 0	1	1
5	0 0 0 1	0	0
6	0 0 1 0	0	0
7	0 1 0 0	1	0
8	1 0 0 1	1	1
9	0 0 1 1	0	0
10	0 1 1 0	1	0
11	1 1 0 1	0	1
12	1 0 1 0	-1	1
13	0 1 0 1	1	0
14	1 0 1 1	1	1
15	0 1 1 1	1	0

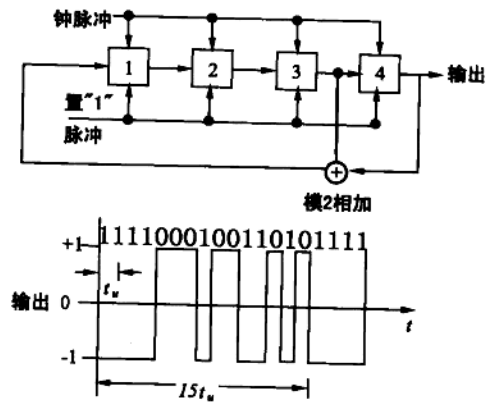


图2-2 四级反馈移位寄存器示意图<sup>[1]</sup>

不难看出,四级反馈移位寄存器所产生的 $m$ 序列,其一个周期可能包含的最大码元个数恰好等于 $2^4-1$ 个。因此,一般来说,一个 $r$ 级移位寄存器所产生的 $m$ 序列,在一个周期内其码元的最大个数:

$$Nu = 2^r - 1 \quad (2-2)$$

与此相应,这时 $m$ 序列的最大周期:

$$Tu = (2^r - 1)tu = Nutu \quad (2-3)$$

式中: $Nu$ 也称为码长。

由于移位寄存器不容许出现全“0”状态,因此 $2^r-1$ 个码元中,“1”的个数总比“0”的个数多1个。这样,当两个周期相同的 $m$ 序列其相应码元完全相齐时,自相关系数 $R(t) = 1$ ,而在其他情况则有

$$R(t) = -\frac{1}{Nu} = -\frac{1}{2^r - 1} \quad (2-4)$$

当 $r$ 足够大时,就有 $R(t) \approx 0$ 。所以,伪

随机噪声码既与随机噪声码一样,具有良好的自相关性,又是一种结构确定,可以复制的周期性序列。用户接收机可方便地复制卫星所发射的伪随机噪声码信号,并通过和接收到的码信号比较(相关),精确测定信号的传播时延,进一步计算出某一时刻测站和卫星间的距离。

### 2.1.3 GPS 卫星的测距码信号

GPS 卫星发射两种测距码信号,即 C/A 码和 P 码,两者都是伪随机噪声码,以下分别介绍它们的产生、特点和用途。

#### 2.1.3.1 C/A 码

如图 2-3 所示,C/A 码由两个 10 级反馈移位寄存器相组合产生。两个移位寄存器于每星期日子夜零时,在置“1”脉冲作用下全处于 1 状态,同时在频率为  $f_1=f_0/10=1.023$  MHz 钟脉冲驱动下,两个移位寄存器分别产生码长为  $N_u=2^{10}-1=1\,023$  bit,周期为  $N_u \cdot tu=1$  ms 的  $m$  序列  $G_1(t)$  和  $G_2(t)$ 。这时  $G_2(t)$  序列的输出不是在该移位寄存器的最后一个存储单元,而是选择其中两存储单元进行二进制相加后输出,由此得到一个与  $G_2(t)$  平移等价的  $m$  序列  $G_{2i}$ 。再将其与  $G_1(t)$  进行模二相加,便得到 C/A 码。由于  $G_2(t)$  可能有 1 023 种平移序列,所以其分别与  $G_1(t)$  相加后,将可能产生 1023 种不同结构的 C/A 码。C/A 码不是简单的  $m$  序列,而是由两个具有相同码长和数码率但结构不同的  $m$  序列相乘所得到的组合码,称为戈尔德(Gold)序列。

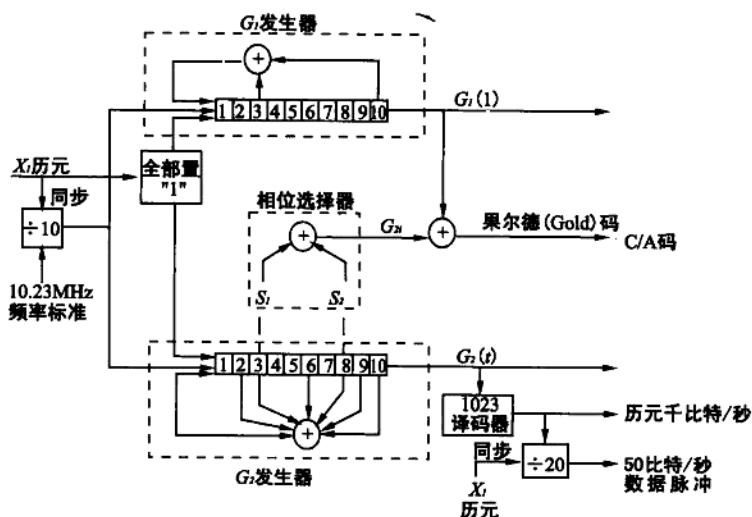


图 2-3 C/A 码发生示意图<sup>[1]</sup>

C/A 码的码长、码元宽度、周期和数码率为:码长  $N_u=2^{10}-1=1\,023$  bit;码元宽度  $tu \approx 0.977\,52\ \mu\text{s}$ ,相应长度 293.1 m;周期  $T_u=N_u tu=1$  ms;数码率  $BPS=1.023$  Mbit/s。

各颗 GPS 卫星所使用的 C/A 码,其上述四项指标都相同但结构相异,这样既便于复制又

容易区分。

C/A 码有如下 2 个特点:

(1) C/A 码的码长很短,易于捕获。在 GPS 导航和定位中,为了捕获 C/A 码以测定卫星信号传播的时延,通常需要对 C/A 码逐个进行搜索。因为 C/A 码总共只有 1 023 个码元,所以若以每秒 50 码元的速度搜索,只需要约 20.5 s 便可完成。

由于 C/A 码易于捕获,而且通过捕获的 C/A 码所提供的信息,又可以方便地捕获 P 码。所以通常 C/A 码也称为捕获码。

(2) C/A 码的码元宽度较大。假设两个序列的码元相关误差为码元宽度的 1/10~1/100,则这时相应的测距误差可达 29.3~2.9 m。由于其精度较低,所以 C/A 码也称为粗码。

所以,C/A 码的原意就是粗捕获码(Coarse Acquisition Code)。

### 2.1.3.2 P 码

P 码由两组各由两个 12 级反馈移位寄存器的电路发生,其基本原理与 C/A 码相似,但其线路设计细节远比 C/A 码复杂并且严格保密。

P 码的特征是:码长  $Nu \approx 2.35 \times 10^{14}$  bit;码元宽度  $tu \approx 0.097752 \mu s$ ,相应长度 29.3 m;周期  $Tu = Nntu \approx 267$  天;数码率  $BPS = 10.23$  Mbit/s。

实际上 P 码的一个整周期被分为 38 部分,每一部分周期 7 天,码长约  $6.19 \times 10^{12}$  bit。其中,5 部分由地面监控站使用,32 部分分配给不同的卫星,1 部分闲置。这样,每颗卫星所使用 P 码便具有不同的结构,但码长和周期相同。

因为 P 码的码长约为  $6.19 \times 10^{12}$  bit,所以如果仍采用搜索 C/A 码的办法来捕获 P 码,即逐个码元依次进行搜索,当搜索的速度仍为每秒 50 码元时,那将是无法实现的(约需  $14 \times 15^5$  天)。因此,一般都是先捕获 C/A 码,然后根据导航电文中给出的有关信息,便可容易地捕获 P 码。

另外,由于 P 码的码元宽度为 C/A 码的 1/10,这时若取码元的相关精度仍为码元宽度的 1/10~1/100,则由此引起的相应距离误差约为 2.93~0.29 m,仅为 C/A 码的 1/10。所以 P 码可用于较精密的导航和定位,称为精码(Precision Code)。目前,美国政府对 P 码保密,不提供民用,因此一般 GPS 用户实际只能接收到 C/A 码。

### 2.1.4 码相关伪距测量原理

码相关法伪距测量是通过调整自相关函数  $R(t)$  的值,测定测距码信号由卫星到达测站的传播时间实现的。自相关函数的严格表达式是

$$R(t) = \frac{1}{T} \int_0^T U(t - \Delta t) U'(t - \tau) dt \quad (2-5)$$

式中: $\Delta t$  为测距码信号的传播时间; $\tau$  为接收机复制码延迟; $U(t - \Delta t)$  为测距码信号; $U'(t - \tau)$  为接收机复制码信号; $T$  为测距码信号周期。

自相关函数具有下述三种可能的状态:

(1) 当  $\Delta t = \tau$  时, 由于两个码序列的结构相同, 测距码序列与复制码序列完全对齐(图 2-4(a)), 因而任意时刻两个码的状态相同, 其乘积码恒等于 1。这时, 自相关函数也等于 1, 即:

$$R(t) = \frac{1}{T} \int_0^T U(t - \Delta t) U'(t - \tau) dt = \frac{1}{T} \int_0^T dt = 1 \quad (2-6)$$

(2)  $\Delta t - \tau = t_u$  时, 即两个码序列错开一个码元。如果假定周期  $T = 15t_u$ , 那么由图 2-4(b) 容看出, 其中 7 码元乘积波形为 +1, 8 码元乘积波形为 -1, 因而在一个整周期  $[0, T]$  上, 积分

$$\int_0^T U(t - \Delta t) U'(t - \tau) dt = -1$$

由此, 自相关函数

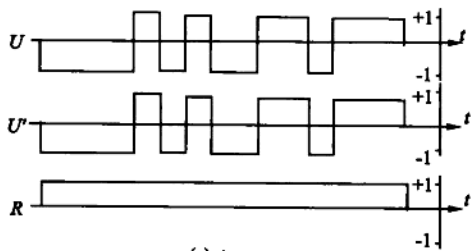
$$R(t) = \int_0^T U(t - \Delta t) U'(t - \tau) dt = -\frac{1}{T} \quad (2-7)$$

上述结论, 对于任意  $\Delta t - \tau > t_u$  均成立。

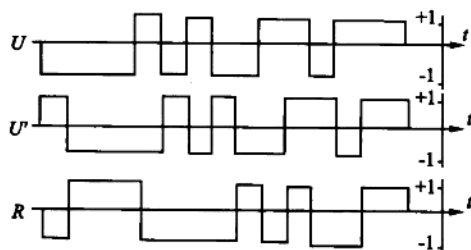
(3)  $\Delta t - \tau < t_u$  时, 也就是当两个码序列错开不足一个码元时, 若以假定  $T = 15t_u$ , 那么自相关函数在  $\Delta t - \tau$  分别等于码元宽度的 1/5、2/5、3/5、4/5 时的值由表 2-2 给出。图 2-4(c) 描述了  $\Delta t - \tau < t_u$  时的情况。

可见, 当  $\Delta t - \tau < t_u$  时, 有  $-1/T < R(t) < 1$ 。由于两个码序列的结构相同, 因此自相关函数显然具有对称性。图 2-5 就是根据上面讨论结果绘制的自相关函数图像。

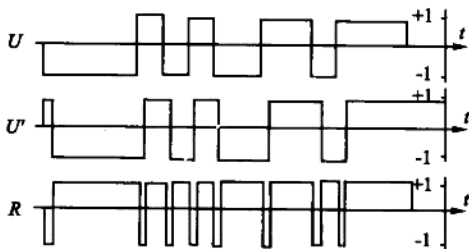
当卫星发射的测距码信号经过  $\Delta t$  秒传播时间后到达接收机时, 接收机立刻产生出一个结构完全相同的复制码序列, 并在时延器的控制下不断调整  $\tau$ , 直到  $R(t) = 1$  为止。这时即有  $\tau = \Delta t$ , 信号传播时间  $\Delta t$  一旦测定, 只要乘以光速  $c$ , 即可获得卫星至测站的距离, 但是由于其中包含卫星钟和接收机钟的不同步误差, 因此称为伪



(a)  $\Delta t = \tau$



(b)  $\Delta t - \tau = t_u$



(c)  $\Delta t - \tau < t_u$

图 2-4  $\Delta t - \tau$  不同时自相关函数  $R(t)$  的值

表 2-2  $\Delta t - \tau \leq t_u$  时自相关函数  $R(t)$  的值

$\Delta t - \tau$	0	1/5	2/5	3/5	4/5	1
$R(t)$	1	59/75	43/75	27/75	11/75	-5/75

( $T = 15t_u$ )

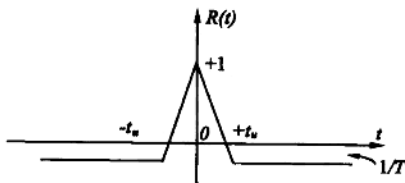


图 2-5 自相关函数图像

距,以记号  $\hat{\rho}$  表示。

在实际工作中,由于测距码产生过程中的随机误差和信号传播误差,自相关函数实际不可能达到 1。但可不断调整  $\tau$ ,使  $R(t)$  达到最大值  $R_{\max} \approx 1$ ,因而有  $\tau \approx \Delta t$ 。自相关函数的测距精度通常以自相关函数的分辨率  $d/M$  表示,其中  $d=R_{\max}-R_{\min}$ , $M$  目前约为 50~200,所以自相关函数的测距精度为  $d/M$  个码元。由于测距码为周期性码序列,所以自相关函数同样为一周期函数。即,如果  $R(t)$  达到最大值  $R_{\max}$ ,则  $R(t+T)$  同样达到最大值  $R_{\max}$ ,所以码相关伪距测量理论上具有多值性。

## 2.2 GPS 卫星的导航电文

GPS 卫星的导航电文主要包括:卫星星历、时钟改正、电离层时延改正、卫星工作状态信息以及由 C/A 码转换到捕获 P 码的信息。导航电文同样以二进制码的形式播送给用户,因此又叫数据码,或称 D 码。

### 2.2.1 导航电文的组成格式

导航电文的基本单位叫“帧”。一帧导航电文长 1500 bit,含 5 个子帧(图 2-6)。而每个子帧又分别含有 10 个字,每个字含 30 bit 电文,故每一子帧共含 300 bit 电文。电文的播送速率为每秒 50 bit,所以播送一帧电文的时间需要 30 s,而一子帧电文的持续播发时间为 6 s。

为了记载多达 25 颗 GPS 卫星的星历,规定子帧 4、5 各含有 25 页。子帧 1、2、3 与子帧 4、5 的每一页均构成一帧电文。每 25 帧导航电文组成一个主帧。在每一帧电文中,1、2、3 子帧的内容每小时更新一次,而子帧 4、5 的内容仅在给卫星注入新的导航数据后才得以更新。

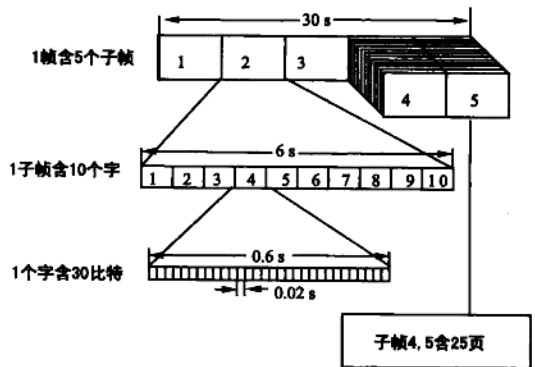


图 2-6 导航电文的组成格式

### 2.2.2 导航电文的内容

每帧导航电文中,各子帧电文的主要内容如图 2-7 所示。以下介绍电文各部分的基本意义。



### 2.2.2.1 遥测字 (Telemetry Word—TLW)

每个子帧的开头第一个字码都是遥测字,作为捕获导航电文的前导。其中第 1~8 bit 是同步码(10001001),为各子帧编码脉冲提供一个同步起点,接收机从该起点开始顺序译出电文。每 9~22 bit 为遥测电文,它包括地面监控系统注入数据时的状态信息、诊断信息和其他信息,以此指示用户是否选用该颗卫星。第 23~24 bit 无意义,第 25~30 bit 是奇偶检验码。

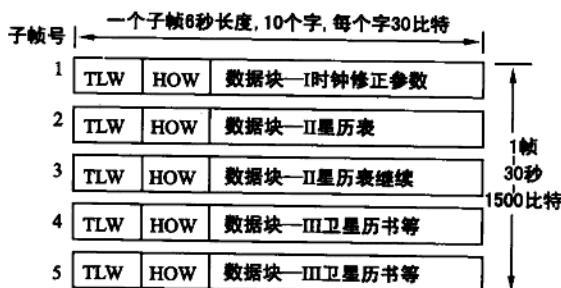


图 2-7 各帧导航电文的内容

### 2.2.2.2 交接字 (Hand Over Word—HOW)

每个子帧的第二个字码都是交接字,它的主要作用是向用户提供捕获 P 码的 Z 计数。Z 计数位于交接字的第 1~17 bit,表示自星期天零时至星期六 24 时,P 码子码  $X_1$  的周期重复数。 $X_1$  的周期为 1.5 s,因此 Z 计数的量程是 0~403 200。知道了 Z 计数,也就知道了观测瞬间在 P 码周期中所处的准确位置,这样便可迅速捕获 P 码。

交接字的第 18 bit 表明卫星注入电文后是否发生滚动动量矩缺载现象;第 19 bit 指示数据帧的时间是否与子码  $X_1$  的钟信号同步;第 20~22 bit 为子帧识别标志;第 23 和 24 bit 无意义;第 25~30 bit 为奇偶检验码。

### 2.2.2.3 数据块 I

第 1 子帧的第 3 到第 10 字码为数据块 I。它的内容主要包含:卫星的健康状况,数据龄期,星期序号,卫星时钟改正参数及电离层改正参数等信息。现作如下简要说明:

(1) 传输参数 N:传输参数 N 位于数据块 I 第 3 字码的第 13~16 bit,它向非特许用户指明,当采用该颗卫星进行导航定位测量时,可能达到的测距精度,以 URA(即 Predicated User Range Accuracy)表示,且知

$$URA \leq 2^N(m)$$

当  $N=1111(=15)$  时,非特许用户即不宜采用该卫星作导航定位测量。研究表明,在我国境内当  $N=1001(=9)$  时,即不宜采用。

(2) 数据龄期 AODE:数据龄期 AODE 表示基准时间  $t_0$  和最近一次更新星历数据的时间  $t_L$  之差,即

$$AODE = t_0 - t_L \quad (2-8)$$

由于基准时间给出的卫星钟改正参数,将随着时间的推移而其精度下降,因此数据龄期 AODE 的主要作用就是评价卫星钟改正参数的精度。数据龄期位于第 3 字码的第 23、24 bit,以及第 8 字码的第 1~8 bit。

(3) 电离层时延差改正 Tgd:第 7 字码的第 17~24 bit 表示载波  $L_1$ 、 $L_2$  的电离层时延差

改正  $Tgd$ 。当使用单频接收机作导航定位测量时,采用  $Tgd$  改正观测结果,可提高定位精度。

(4) GPS 星期编号  $WN$ ;  $WN$  表示从 1980 年 1 月 6 日  $UTC$  零时起算的 GPS 时星期数。GPS 系统采用了 GPS 星期和 GPS 时间系统,关于 GPS 时间系统在 1.3 中已作过介绍,这里不再详述。

(5) GPS 卫星时钟改正参数:卫星钟钟差是指各颗 GPS 卫星的卫星钟面时相对 GPS 标准时的差异。由于相对论效应,卫星钟比地面钟要略快一些,两者每秒相差约 448 PS( $1 \text{ PS} = 1 \text{ s} \times 10^{-12}$ ),即每天相差  $3.87 \times 10^{-5} \text{ s}$ 。为了改正这一偏差,将卫星钟的标称频率由 10.23 MHz 减小到 10.229 999 995 45 MHz,经改正后的残余偏差和卫星钟自身误差,采用如下多项式模型改正。即任意时刻的卫星钟钟差:

$$\Delta t = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 \quad (2-9)$$

式中:  $t_0$  为参考历元,即数据块 I 的基准时间;  $a_0$  为卫星钟钟差,即卫星钟面时相对 GPS 时的差值;  $a_1$  为相对于实际频率的频率偏差系数,即钟速;  $a_2$  为时钟的频率漂移系数(钟漂),即钟速变化率。系数  $a_0, a_1, a_2$  分别由数据块 I 的第 9 和第 10 字码给出。

### 2.2.2.4 数据块 II

导航电文的第 2 和第 3 子帧构成数据块 II。它的内容为 GPS 卫星星历,这是 GPS 卫星为 导航、定位播送的主要电文,向用户提供有关计算卫星运行位置的信息。包括:

(1) kepler 轨道 6 参数:  $\sqrt{a}$  为卫星轨道椭圆长半径的平方根;  $e$  为卫星轨道椭圆离心率;  $i_0$  为参考时刻  $t_0$  的轨道平面倾角;  $\Omega_0$  为参考时刻  $t_0$  的升交点赤经;  $\omega$  为近地点角距;  $M_0$  为参考时刻  $t_0$  的平近点角。

(2) 轨道摄动 9 参数:  $\Delta n$  为平均角速度改正数,即卫星运动的平均角速度与计算值之差;  $\dot{\Omega}$  为升交点赤经的变化率;  $\dot{i}$  为卫星轨道平面倾角的变化率;  $Cus, Cuc$  为升交角距的正余弦调和改正项振幅;  $Cis, Cic$  为轨道平面倾角的正余弦调和改正项振幅;  $Crs, Crc$  为轨道向径正余弦调和改正项振幅。

(3) 时间 2 参数:  $t_0$  为由星期日子夜零时起算的星历参考时刻。

$AODE = t_0 - t_L$  为星历表数据龄期。

### 2.2.2.5 数据块 III

导航电文的第 4 和第 5 子帧构成数据块 III,它向用户提供 GPS 卫星的 历书数据,包括 GPS 卫星的 概略星历、卫星钟概略改正数、码分地址和 卫星工作状态信息。用户根据这些信息,可选择工作正常和位置适当的卫星,构成最佳观测空间几何图形,以此提高导航和定位精度。用户并可根据已知的码分地址,较快地捕获所选择的观测卫星。

## 2.3 GPS 卫星星历

GPS 系统通过两种方式向用户提供卫星星历,一种方式是通过导航电文中的数据块 II 直

接发射给用户接收机,通常称为预报星历;另一种方式是由 GPS 系统的地面监控站,通过磁带、网络、电传向用户提供,称为后处理星历。

### 2.3.1 GPS 卫星的预报星历

预报星历是指相对参考历元的外推星历。参考历元瞬间的卫星星历(即参考星历),由 GPS 系统的地面监控站根据大约一周的观测资料计算而得,为参考历元瞬间卫星的轨道参数。在其邻近时刻,由于摄动力影响,卫星的实际轨道将逐渐偏离参考轨道,且偏离的程度取决于观测历元与参考历元间的时间间隔。

因此,为了保证预报星历的精度,采用限制外推时间间隔的方法。GPS 卫星的参考星历每小时更新一次,参考历元选在两次更新星历的中央时刻,这样由参考历元外推的时间间隔限制为 0.5 小时。

预报星历的内容包括:参考历元瞬间的 kepler 轨道 6 参数,反映摄动力影响的 9 个参数,以及参考时刻参数和星历数据龄期,共计 17 个星历参数。用户接收机在接收到卫星播发的导航电文后,通过解码即可直接获得预报星历。由于预报星历是以电文方式由卫星直接播送给用户接收机,因此又称为广播星历。目前广播星历的精度,估计约为 20~100 m。

### 2.3.2 GPS 卫星的后处理星历

由于 GPS 卫星的广播星历包含外推误差,因此它的精度受到限制,不能满足某些从事精密定位工作的用户的要求。例如,在应用 GPS 技术作地球动力学研究时,要求达到  $10^{-7}$  甚至  $10^{-8}$  的定位精度,相应的卫星星历精度就要求达到米级甚至分米级。广播星历显然不能适应这种高精度定位的要求。

后处理星历是不含外推误差的实测精密星历,它由地面跟踪站根据精密观测资料计算而得,可向用户提供用户观测时刻的卫星精密星历,其精度目前为米级,将来可望达到分米级。但是,用户不能实时通过卫星信号获得后处理星历,只能在事后通过磁带、网络、电传等通讯媒体向用户传递。

## 2.4 GPS 卫星的载波信号与相位测量原理

前文介绍 GPS 卫星发射的测距码信号与导航电文信号是组成 GPS 卫星信号的两个分量,而组成 GPS 卫星信号的第三个分量就是载波信号。

### 2.4.1 GPS 卫星的载波信号

GPS 卫星的测距码信号和导航电文信号都属于低频信号,其中 C/A 码和 P 码的数码率分别为 1.023 Mbit/s 与 10.23 Mbit/s,而 D 码(导航电文,又称为数据码)的数码率仅为 50 bit/s。GPS 卫星离地面远达  $2 \times 10^4$  km,其电能又非常紧张,因此很难将上述数码率很低的信号传输到地面。解决这一难题的办法,就是另外发射一种高频信号,并将低频的测距码信号和导航电文信号加载到这一高频信号上,构成一

高频的已调波发射给地面。GPS 卫星采用  $L$  频带的两种不同频率的电磁波作为高频信号,分别称为  $L_1$  载波与  $L_2$  载波。其中: $L_1$  载波的频率  $f_1=1575.42$  MHz,波长  $\lambda_1=19.03$  cm,其上调制 C/A 码、P 码以及导航电文; $L_2$  载波的频率  $f_2=1227.6$  MHz,波长  $\lambda_2=24.42$  cm,其上仅调制 P 码与导航电文。GPS 卫星发射信号的频率,都要受卫星上原子钟的基准频率的控制。GPS 卫星原子钟基准频率  $f_0=10.23$  MHz,P 码采用基准频率,C/A 码仅取基准频率的  $1/10$ ,而  $L_1$  载波的频率  $f_1$  为基准频率倍频 154 倍后获得, $L_2$  载波的频率  $f_2$  则取基准频率  $f_0$  的 120 倍。图 2-8 描述了上述 GPS 卫星信号的构成。

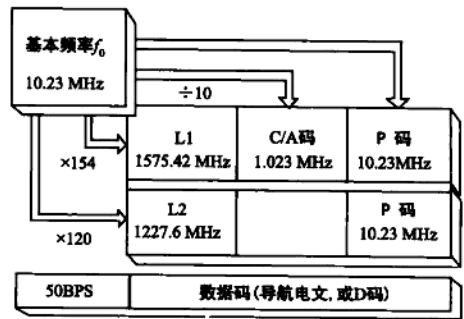


图 2-8 GPS 卫星信号构成示意图

### 2.4.2 GPS 卫星信号的调制

在数字通讯技术中,为了有效地传播信息,一般均将低频信号加载到高频的载波上,这时原低频信号称为调制信号,而加载信号后的载波就称为已调波。那么,GPS 卫星的测距码和数据码信号又是怎样调制到载波上的呢?

GPS 信号调制,是采用调相技术实现的。前文曾介绍过,GPS 测距码信号和数据码信号,都是以二进制数为码元的时间序列,它具有信号波形和信号序列两种表述形式。信号波形也称为码状态,通常以符号  $u(t)$  表示。信号序列通常以符号  $\{u\}$  表示,信号序列  $\{u\}$  中的每一个元素取值为 0 或者 1,称为码值。并且约定,当码值为 0 时,对应的码状态为 +1;而当码值取 1 时,对应的码状态为 -1。图 2-9 说明了信号波形  $u(t)$  和信号序列  $\{u\}$  两种表述方式间的对应关系。实现码信号与载波信号的调制,只需取码状态与载波相乘就可以了。

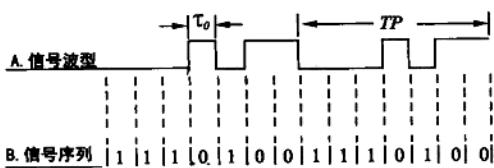


图 2-9 信号波形  $u(t)$  与信号序列  $\{u\}$  间的对应关系

载波是一种电磁波,由 GPS 卫星上原子钟的振荡器产生,其数学表达式为一正弦波。

因此,当码状态+1 与载波相乘时,显然不会改变载波的相位;而当码状态取-1 与载波相乘时,载波相位改变 180°。这样,当码值由 0 变为 1,或由 1 变为 0 时,都会使调制后的载波相位改变 180°,称为相位跃迁(图 2-10)。

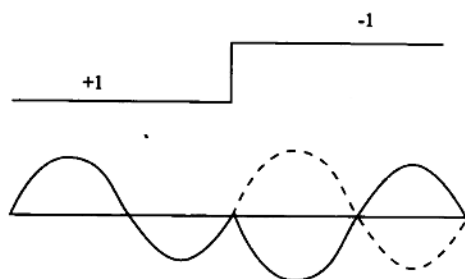


图 2-10 加载信号后产生的相位跃迁

在加载测距码信号与数据信号后,载波  $L_1$  与  $L_2$  的表达式分别为:

$$S_{L_1}(t) = A_p P_i(t) D_i(t) \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_c C_i(t) D_i(t) \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \quad (2-10)$$

$$S_{L_2}(t) = B_p P_i(t) D_i(t) \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad (2-11)$$

式中:  $A_p$ 、 $B_p$  分别为调制于  $L_1$ 、 $L_2$  上的  $P$  码振幅;  $P_i(t)$  为  $\pm 1$  状态的  $P$  码;  $D_i(t)$  为  $\pm 1$  状态的数据码;  $A_c$  为调制于  $L_1$  上的 C/A 码振幅;  $C_i(t)$  为  $\pm 1$  状态的 C/A 码; “ $i$ ”为卫星编号;  $\omega_j$  为载波  $L_j$  的角频率( $j=1,2$ );  $\varphi_j$  为载波  $L_j$  的初相( $j=1,2$ )。图 2-11 表示载波信号的调制过程,该图说明,纯净的载波为一正弦波,在加载测距码信号或数据码信号后,在码值由 0 变为 1 或由 1 变为 0 的交替处,调制后的载波出现相位跃迁。图 2-12 是构成 GPS 卫星信号的电路示意图,该图说明, GPS 卫星的各个信号分量都由卫星原子钟振荡器的基准频率产生,并且信号调制过程是通过电路中一系列混频、模二求和与叠加实现。图中符号  $\otimes$  表示混频器,其意思是取码状态与载波相乘;符号  $\oplus$  表示码值模二求和;符号  $\Sigma$  为加法器。仔细阅读该图,就不难理解  $L_1$  载波与  $L_2$  载波的信号调制过程。

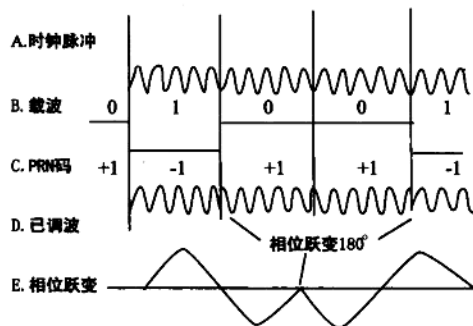


图 2-11 载波信号的调制过程

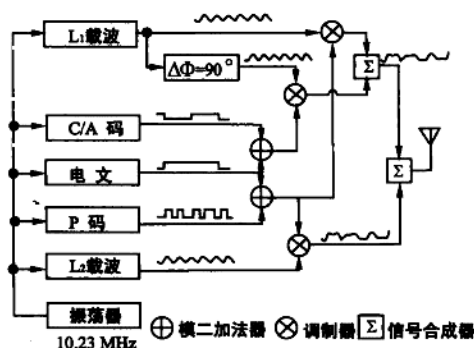


图 2-12 GPS 卫星信号电路示意图<sup>[2]</sup>

### 2.4.3 GPS 卫星信号的解调

在进行 GPS 卫星定位测量时,既然用户接收机收到的 GPS 卫星信号是一种已调波,那么,随之产生的一个技术问题,就是怎样从接收到的已调波中分离出测距码信号、导航电文信号以及纯净的载波信号,这项技术称为信号的解调。当用户接收机收到 GPS 卫星信号后,通常可采用以下两种方法进行信号的解调:

### 2.4.3.1 码相关解调技术

由于调制波是以码状态与载波相乘实现的,当码状态由 +1 变为 -1,或由 -1 变为 +1

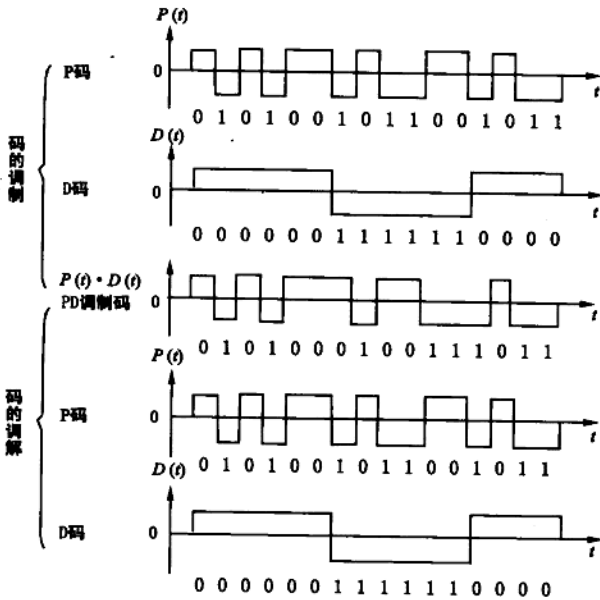


图 2-13 码信号的调制与解调示意图

时,都会使调制后的载波改变相位,产生相位跃迁而形成已调波。因此,要想恢复载波,只需用接收机产生的复制码信号,在同步条件下与卫星信号相乘就可以了。其原因是由于接收机产生的复制码信号,与 GPS 卫星发射的测距码信号结构完全相同,在经过码相关清除时延差后,可实现完全同步。这样原先因乘 -1 而被改变的相位,现在又因再乘 -1 而得到恢复,图 2-13 演示了两种码信号的调制与解调过程。假定  $P(t)$  为测距码信号,  $D(t)$  为导航电文信号,经过调制后得调制信号:

$$S(t) = P(t) \cdot D(t)$$

接收机在收到信号  $S(t)$  后,产生结构完全相同的复制信号  $P(t)$ ,在经过码相关处理实现完全同步的条件下,与卫星信号  $S(t)$  相乘,结果获得  $D(t)$ ,即:

$$S(t)P(t) = D(t)$$

在采用相关型波道的 GPS 信号接收机内,通常设置有称为伪噪声码跟踪环路的电路,该电路的功能就是应用码相关解调技术实现信号的解调。但是,由于 GPS 信号接收机不可能复制出导航电文,因此经过码相关解调技术处理后的载波信号,仍含数据码  $D(t)$ 。图 2-14 为伪噪声码跟踪环路示意图,该图清楚说明 GPS 卫星信号  $G(t)$ ,在与经过码相关技术处理后的本地码信号混频后,输出的解扩信号为:

$$D(t)\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

其中仍含数据码  $D(t)$ 。如果要进一步提取数据码信号  $D(t)$ ,就需在 GPS 信号接收机通道内,另外再设置一被称为载波跟踪环路的电路(图 2-15)。该电路可使由接收机石英钟压控振荡器产生的本地载波信号与上述解扩信号混频而获得纯净的数据码  $D(t)$ ,再经解释便得导航电文。

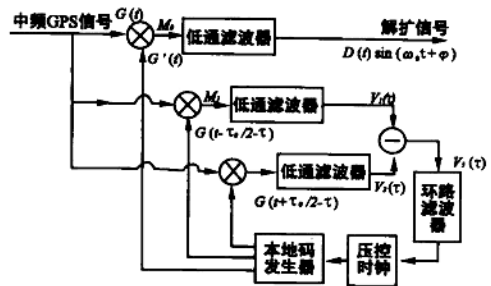


图 2-14 伪噪声码跟踪环路示意图<sup>[2]</sup>

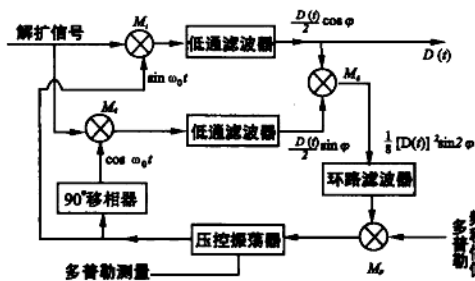


图 2-15 载波跟踪环路示意图<sup>[2]</sup>

星信号自乘, 消去加载在载波上的测距码信号和数据码信号, 达到解调的目的。最后, 电路输出经过解调后的纯净载波。平方解调技术不必知道调制码的结构, 但它在解调时不仅消去了测距码信号, 同时也消去了数据码信号, 因此不能用来恢复导航电文。

### 2.4.3.2 平方解调技术

由于处于  $\pm 1$  状态的调制码信号, 经平方后均为  $+1$ , 而  $+1$  不改变载波相位, 所以卫星信号经平方后即可达到解调的目的。图 2-16 是平方解调技术电路示意图。该图说明, 当用户接收到 GPS 卫星信号后, 首先通过变频而得一中频信号, 这时信号结构无任何变化, 仅仅只降低了载波频率。电路再将所获得的中频 GPS 卫

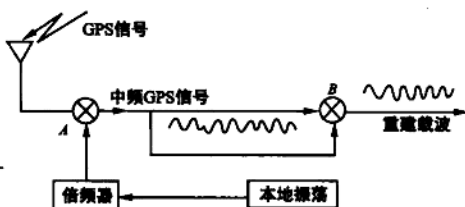


图 2-16 平方解调技术电路示意图

### 2.4.4 载波相位测量原理

假定卫星  $S$  发出的载波信号, 在接收机  $M$  处的相位为  $\varphi_M$ , 而在卫星  $S$  处的相位为  $\varphi_S$ 。那么卫星  $S$  至接收机  $M$  间的距离  $\rho$  就可以粗略地表示为:

$$\rho = \lambda(\varphi_S - \varphi_M)$$

式中:  $\lambda$  为载波的波长,  $\varphi_M$  和  $\varphi_S$  均由某个起点开始, 包括整周数与不足一整周数的载波相位值, 其单位为周 (图 2-17)。但是,  $\varphi_S$  在实际工作中无法测得, 代替的办法是由接收机的振荡器产生一个频率与初相和卫星信号完全相同的基准信号, 使得在任一瞬间接收机基准信号的相位就等于卫星  $S$  处发射信号相位, 因此  $\Phi(\tau_a) = \varphi(\tau_a)$ 。如果接收机接到的载波信号相位为  $\varphi(a)$ , 那么由卫星  $S$  到接收机  $M$  间的距离  $\rho$  可表示成

$$\rho = \lambda[\varphi(\tau_b) - \varphi(\tau_a)]$$

在实际进行载波相位测量时, 当接收机跟踪上卫星信号, 并在起始历元  $t_0$  瞬间进行首次载波相位测量时, 所测得的相位差应包

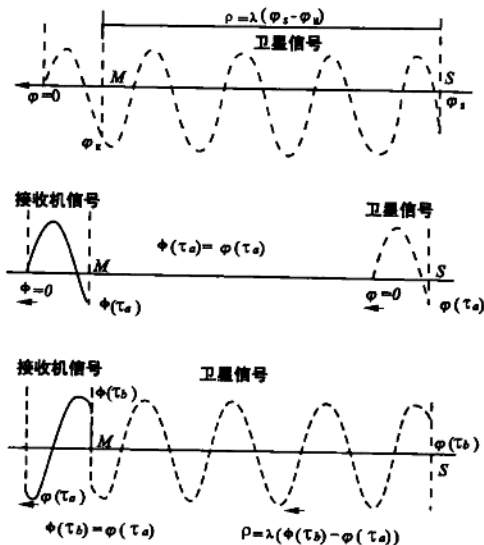


图 2-17 载波相位测量原理

括整周部分和不足一整周部分  $F^0(\varphi)$ , 相位差观测值应为:

$$\varphi^i(M) - \varphi^i(S) = N_0 + F^0(\varphi) \quad (2-12)$$

式中:  $\varphi^i(M)$  为  $t_0$  时刻接收机基准信号相位;  $\varphi^i(S)$  为接收机在  $t_0$  时刻收到的卫星信号相位。但是, 由于载波是一单纯的正弦波, 不具有任何辨识标记, 因此无法知道正在测量的是第几周的相位。换句话说,  $N_0$  实际不能直接测定, 称为整周未知数(或称为整周模糊度)。而接收机在  $t_0$  瞬间所测得的仅仅是不足一整周的相位差  $F^0(\varphi)$ 。在  $t_0$  时刻以后的各次载波相位测量中, 接收机电路中的计数器会自动记录从  $t_0$  至观测时刻值的整周数变化值  $\text{In}(\varphi)$ 。因此, 所测得的载波相位测量值中包含整周数  $\text{In}(\varphi)$  和不足一整周数  $F(\varphi)$ 。如果以符号  $\tilde{\varphi}$  表示在  $t_i$  时刻测得的相位观测值, 则:

$$\tilde{\varphi} = \text{In}^i(\varphi) + F^i(\varphi) \quad (2-13)$$

式中: 整周数  $\text{In}^i(\varphi)$  在  $t_0$  时刻进行的首次测量值为零, 而在其余各次测量值中为整数。当接收机连续跟踪卫星信号时, 所测得的每个相位观测值显然含有同一整周未知数  $N_0$ (图 2-18)。因此,  $t_i$  时刻一个完整的载波相位观测值可表示成:

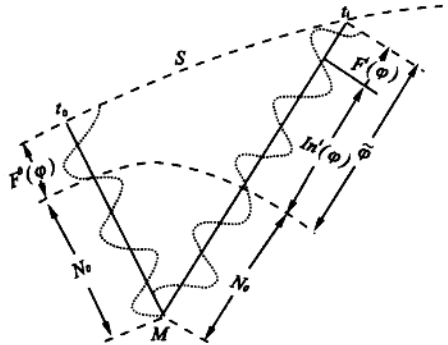


图 2-18 载波相位观测量

$$\varphi = N_0 + \tilde{\varphi} = N_0 + \text{In}^i(\varphi) + F^i(\varphi) \quad (2-14)$$

当卫星信号中断时, 将丢失  $\text{In}(\varphi)$  中的一部分整周数, 称为整周跳变, 简称周跳。而  $F(\varphi)$  是瞬时值, 不受周跳影响。

## 2.5 美国政府关于 GPS 卫星信号的限制使用政策

GPS 定位技术的全球、全天候、实时与高精度特性, 使它在现代化战争中具有非常重要的作用。例如, 它可以为自动化指挥系统提供统一的时间基准和坐标系统, 为战略武器与空间防御提供测绘保障, 并可加强海、陆、空三军的协同作战能力、侦察能力、导弹与飞机轰炸的制导能力, 以及为三军提供统一的导航系统等。由于上述原因, 美国国防部制定了限制使用 GPS 卫星信号的政策, 即采用所谓 SA 技术, 使未经美国政府特许的广大 GPS 用户的实时定位精度降低到它所允许的水平, 以此保护美国国家利益不受损害。

### 2.5.1 GPS 工作卫星的 SA 技术

美国政府目前对 GPS 信号实行双用途服务。一种是标准定位业务称为 SPS, 专供各类民间用户使用; 另一种是精密定位业务称为 PPS, 专供军方和特许用户使用。为了限制 SPS 用户



的实时定位精度,美国政府对 GPS 工作卫星信号,采用了 SA(Selective Availability——选择可用性)技术:它包括对信号基准频率的  $\delta$  技术,对导航电文  $\epsilon$  技术,对 P 码的译密技术。

所谓  $\delta$  技术,是指在 GPS 工作卫星信号基准频率中,引入一个人工高频抖动信号,使 GPS 卫星频率产生快速变化(称为钟频抖动)。GPS 卫星钟基准频率为 10.23 MHz,钟频抖动可达  $\pm 2$  Hz,抖动周期约为 10 min 左右。由于基准频率是测距码、数据码以及载波等所有卫星信号的振荡源,因此这些派生信号也都引入了一个人工高频抖动信号。SPS 用户根据这种带有人工误差的信号定位、测速和测时,必然导致降低测量精度。

导航电文经  $\epsilon$  技术处理后,广播星历的精度由  $\pm 20$  m 降低到  $\pm 100$  m 左右,而且偏差不固定,为不规则变化的随机量,美国国防部还决定保留在战争或危急时刻进一步降低广播星历精度的权利。

为了有效地实行双用途服务措施,对由于采用 SA 技术而产生的信号频率抖动和星历偏差等人工误差,用密码加密。仅 PPS 用户接收机具有解密功能,可以脱密恢复不含人工误差的信号频率和星历。SPS 用户接收机无解密功能,只能根据包含人工误差的信号进行测量和定位计算。目前,美国政府正在修改导航电文,计划把 PPS 用户的实时定位精度提高到 1 m。美国政府还采用了反电子诱骗(AS,即 Anti-Spoofing)技术,即对 P 码采用译密技术,使 P 码和机密的 W 码模 2 和生成 Y 码。只有 PPS 用户知道 W 码的结构,可解译出 P 码,SPS 用户不能破译 P 码,因此就不能获得高精度定位信息。SA 技术已于 1991 年 7 月 1 日开始实行,24 颗在轨工作卫星信号,全部经 SA 技术处理而带有上述人工误差。

## 2.5.2 GPS 用户的反限制技术措施

美国国防部对 GPS 工作卫星信号实施 SA 技术,对于 GPS 静态定位用户影响并不太大,而对于 GPS 实时动态定位的用户影响却非常大。美国国防部的用意,就是使非特许用户的实时定位精度降低到所允许的水平( $\pm 100$  m),以此保护美国国家利益不受损害。然而对于许多应用领域来讲(例如:飞机进场着陆;船舶进港及内河航行;地面车辆的导航及调度管理;资源勘查;环境监测与灾害救助等), $\pm 100$  m 的实时定位精度就显得过低,无法满足广大用户的要求,从而限制了 GPS 的应用范围。因此,SA 技术在实施过程中,受到了包括美国本国民用部门和世界各国 GPS 用户的强有力的反限制技术挑战。GPS 用户冲破美国政策限制,提高 GPS 定位精度的技术措施主要有如下两个方面:

(1) 建立为某个国家或者某个地区服务的 GPS 卫星测轨系统。如美国的一些民用部门,以及加拿大、澳大利亚和欧洲的一些国家,都曾实施建立区域性的甚至全球性的测轨系统计划。其中著名的一项计划是国际合作 GPS 卫星跟踪网(CIGNET - Coperative International GPS Satellite Tracking Network),该网以美国为首于 1986 年开始组建,跟踪站扩展至南半球,测轨精度可达分米级。我国也有不少专家建议,以目前国内已有的 GPS 跟踪站为基础,扩大完善为全国永久性 GPS 跟踪网,以此提供卫星星历、钟差等与 GPS 自身有关的信息服务。这项建议对于开发利用 GPS 资源,推动测绘科技的现代化进程都有重大意义。一些国家和地区例如俄罗斯和欧洲,则发展本国和区域性的卫星导航定位系统,如第一章中曾介绍过的

GLONASS 系统等,以此摆脱美国政策的限制。我国也研制了一种双星导航定位系统,该系统采用两颗地球静止轨道卫星,以双向测距结合数字地形模型(DEM)确定地面点位置。

(2) 发展 GPS 定位技术,研究新的能够有效地削弱美国政府 SA 技术影响的实时定位方法,以提高 GPS 实时定位精度。差分 GPS(DGPS - Differential GPS)就是在上述要求下发展起来的新一代 GPS 实时动态定位技术。它的出现,使 GPS 非特许用户的实时定位精度由  $\pm 100$  m 提高到  $\pm 1$  m,有效地消除了 SA 技术的影响。有关差分 GPS 的原理和技术方法,我们将在第 4 章中介绍。目前,差分 GPS 技术发展非常迅速,所谓载波相位差分技术(RTK - Real Time Kinematic)可实时提供观测点厘米级精度的三维坐标。

GPS 的技术进步,使 SA 技术的作用日益消失。同时也为了保证美国 GPS 在卫星定位中的统治地位,美国政府已经宣布,在 2000 年 5 月开始试行取消对 GPS 工作卫星实施 SA 技术。

## 2.6 GPS 信号接收机

GPS 信号接收机是用来接收、处理和测量 GPS 卫星信号的专用设备。由于 GPS 卫星信号的应用范围非常广泛,而信号的接收和测量又有多种方式,因此 GPS 信号接收机有许多种不同的类型。根据 1994 年 1 月出版的《GPS World》报导,截止当时世界上就已有 50 家企业产生 308 种不同型号的 GPS 信号接收机。

### 2.6.1 GPS 信号接收机的基本工作原理

尽管 GPS 信号接收机有许多种不同的类型,但其主要结构却大体相同,可分为天线单元

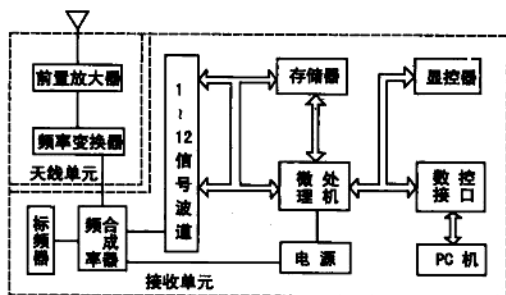


图 2-19 GPS 信号接收机的基本构成<sup>[4]</sup>

和接收单元两大部分。天线单元的主要功能是将 GPS 卫星信号的非常微弱的电磁波能转化为电流,并对这种信号电流进行放大和变频处理。而接收单元的主要功能则是对经过放大和变频处理的信号电流进行跟踪、处理和测量(图 2-19)。描述了 GPS 信号接收机的构成概况。

#### 2.6.1.1 天线单元

GPS 信号接收机的天线单元由接收天线和前置放大器两部分组成。天线的基本作用,是把来自卫星的微弱能量转化为相应的电流量。而前置放大器则是将 GPS 信号电流予以放大,并进行变频,即将中心频率为  $1\,575.42$  MHz ( $L_1$  载波)与  $1\,227.60$  MHz ( $L_2$  载波)的高频信号变换为低一两个数量级的中频信号。通常 GPS 信号接收天线应满足如下一些基本要求:

(1) 天线与前置放大器应密封为一体,以保障在恶劣气象环境下也能正常工作,并减少信

号损失。

(2) 天线的作用范围应为整个上半天球,并在天顶处不产生死角,以保障能接收到来自天空任何方向的卫星信号。

(3) 天线须有适当的防护与屏蔽措施,以便尽可能地减弱来自各个方向的反射信号的干扰。

(4) 天线相位中心应保持高度稳定,并与其几何中心之间的偏差应尽量小。

目前, GPS 信号接收机采用的天线类型有:单极或偶极天线、四线螺旋形结构天线、微波传输带型天线、圆锥螺旋天线等。这些天线的性能各有特点,需结合接收机的性能选用。而微波传输带状天线(简称微带天线—Microstrip Antenna),因其体积小、重量轻、性能优良而成为 GPS 信号接收机天线的主要类型。通常微带天线是由一块厚度远小于工作波长的介质基片和两面各覆盖一块用微波集成技术制作的辐射金属片(钢或金片)构成(图 2-20)。其中覆盖基片底部的辐射金属片,称为接地板;而处在基片另一面的辐射金属片,其大小近似等于工作波长,称为辐射元。微带天线结构简单且坚固,可用于制作单频和双频收发天线,更适宜与振荡器、放大器、调制器、混频器、移相器等固体元件敷设在同一块介质基片上,使整机的体积和重量显著减少。这种天线主要缺点是增益较低,但可用低噪声前置放大器弥补。目前,大部分测量型 GPS 信号接收机用的都是微带天线,这种天线更适于安装在飞机、火箭等高速运动物体上。

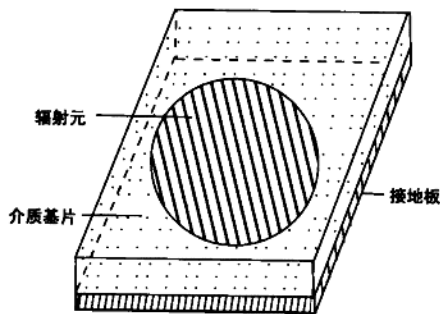


图 2-20 微带天线示意图

### 2.6.1.2 接收单元

GPS 信号接收机的接收单元主要由信号通道单元,存储单元,计算和显示控制单元,电源等四个部分组成。

(1) 信号通道。信号通道是接收单元的核心部分,由硬件和软件组合而成。每一个通道在某一时刻只能跟踪一颗卫星,当某颗卫星被锁定后,该卫星便占据这一通道直到信号失锁为止。因此,目前大部分接收机均采用并行多通道技术,可同时接收多颗卫星信号。对于不同类型的接收机,信号通道的数目也由 1 到 12 不等。现在一些厂家已推出可同时接收 GPS 卫星和 GLONASS 卫星信号的接收机,其信号通道多达 24 个。信号通道有平方型、码相位型和相关型等三种不同类型,它们分别采用不同的解调技术,下面我们作简单的介绍。

平方型通道采用 2.4.3 中介绍的平方解调技术。假定,接收机收到的卫星信号分量为:

$$f(t) = c(t)\cos(\omega t + \varphi_0) \tag{2-15}$$

平方后得

$$f^2(t) = c^2(t)\cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

式中: $c(t)$ 为调制码振幅,其值为+1 或-1,平方后有 $c^2(t)=1$ 。于是有

$$f^2(t) = [1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_0)]/2 \tag{2-16}$$

这说明接收到的卫星信号经平方后,调制码信号(C/A 码、P 码和数据码)完全被消除,而得到

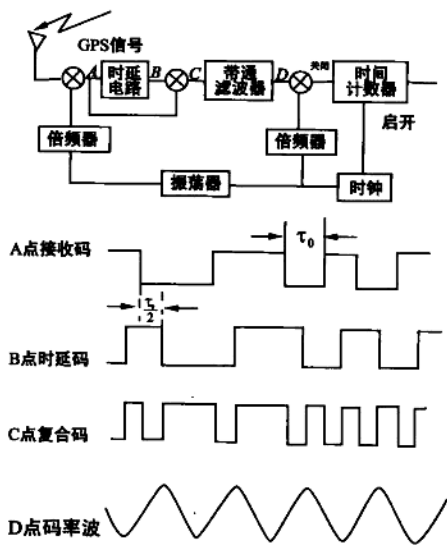


图 2-21 码相位通道示意图

频率为原载波频率 2 倍的纯载波信号(称为重建载波),利用该信号便可进行精密的载波相位测量。平方型通道的优点是,无需掌握测距码(C/A 码、P 码)的结构便能获得载波信号。但是平方型通道也完全消除了信号的测距码和数据码,从而无法检译出 GPS 卫星信号中的导航电文。

码相位型通道所得到的信号不是重建载波,而是一种所谓码率正弦波(图 2-21)。它是由从 A 点输入接收码(C/A 码或 P 码)乘以延迟了  $1/2$  码元宽度的时延码而得到。码相位测量是依靠时间计数器实现的。时间计数器由接收机时钟的秒脉冲启动,并开始计数,当码率正弦波的正向过零点时关闭计数器。开关计数器的时间之差,相应于码率正弦波中不足一整周的小数部分。而码相位的整周数仍为未知,还需利用其他方法解算。C/A 码的码元宽度(码相位)为 293.052 m,相当于 977.517 ns;P 码的码元宽度为 29.305 m,相当于 97.752 ns。码相位通道测定站星距离中不足一个码元宽度的小数部分,而站星距离究竟是 C/A 码或 P 码码元宽度的多少倍,通常可用多普勒测量予以解决。码相位通道的优点是,用户无需知道伪噪声码的结构即可进行 C/A 码和 P 码的相位测量,这对 GPS 非特许用户有很大的好处。码相位通道的缺点和平方型通道一样,需要另外提供 GPS 卫星星历,用以作测后数据处理。

相关型通道广泛用于现代各种 GPS 信号接收机。它可以从伪噪声码信号中提取导航电文,实现运动载体的实时定位。相关型通道主要由 2.4.3 中介绍的伪噪声码跟踪环路和载波跟踪环路两大部分组成。伪噪声码跟踪环路用于从 C/A 码或 P 码中提取伪距观测量,并通过对卫星信号的解调,获取仅含导航电文和载波的解扩信号。载波跟踪环路的主要作用是,根据已除去测距码的解扩信号实现载波相位测量,并解调出导航电文(数据码)。相关型通道的主要优点是,可以同时进行伪距和载波相位测量,并可获取导航电文。此外,它还具有良好的信噪比,因此为 GPS 接收机所普遍采用。当然相关型通道也有缺点,即就要求用户必须掌握伪随机噪声码的结构,以便接收机产生复制码信号。但是由于美国政府实施 SA 技术,非特许用户不能解译 P 码,也就无法用码相关技术获得  $L_2$  载波的观测量。为了获得  $L_2$  载波的相位观测量,尚需补充其他技术。

(2) 存储单元。GPS 信号接收机内都设有存储器以存贮所解译的 GPS 卫星星历,伪距观测量和载波相位观测量,以及各种测站信息数据。在 1988 年以前,许多接收机都采用盒式磁带记录器,例如 WM101GPS 信号接收机,就是采用带有时间标识符的每英寸 800 bit 的记录磁带。而目前大多数接收机采用内装式半导体存储器,简称内存,内存的容量有 1 Mbit 到 8 Mbit 不等。也有厂家采用磁卡作为存储器,如 Ashtech Z-12 97 款 GPS 信号接收机,就配备了 2~85 Mbit 内存卡供选用。保存在接收机内存中的数据可以通过数据传输接口输入到微机内,以

便保存和处理观测数据,在存贮器内通常还装有多种工作软件,如:自测试软件;天空卫星预报软件;导航电文解码软件;GPS 单点定位软件等。

(3) 计算和显示控制单元。计算和显示控制单元,由微处理器和显示器构成。

微处理器是 GPS 信号接收机的控制系统, GPS 接收机的一切工作都在微处理器的指令控制下自动完成。其主要工作任务是:

① 在接收机开机后立即对各个通道进行自检,并显示自检结果,测定、校正和储存各个通道的时延值。

② 根据各通道跟踪环路所输出的数据码,解译出 GPS 卫星星历,并根据实际测量得到的 GPS 信号到达接收机天线的传播时间,计算出测站的三维地心坐标(WGS—84 坐标系),并按预置的位置更新率不断更新测站坐标。

③ 根据已测得的测站点近似坐标和 GPS 卫星历书,计算所有在轨卫星的升降时间、方位和高度角。

④ 记录用户输入的测站信息,如:测站名、天线高、气象参数等。

⑤ 根据预先设置的航路点坐标和测得的测站点近似坐标计算导航参数,如:航偏距、航偏角、航行速度等。

GPS 信号接收机一般都配备液晶显示屏向用户提供接收机工作状态信息,并配备控制键盘,用户可通过键盘控制接收机工作。某些导航型接收机,还配有大显示屏,直接显示导航信息甚至导航数字地图。

(4) 电源。GPS 信号接收机一般采用蓄电池作电源,机内往往配备锂电池,用于为 RAM 存贮器供电,以防止关机后数据丢失。机外另配外接电源,通常为可充电的 12V 直流镉镍电池,也可采用普通汽车电瓶。

## 2.6.2 GPS 信号接收机分类

GPS 信号接收机可按接收机工作原理、用途、接收机接收的卫星信号频率、信号通道数目分成许多不同的类型,现介绍如下:

### 2.6.2.1 根据接收机的工作原理分类

根据接收机的工作原理,接收机可分为:码相关型接收机;平方型接收机;混合型接收机。

码相关型接收机采用码相关技术测定伪距观测量。这类接收机要求知道伪随机噪声码的结构,由于 P 码对非特许用户保密,所以这类接收机又分为 C/A 码接收机和 P 码接收机。C/A 码接收机供一般用户使用,P 码接收机专供特许用户应用。目前国内销售的导航型接收机都是 C/A 码接收机。

平方型接收机是利用载波信号的平方技术去掉调制信号获取载波信号的,并通过计算机内产生的载波信号与接收到的载波信号间的相位差测定伪距。这类接收机无需知道测距码的结构,所以又称为无码接收机。

混合型接收则要综合以上两类接收机的优点,既可获取码相位伪距,又可测定载波相位观

测量。目前大部分测量型接收机都属于这种类型。

### 2.6.2.2 根据接收机的用途分类

GPS 信号接收机按其用途可以分为:导航型;测量型;授时型。

(1) 导航型接收机可以确定船舶、车辆、飞机和导弹等运动载体的实时位置和速度,主要用于导航,即保障上述运动载体按预定的路线航行。这种接收机都是采用 C/A 码伪距单点实时定位,精度较低(25~100 m)。但它的结构简单,操作方便,价格便宜,应用十分广泛。导航型接收机又可分为:低动态型,中动态型,高动态型 3 种。低动态型主要是指车载和船载导航型接收机;中动态型是指用于飞行速度低于 400 km/h 的民用机载接收机;而高动态型则是指用于飞行速度大于 400 km/h 的飞机、导弹的机载接收机,拥有这类接收机的用户往往为特许用户,可利用 P 码,因此定位精度较高,可达±2 m 左右。

(2) 测量型 GPS 信号接收机早期主要用于大地测量和工程控制测量,一般均采用载波相位观测量进行相对定位,通常定位精度可在厘米级甚至更高。近年来测量型接收机在技术上取得了重大进展,开发出实时差分动态定位(RTD GPS—Real Time Differential GPS)技术和实时相位差分动态定位(RTK GPS—Real Time Kinematic)技术。前者以伪距观测量为基础,可实时提供流动测站米级精度的坐标;后者以载波相位观测量为基础,可实时提供流动测站厘米级精度的坐标。RTD 主要用于精密导航和海上定位;RTK 则主要用于精密导航、工程测量、三维动态放样、一步法成图等许多方面,并成为地理信息系统采集数据的重要手段。一些 GPS 信号接收机制造厂家,也都纷纷推出具有 RTD 或者 RTK 功能的 GPS 信号接收机。某些测量型接收机,也可以升级 RTD 功能或者 RTK 功能。更有一些生产厂家,把具有 RTK 功能的 GPS 信号接收机,称 GPS 全站仪。测量型 GPS 信号接收机结构复杂,通常配备有功能完善的数据处理软件,因此其价格也比较昂贵。

(3) 授时型接收机主要用于天文台或地面监控站进行时间频标的同步测定。

### 2.6.2.3 根据接收机接收的卫星信号频率分类

根据接收机接收的卫星信号频率,接收机可分为单频接收机和双频接收机两种不同的类型。

(1) 单频接收机只能接收  $L_1$  载波信号。虽然可利用导航电文提供的参数,对观测量进行电离层影响的改正,但是由于电离层改正模型目前尚不完善,影响定位精度。因此,单频接收机通常用于基线较短的精密定位和导航,以便构成双差模型时可以有效地消除电离层影响。应用单频机测量的基线长度,一般不宜超过 15 km。

(2) 双频接收机可以同时接收  $L_1$  和  $L_2$  载波信号,这样应用双频技术即可有效消除电离层影响,又可提高定位精度。双频接收机可用于长达几千公里的精密定位,其价格也比单频机贵得多。

### 2.6.2.4 根据接收机的通道数目分类

根据接收机的通道数目,接收机可分为多通道接收机、序贯通道接收机、多路复用通道接收机等不同类型。

(1) 多通道接收机具有多个卫星信号通道,而每个信号通道只连续跟踪一颗卫星信号。来

自天空中不同卫星的信号,分别在不同的通道中处理、测量获得不同卫星信号的观测量。国内常见 GPS 信号接收机中,Ashtech 系列产品以及 Leica WILD 系列产品都是 12 通道接收机,而 Trimble 4000 系列接收机则为 9 通道接收机等。这种接收机的优点是可以对卫星进行连续跟踪,并可获得 GPS 卫星的广播星历。其缺点是由于通道多,所以价格高,并且通道之间有时延差。

(2) 序贯通道接收机只有一个通道。为了跟踪多颗卫星的信号,需在相应软件的控制下,按时序顺次对各颗卫星的信号进行跟踪和测量。由于顺序对各颗卫星测量一个循环所需时间较长(数秒钟),当对一颗卫星信号信号进行测量时,将丢失另外一些卫星信号的信息。所以,这类接收机对卫星信号的跟踪是不连续的,并且也不能获得完整的导航电文。为了获得导航电文,往往需要再设一个通道。序贯通道接收机结构简单,体积小,重量轻,在早期导航型接收机常被采用。

(3) 多路复用通道接收机,同样只设一二个通道,也是在相应软件控制下按顺序测量卫星信号。但它测量一个循环所需的时间要短得多,通常不超过 20 ms。因此可保持对 GPS 卫星信号的连续跟踪,并可同时获得多颗星的完整的导航电文。这类接收机的信噪比低于多通道接收机。

### 2.6.3 几种常见的测量型 GPS 信号接收机

目前国内常见的测量型 GPS 信号接收机,主要有美国 Ashtech 公司和 Trimble 公司,欧洲 Leica 公司,法国 Sercel 公司的系列产品。

#### 2.6.3.1 Ashtech GPS 信号接收机系列产品

美国 Ashtech 公司成立于 1987 年,主要从事制造和销售 GPS 信号接收机及其相关设备。1988 年 Ashtech 公司推出了第一台 Ashtech XII 型 GPS 信号接收机,由于该机设计新颖、技术先进、功能齐全和操作简便,因而获得国际宇航学会授予的最佳 GPS 产品奖。正式投放市场的 L 型接收机,包含了数据采集、固态存储器和各种显示功能,而后又改进为体积更小的 M 型接收机。1993 年 Ashtech 公司发明了 Z 跟踪技术,并获得专利。Z 跟踪技术可以在 SA 技术实施时减少其对定位精度的影响。目前,Ashtech 公司和 Magellan 公司合并继续生产各种测量型和导航型 GPS 信号接收机及其相关产品。除了早期生产的 LT 和 MT 单频机以及 LD 和 MD 双频机之外,Ashtech 近期的主要产品有:

Ashtech STEP1 GPS 信号接收机(图2-22)是一种经济、实用的单频测量型 GPS 信号接收机。该机为 12 通道全视野操作,可进行 C/A 码和  $L_1$  载波相位测量,具有 1 MB 固体内存(可扩展到 5 MB);工作温度:接收机为  $-20 \sim +55$  °C,天线为  $-30 \sim +70$  °C;电源:6~15 VDC;接收机重量:0.68 kg。STEP1 接收机提供一个后处理软件名称为 Ashadj,其静态定位精度,平面为  $5 \text{ mm} + 1 \times 10^{-6}$ ;垂直为  $1.7 \text{ cm} + 1.7 \times 10^{-6}$ ;方位为 0.15 弧秒 + 1.5/基线长(km)。由于操作简便,定位精度稳定,价格低廉,因而很受静态定位用户欢迎。该机可升级增加 RTD(实时差分定位)功能,定位精度优于 1 m。LOCUS 是 Ashtech 公司近期推出的新型号单频测量型

GPS 信号接收机,它采用接收机和天线一体化设计,采用内置电池和红外数据通讯技术,体积更小,功能和 STEP1 大致相同。其后处理软件称为 LOCUS PROCESSOR,图 2-23 即 LOCUS 接收机及其后处理软件界面。

Ashtech Z-12 双频 GPS 信号接收机是早期 MD-XII 双频测量型接收机的改进型号。该机采用 Z 跟踪专利技术,可削弱 SA 技术的影响。Z-12 同样为 12 通道全视野操作,可进行 C/A 码与  $L_1$ 、 $L_2$  全波长载波相位测量,其标称精度与 STEP1 相同。但 Z-12 是双频机,可利用双技术削弱信号的电离层传播误差。所以其实际定位精度要比



图 2-22 Ashtech STEP1 GPS 信号接收机

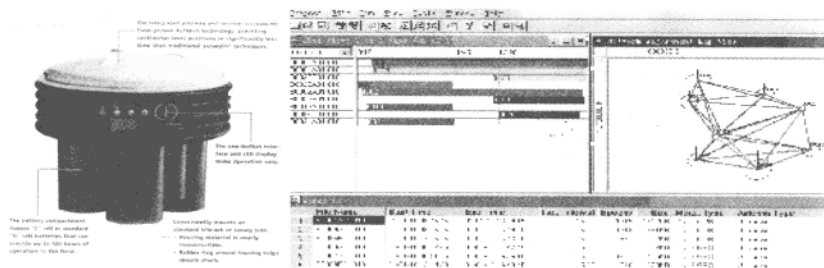


图 2-23 LOCUS GPS 信号接收机及后处理软件 LOCUS PROCESSOR

STEP1 高,适合进行远距离、长基线测量,基线长可扩展到上千公里。选配扼流圈天线可进一步削弱天线相位中心迁移对定位精度的影响,被广泛用于大地测量、地壳形变和灾害地质监测。



图 2-24 Ashtech Z-Xtreme 双频 GPS 信号接收机

Z-12 可升级成 RTD 和 RTK,进行实时差分动态定位和实时相位差分动态定位(图 2-24)。Ashtech 公司近期推出了 Z-12 的换代产品 Z-Xtreme(图 2-25),该仪器除了具有 Ashtech Z 跟踪技术外,还拥有 Ashtech Instant 技术,可在一瞬间捕获整周未知数,称为即时 RTK,可用于各种工程放样和地籍测量。Ashtech 系列产品中,还有一种单频 RTK 接收机,称为 GG24,具有 24 个通道,可同时接收美国 GPS 卫星和俄罗斯 GLONASS 卫星信号。

### 2.6.3.2 天宝 GPS 信号接收机系列产品

美国天宝导航公司以生产 Trimble GPS 信号接收机而闻名,该公司于 1978 年在美国加州成立,它生产的 4000 系列接收机在国内有一定的影响。以下介绍该公司近期生产的主要产品。



天宝 4600LS 单频接收机和前面介绍的 LOCUS 接收机一样,也是集天线、接收机、电池于一体的经济实用型 GPS 信号接收机。它具有 8 到 12 个通道,可接收测量 C/A 码和  $L_1$  载波全波相位,内装 1MB RAM 可记录 64 小时数据(假定 15 s 采样率跟踪 5 颗 GPS 卫星),工作温度  $-40\sim+65\text{ }^{\circ}\text{C}$ ;静态和快速静态定位精度:平面为  $5\text{ mm}+1\times 10^{-6}$ ;高程为  $10\text{ mm}+2\times 10^{-6}$ ;方位角为 1 弧秒 $+5$ /基线长度(km)。该仪器可升级成 RTD 和 RTK,进行实时差分动态定位和实时相位差分动态定位。



图 2-25 Ashtech Z-Xtreme RTK 流动站

4000SSI 是天宝公司推出的一种新型号的双频实时定位 GPS 信号接收机。它具有 9 个通道,可接收测量 C/A 码和  $L_1$  与  $L_2$  全波载波相位,内存从 1 MB 起可扩展至 80 MB,工作温度:  $-20\sim+55\text{ }^{\circ}\text{C}$ 。该仪器在信号失锁后可自动重新初始化,并具有 Trimble 超跟踪技术可捕获、跟踪、锁定微弱的卫星信号,对高压天线、无线电波也有较好的抗干扰能力。实时定位精度:平面  $1\text{ cm}+2\times 10^{-6}$ ;高程  $2\text{ cm}+2\times 10^{-6}$ ;作用距离:10 km(图 2-26)。天宝公司的最新产品是双频 GPS5700 全站仪(图 2-26),该仪器配备 eRTK 测杆无线电天线,可扩大 RTK 信号的覆盖范围,其控制器软件采用中文界面。图 2-27 是天宝 GPS5700 全站仪的流动站。



图 2-26 天宝双频 GPS5700 全站仪



图 2-27 天宝双频 GPS5700 全站仪流动站

### 2.6.3.3 Leica Wild GPS 信号接收机系列产品

Leica 公司是一大型国际集团公司,由瑞士 Wild 公司、美国 Magnavox 公司、德国 Leitz 公司、瑞士 Kern 公司、美国 Cambridge 公司等合并组成。它的前身是 WM 卫星测量公司,该公司由 Wild 和 Magnavox 两公司合开办,并于 1984 年底生产出 WM101 型单频 GPS 信号接收机,不久又推出 WM102 型双频 GPS 信号接收机。Leica 公司成立后于 1991 年下半年推出 WM 型

接收机的更新产品 Wild 200 GPS 测量系统。该仪器不仅设计新颖、体积小、重量轻,而且具有功能强大的后处理软件 SKI。该软件较早采用了解算整周待定值的快速逼近技术,开发出快速静态相对定位作业模式。1995 年 Leica 公司又进一步推出新型号: Wild 300 GPS 测量系统,并开发实时动态定位(RTK)功能,供 Wild 200/300 GPS 测量系统的用户选用。Leica 产品通常由天线、传感器、无线电信号调制解调器、控制器、电源等部分组成,近期推出的 Wild 530 GPS

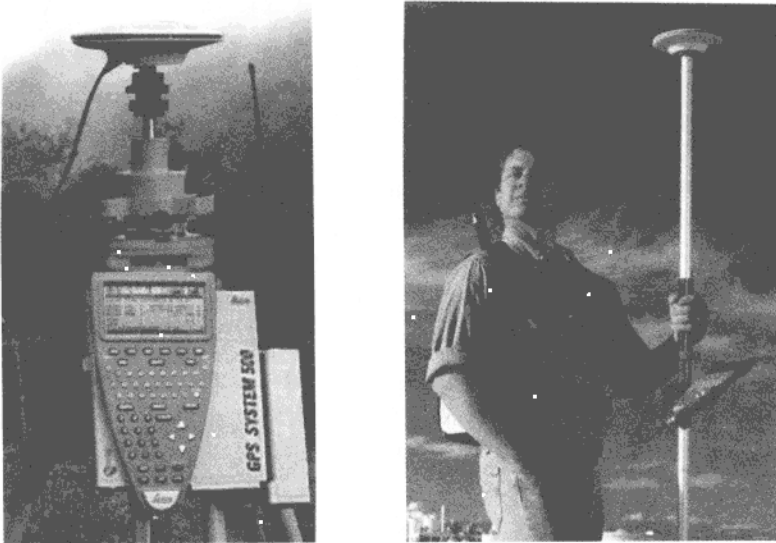


图 2-28 Leica Wild 530 GPS 测量系统

测量系统采用新研制的 SR9500 传感器,具有 12 个通道,可进行窄相关 C/A 码伪距和  $L_1$ 、 $L_2$  全波长载波相位测量(图 2-28)。Leica 的一项专利技术是 P 码辅助跟踪技术,该技术比经典的相关接收技术高出 13 db 的信噪比。Wild 530 GPS 系统的工作环境温度为:  $-20 \sim +60 \text{ }^\circ\text{C}$ ; 定位精度同样为  $5 \text{ mm} + 1 \times 10^{-6}$ 。

#### 2.6.3.4 Sercel 产品

法国 Dassault Sercel Navigation Positioning 于 1996 年成立,生产测量型和导航型 GPS 信号接收机。其中 SCORPIO 6000 用于陆上精密测量,包括单频和双频系统; AQUARIUS 5000 系列用于海上精密测量。这两种 Sercel 产品均为 28 通道多星系接收机,称为 GNSS(图 2-29)。RTK 工作

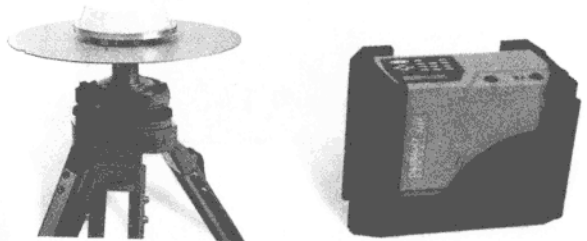


图 2-29 GNSS 接收机

半径可达 40 km, 仅需观测 4 颗卫星就可完成初始化。定位精度: 快速静态  $5 \text{ mm} + 1 \times 10^{-6}$  (15 km 范围); 动态后处理优于 2 cm (50 km 范围)。

### 思 考 题

- [1] 名词解释:码;码元(比特);数码率;自相关系数;信号调制;信号解调;SA 技术。
- [2] 试说明什么是随机噪声码? 什么是伪随机噪声码?
- [3] C/A 码和 P 码是怎样产生的?
- [4] 试述 C/A 码和 P 码的特点。
- [5] 试述伪随机噪声码测距原理。
- [6] 试述导航电文的组成格式。
- [7] 名词解释:遥测字;交接字;数据龄期;时延差改正;传输参数。
- [8] 简述导航电文数据块 I 的主要内容。
- [9] 什么是预报星历? 什么是后处理星历?
- [10] 试通过图表说明 GPS 信号是怎样构成的?
- [11] 试写出调制后的 GPS 信号表达式。
- [12] 绘图说明载波与测距码信号调制的原理。
- [13] 试述 GPS 接收机的硬件和软件。
- [14] 试述 GPS 接收机的分类。

# 第 3 章

## GPS 静态定位原理

### 3.1 GPS 定位方法分类及其误差源

#### 3.1.1 GPS 定位方法分类

应用 GPS 卫星信号进行定位的方法,可以按照用户接收机天线在测量中所处的状态,或者按照参考点的位置,分为以下几种:

##### 3.1.1.1 静态定位和动态定位

如果在定位过程中,用户接收机天线处于静止状态,或者更明确地说,待定点在协议地球坐标系中的位置,被认为是固定不动的,那么确定这些待定点位置的定位测量就称为静态定位。由于地球本身在运动,因此严格地说,接收机天线的所谓静止状态,是指相对周围的固定点天线位置没有可觉察的变化,或者变化非常缓慢,以致在观测期内觉察不出而可以忽略。

在进行静态定位时,由于待定点位置固定不动,因此可通过大量重复观测提高定位精度。正是由于这一原因,静态定位在大地测量、工程测量、地球动力学研究和大面积地壳形变监测中,获得了广泛的应用。随着快速解算整周待估值技术的出现,快速静态定位技术已在实际工作中使用,静态定位作业时间大为减少,从而在地形测量和一般工程测量领域内也将获得广泛的应用。

相反,如果在定位过程中,用户接收机天线处在运动状态,这时待定点位置将随时间变化。确定这些运动着的待定点的位置,称为动态定位。例如,为了确定车辆、船舰、飞机和航天器运行的实时位置,就可以在这些运动着的载体上安置 GPS 信号接收机,采用动态定位方法获得接收机天线的实时位置。

##### 3.1.1.2 绝对定位和相对定位

根据参考点的不同位置,GPS 定位测量又可分为绝对定位和相对定位。

绝对定位是以地球质心为参考点,确定接收机天线(即待定点)在协议地球坐标系中的绝对位置。由于定位作业仅需使用一台接收机工作,所以又称为单点定位。

单点定位外业工作和数据处理都比较简单,但其定位结果受卫星星历误差和信号传播误

差影响较显著,所以定位精度较低。这种定位方法,适用于低精度测量领域,例如船只、飞机的导航,海洋捕鱼,地质调查等。

如果选择地面某个固定点为参考点,确定接收机天线相对参考点的位置,则称为相对定位。由于相对定位至少使用两台以上接收机,同步跟踪 4 颗以上 GPS 卫星,因此相对定位所获得的观测量具有相关性,并且观测量中所包含的误差也同样具有相关性。采用适当的数学模型,即可消除或者消弱观测量所包含的误差,使定位结果达到相当高的精度。

相对定位既可作静态定位,也可作动态定位,其结果是获得各个待定点之间的基线向量,即三维坐标差: $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 。目前,静态相对定位由于其精度可达 $10^{-6} \sim 10^{-8}$ ,所以仍旧是精密定位的基本模式。随着整周待定值快速逼近技术所取得的突破性进展,快速静态相对定位方法目前已被采用,并且已在某些应用领域内取代传统的静态相对定位方法。此外,还有一种准动态相对定位作业模式,它也是一种快速定位技术,但定位精度不如快速静态相对定位高。

在动态相对定位技术中,差分定位即所谓 DGPS 定位(Differential Global Positioning System)受到了普遍重视。在进行 DGPS 定位时,一台接收机被安置在参考点上固定不动,其余接收机则分别安置在需要定位的运动载体上。固定接收机和流动接收机可分别跟踪 4 颗以上 GPS 卫星的信号,并以伪距作为观测量。根据参考点的已知坐标,可计算出定位结果的坐标改正数或距离改正数,并可通过数据传输电台(数据链)发射给流动用户,以改进流动站定位结果的精度。

DGPS 是建立在 C/A 码伪距测量基础上的一种实时定位技术,其定位精度为米级,主要用于导航、地质勘探、水深和水下地形测量等精度要求不太高的测量项目。近期开发的一种实时动态定位技术称为 RTK(Real Time Kinematic)GPS 测量,采用了载波相位观测量作为基本观测量,能够达到厘米级的定位精度。在 RTK GPS 测量作业模式下,位于参考站的 GPS 接收机,通过数据链将参考点的已知坐标和载波相位观测量一起传输给位于流动站的 GPS 接收机,流动站的 GPS 接收机根据参考站传递的定位信息和自己的测量成果,组成差分模型并进行基线向量的实时解算,可获得厘米级精度的定位结果(图 3-1)。RTK GPS 测量极大地提高

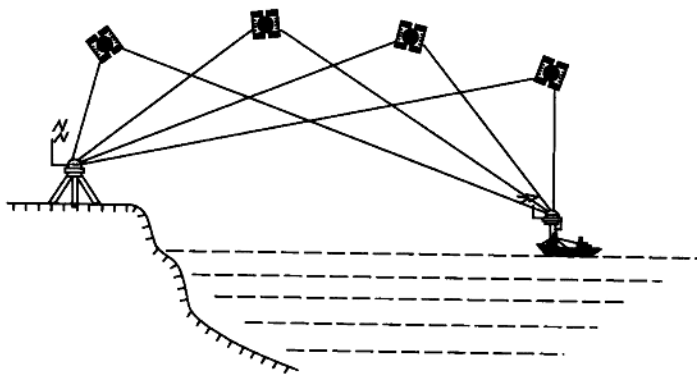


图 3-1 RTK GPS 定位

了GPS测量的工作效率,特别适用于各类工程测量以及各种用途的大比例尺测图或GIS数据采集,为GPS测量开拓了更广阔的应用前景。

### 3.1.2 GPS测量误差概述

正如其他测量工作一样,GPS测量同样不可避免地会受到测量误差的干扰。按误差性质来讲,影响GPS测量精度的误差主要是系统误差和偶然误差,其中,系统误差的影响又远大于偶然误差,相比之下,后者甚至可以忽略不计。从误差来源分析,GPS测量误差大体上又可分为以下三类。

#### 3.1.2.1 与GPS卫星有关的误差

这类误差主要包括卫星星历误差和卫星钟误差,两者都是系统误差。在GPS测量作业中,可通过一定的方法消除或者削弱其影响,也可采用某种数学模型对其进行改正。

#### 3.1.2.2 与GPS卫星信号传播有关的误差

GPS卫星发射的信号,需穿过地球上空电离层和对流层才能到达地面。当信号通过电离层和对流层时,由于传播速度发生变化而产生时延,使测量结果产生系统误差,称为GPS信号的电离层折射误差和对流层折射误差。在GPS测量作业中,同样可通过一定的方法消除或者削弱其影响,也可通过观测气象元素并采用一定的数学模型对其进行改正。

当卫星信号到达地面时,往往受到某些物体表面反射,使接收机收到的信号不单纯是直接来自卫星的信号,而包含了一部分反射信号,从而产生信号的多路径误差。多路径误差取决于测站周围的环境,具有随机性质,是一种偶然误差。

#### 3.1.2.3 与GPS信号接收机有关的误差

这类误差包括接收机的分辨率误差、接收机的时钟误差以及接收机天线相位中心的位置偏差。

接收机的分辨率误差也就GPS测量的观测误差,具有随机性质,是一种偶然误差,通过增加观测可以明显减弱其影响。接收机时钟误差,是指接收机内部安装的高精度石英钟的钟面时间相对GPS标准时间的偏差。这项误差与卫星钟误差一样属于系统误差,并且一般比卫星钟误差大,同样可通过一定的方法消除或削弱。在进行GPS定位测量时,是以接收机天线相位中心代表接收机位置的。理论上讲,天线相位中心与天线几何中心应当一致,但事实上天线相位中心随着信号强度和输入方向的不同而变化,使天线相位中心偏离天线几何中心而产生定位系统误差。

GPS定位测量除开上述三种主要误差源以外,还受到其他一些误差来源的影响。其中,最主要的是地球自转影响和相对论效应。

卫星在协议地球坐标系中的瞬间位置,是根据信号发播的瞬间时刻计算的,当信号到达测站时,由于地球自转影响,卫星在上述瞬间的位置也产生了相应的旋转变换。因此,对于卫星瞬

时位置,应加地球自转改正。

根据相对论原理,处在不同运动速度中的时钟振荡器会产生频率偏移,而引力位不同的时钟振荡器会产生引力频移现象。在进行 GPS 定位测量时,由于卫星钟和接收机钟所处的状态不同,即它们的运动速度和引力位不同,因此卫星钟和接收机钟就会由于相对论原因而产生相对钟差,称为相对论效应。

### 3.1.3 卫星星历误差

卫星星历误差是指卫星星历给出的卫星空间位置与卫星实际位置间的偏差,由于卫星空间位置是由地面监控系统根据卫星测轨结果计算求得的,所以又称为卫星的轨道误差。

估计和处理卫星的轨道误差一般比较困难,原因是卫星在运行中要受到多种摄动力的复杂影响,而地面监控系统又很难确切掌握这些作用力的变化规律。广播星历的早期精度是 20~50 m,目前随着摄动力模型和定轨技术不断完善已可达 5~10 m。在美国政府实行 SA 技术期间,对于只能接受标准定位服务的 SPS 用户,仅能使用调制在 C/A 码上的包含人工误差的低精度广播星历,星历误差达 50~100 m。只有 PPS 用户特许可解释 Y 码,获得调制在 P 码上的未经人工干预的原始广播星历。因此,对于广大 SPS 用户来讲,星历误差是严重影响定位精度的重要误差源之一。

在 GPS 定位测量中,卫星作为空间动态已知点,卫星星历作为已知起算数据。因此,星历误差是一种起算数据误差,它必将以某种方式传递给测站坐标,产生定位误差。在 GPS 绝对定位中,星历误差对测站坐标的影响,估计为几十米到一百米。由于在某一时间段内,卫星星历误差有很强的相关性,所以在 GPS 相对定位中,可以利用两个相邻测站上星历误差的相关性,采用相位观测量求差的方法消除、削弱星历误差的影响,从而获得高精度的定位结果。所以,卫星星历误差对相对定位的影响,远小于它对绝对定位的影响。通常采用下式估计星历误差对于相对定位的影响。

$$\frac{1}{10} \frac{dp}{p} < \frac{dB}{B} < \frac{1}{4} \frac{dp}{p} \quad (3-1)$$

式中: $p$  为卫星至测站的几何距离; $dp$  为卫星星历误差; $B$  为基线向量长度; $dB$  为由卫星星历误差引起的基线向量测量误差。

在实施 SA 技术后,广播星历的星历误差一般可达 100 m,卫星飞行高度以 20 000 km 计算,基线向量相对误差  $dB/B$  在  $(1.25 \sim 0.1) \times 10^{-6}$  之间。略为保守一点估计,广播星历对 GPS 相对定位的影响,即由此引起的基线向量相对误差  $dB/B \approx 1 \times 10^{-6}$ 。这一精度可满足大部分测量工程的要求,但是随着基线向量长度的增加,卫星星历误差的影响仍非常显著。因此,对于一些长距离(边长为几百公里,甚至上千公里)、高精度的 GPS 测量,需应用精密星历。目前,采用美国国家大地测量局(NGS)提供的精密星历,GPS 相对定位精度可提高到  $(0.1 \sim 0.04) \times 10^{-6}$ ,可满足监测地壳运动、建立国家控制网等远距离、高精度的测量要求。

在 GPS 测量中,根据不同情况,可采用以下三种方法处理星历误差。

### 3.1.3.1 建立我国自己的卫星跟踪网独立定轨

建立我国自己的 GPS 卫星跟踪网,进行独立定轨,对于确保导航和实时定位的可靠性与精度具有很大的意义。这项措施可以保证我国 GPS 用户不受美国政府 SA 政策的影响,向实时动态定位用户提供无人工干涉的预报星历,向静态定位用户提供后处理精密星历。我国 GPS 研究工作者在 1988 年就提出了以国内 VLBI/SLR 站为基础的测轨网建站方案,并在上海、长春、乌鲁木齐、昆明和西安等地建立了测轨站。目前,测轨网已初步形成,GPS 定轨软件经多年努力也已比较完善,定轨精度已达 3 m 左右。今后进一步研究的重点是加强测轨网建设,提高数据通信能力和精密星历计算能力,实现向有关用户提供精密星历服务的目标。

### 3.1.3.2 采用轨道改进技术

这一技术的基本思路,就是把卫星星历给出的卫星位置当作未知参数纳入平差模型,通过平差计算,同时求出测站位置及卫星轨道偏差改正数。常用的轨道改进技术有短弧法和半短弧法,这两种方法的共同思路是:考虑卫星轨道上的一段短弧,如何通过一定的数学方法,由它的初始位置逼近其真实位置。两者的具体作法和特点如下:

(1) 短弧法。将 6 个轨道参数的初始值全部纳入平差模型作为待估参数,在数据处理时与测站坐标等其他待估参数一并求解。短弧法可有效地削弱轨道偏差的影响,明显地提高定位精度,但计算工作量较大。

(2) 半短弧法。仅将受摄动力影响较大的轨道参数初始值纳入平差模型,通常是以轨道的切向、法向和径向三个改正数作待估参数,与测站坐标一并求解。半短弧法计算工作量较短弧法明显减少,而同样可明显削弱轨道偏差的影响。据报道,经半短弧法修正后的卫星轨道偏差将小于 10 m。

轨道改进技术具有一定的局限性,其一,测区应有一定的规模,不宜过小;其二,数据处理复杂,计算工作量大,要求计算机和计算作业人员均有较高的素质。因此,很难在一般作业单位推广应用。

### 3.1.3.3 采用相对定位方法

根据星历误差对距离不太远的两个测站的影响基本相同的特点,采用在两个或多个测站上观测同一颗卫星所得同步观测量求差的方法,可消除大部分星历误差的影响,明显提高定位精度。这一方法简便而效果显著,因而被广泛采用。

### 3.1.4 时钟误差

由于卫星的空间位置是随时间变化的,所以 GPS 测量是以精密测时为基础的。信号由卫星到达地面的传播时间乘以光速就等于站星间的几何距离。可见,GPS 测量的精度与时钟误差密切相关。所谓时钟误差是指卫星钟误差,以及接收机钟误差。

GPS 卫星均配备高精度的原子钟(铷钟和铯钟),其稳定度为  $10^{-13}$ ,运行 12 小时误差为



±4.3 ns, 相当距离误差±1.3 m。原子钟由地面主控站控制和调整,太空中外部环境对原子钟的工作也十分有利。尽管如此,卫星钟的钟面时与GPS时之间的误差,即卫星钟误差仍在1ms以内,而1ms钟差引起的等效距离误差是300 km,显然远远不能满足定位的精度要求。为了改正卫星钟的上述偏差,可以通过连续监测精确测定其运行状态参数,而将卫星钟钟面时在 $t$ 时刻的改正数表示为二阶多项式:

$$\Delta t = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 \quad (3-2)$$

式中: $t_0$ 为参考历元; $a_0$ 为卫星钟在 $t_0$ 时刻的钟差; $a_1$ 为卫星钟在 $t_0$ 时刻的钟速; $a_2$ 为卫星钟在 $t_0$ 时刻的钟速变化率。

$a_0, a_1, a_2$ 三个参数,由地面主控站根据前一段时间的跟踪资料与USNO(美国海军天文台)提供的标准GPS时推算,并通过导航电文传送给用户。经 $\Delta t$ 改正后的卫星钟误差约为20 ns左右,其等效距离误差为6 m。这个精度,对于导航来讲已经足够,对于大地测量来讲尚需通过相对定位数学模型进一步消除。

GPS信号接收机,一般设有高精度石英钟,其稳定度约为 $10^{-10}$ 。假定接收机钟与卫星钟之间有1 ns相对钟差,由此引起的等效距离误差为300 m。消除接收机钟差的方法,通常是接收机钟差改正数作为未知参数,在数据处理时与测站坐标一起解算。经过改正后的接收机钟与卫星钟的同步精度约为10~100 ns,这种方法主要用于实时动态定位。在静态绝对定位中,也可像处理卫星钟钟差那样,将接收机钟差表示成多项式,在数据处理时求出多项式的系数。这种方法的效果,取决于多项式模型的正确性。在静态相对定位中,可通过观测量求差的方法消除接收机钟差。在定位精度要求很高的测量中,还可采用高精度的外接频标(如铷原子钟和铯原子钟),提高接收机的测时精度。

### 3.1.5 卫星信号传播误差

卫星信号传播误差包括:信号穿过地球上空电离层和对流层时所产生的误差,以及信号到达地面时产生反射信号而引起的多路径干扰误差。以下对此分别进行讨论。

#### 3.1.5.1 电离层传播误差

电离层是指地球上空50~1000km之间的大气层。由于太阳光中的紫外线、 $x$ 射线和高能粒子的强烈辐射,大气分子被电离生成自由电子和正负离子,形成从宏观上说仍然是中性的等离子体区域,称为电离层。当电磁波信号穿过电离层时,信号的路径会产生弯曲,信号传播速度会发生变化。这时由信号传播时间乘以真空中的光速就不再等于卫星至测站间的距离。电离层对GPS信号传播的影响,在天顶方向距离差最大可达50 m,而接近地面方向则可达150 m。

电离层中的电子密度分布极不均匀,它随着高度、时间、季节和测站地理位置的不同而变化。图3-2描述了不同高度

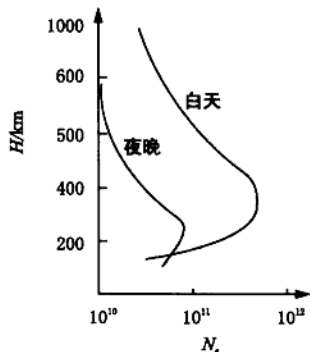


图3-2 不同高度处的电子密度

处的电子密度。该图说明 50 km 以下的大气分子不发生电离现象,而随着高度增加电离程度由弱到强,在离地面 200~400 km 处达到最大值。离地面 400 km 以上的高空,随着大气密度减少,电子密度也开始下降。电子密度和地方时有关,如果我们定义底面积为  $1 \text{ m}^2$  贯穿整个电离层的柱体内所含的电子数为电子含量,那么电子含量随地方时变化作周日变化的关系由图 3-3 表示。由于太阳辐射强度还随着季节变化而不断改变,所以电子含量也有周年变化。除此以外,电子含量还与测站的地理位置有关,图 3-4 指出了电子含量随纬度和经度变化的规律。

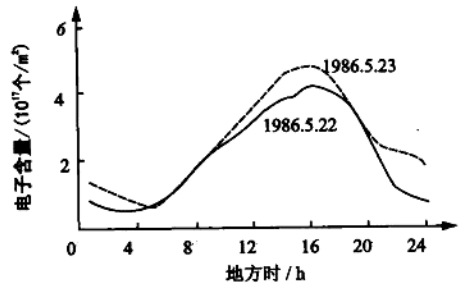


图 3-3 电子含量随地方时变化的规律<sup>[2]</sup>

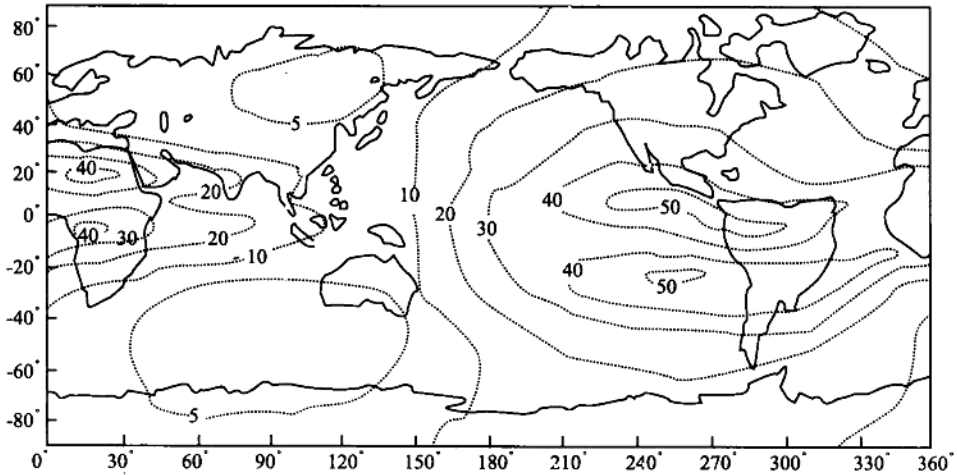


图 3-4 电子密度和测站地理位置的关系<sup>[2]</sup>

由上面的讨论可见,电离层的电子密度分布受到多种因素的制约,难以用数学模型精确描述电子密度变化的规律,这就给建立严格的电离层改正模型带来了困难。目前,改正电离层信号传播误差的方法有以下三种:

(1) 采用近似的电离层改正模型。

GPS 卫星信号通过导航电文向 GPS 单频信号接收机用户提供电离层改正模型。目前提供的模型,可使单频接收机用户的电离层时间延迟影响减少 75%。在电离层改正模型研究中,美国的克劳布歇(klobuchar)于 1987 年提出的电离层改正模型,具有计算方便、实用可靠、能有效改正电离层时间延迟影响等优点。以下略去复杂的推证过程,介绍克劳布歇电离层改正模型的计算过程。

图 3-5 中,P 为测站点,GPS 卫星与测站点 P 的连线与电离层顶面的交点 I' 称为穿刺点,而 I 为其足下点。据此,I'P 连线即为 GPS 卫星信号的传播路径,而 I'I 连线则是信号沿天顶

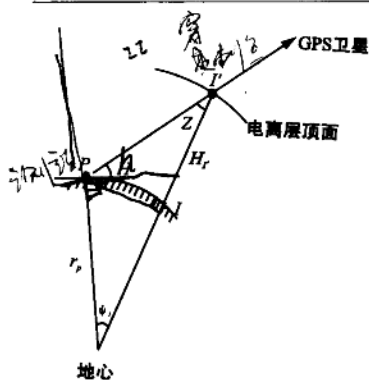


图 3-5 穿刺点示意图

方向的传播路径,两者之间的夹角用符号  $Z$  表示。如果记  $L_1$  载波沿信号传播路径  $I'P$  的电离层时间延迟为  $T_{L_1}$ , 而其沿天顶方向  $I'I$  的时间延迟为  $T'_{L_1}$ , 那么  $T_{L_1}$  与  $T'_{L_1}$  之间显然成立关系式:

$$T_{L_1} = \sec Z \cdot T'_{L_1} \quad (3-3)$$

式中  $Z = \arcsin[(r_p \cosh)/(r_p + H_r)]$  (3-4)

这里,  $r_p$  为测站点  $P$  的地心距;  $H_r$  为穿刺点  $I'$  的高度, 一般取  $350 \text{ km}$ ;  $h$  为相对于测站点  $P$  的卫星高度角。  $r_p$  和  $H_r$  以公里为单位,  $h$  和  $Z$  以度为单位。式(3-3)中,  $L_1$  载波沿天顶方向传播的时间延迟  $T'_{L_1}$  可按下式计算:

$$T'_{L_1} = 5 \times 10^{-9} + \left( \sum \alpha_n (\varphi_n/180)^n \right) \cdot \cos x \quad (3-5)$$

其中  $x = 2x(t - 50400) / \sum \beta_n (\varphi_M/180)^n$  (3-6)

$$t = t_l \cdot 3600 \quad (3-7)$$

$T'_{L_1}$  的具体计算过程如下:

首先计算测站点  $P$  至穿刺点的足下点  $I$  之间的地心角  $\psi_I$ :

$$\psi_I = 90^\circ - h - Z \quad (3-8)$$

第二步是计算  $I$  点的地理纬度  $\varphi_I$  与地理经度  $\lambda_I$  (图 3-4):

$$\varphi_I = \arcsin(\sin \varphi_p \cos \varphi + \cos \varphi_p \sin \varphi \cos A) \quad (3-9)$$

$$\lambda_I = \lambda_p + \arcsin(\sin \psi_I \sin A / \cos \varphi_I) \quad (3-10)$$

式中:  $A$  是测站点  $P$  至卫星下点的方位角;  $\varphi_p$  与  $\lambda_p$  是测站点  $P$  的地理纬度和经度。在完成式(3-9)与(3-10)的计算后, 第三步是将测站点  $P$  的地理纬度  $\varphi_p$  换算为地磁纬度  $\varphi_M$ , 计算公式为:

$$\sin \varphi_M = \sin \varphi_p \sin \varphi_N \cos \varphi_p \cos \varphi_N \cos(\lambda_p - \lambda_N) \quad (3-11)$$

式中:  $\varphi_N$  为地磁场北极的地理纬度,  $\varphi_N = 78.3^\circ \text{N}$  (地磁场北极的地理经度  $\lambda_N = 69^\circ \text{W}$ )。第四步是计算  $I$  点的地方时  $t_l$ :

$$t_l = (\lambda_I/15) + UTC \quad (3-12)$$

式中:  $\lambda_I$  以度为单位,  $UTC$  为收到卫星信号瞬间的协调世界时,  $UTC$  和  $t_l$  均以小时为单位。计算结果若  $t_l \geq 24 \text{ h}$ , 则应减去  $24 \text{ h}$ , 使  $t$  值满足不等式  $24 > t_l \geq 0$ 。上述四步计算全部完成后, 即可应用式(3-7)、(3-6)与(3-5)计算  $L_1$  载波沿天顶方向传播的时间延迟  $T'_{L_1}$ , 这时两个参数  $\alpha_n$  与  $\beta_n$  的值由导航电文提供。最后, 应用式(3-4)与(3-3)即可算出  $L_1$  载波沿信号传播路径的电离层时间延迟  $T_{L_1}$ 。

### (2) 应用双频技术改正电离层传播误差。

由于电离层的电子密度分布受到多种因素的制约, 单频机用户很难通过电离层改正模型完全消除电离层传播误差。然而, 对于双频机用户来说, 则可通过双频观测数据更有效地削弱 GPS 卫星信号的电离层传播误差。

载波信号作为一种频率单一的电磁波信号, 其传播速度通常以相速度  $v_p$  描述。而当载波

信号穿过电离层时,相应地产生相折射率  $n_p$ ,相速度  $v_p$  与相折射率  $n_p$  之间成立关系式:

$$v_p = \frac{c}{n_p} \quad (3-13)$$

式中: $c$  为真空中的光速。在理论上可证明,相折射率  $n_p$  与传播路径上的大气电子密度  $Ne$  成正比,而与载波频率平方成反比,即有:

$$n_p = 1 - 40.28Ne \cdot f^{-2} \quad (3-14)$$

据此就有相速度

$$v_p = c(1 - 40.28Ne \cdot f^{-2})^{-1}$$

上式以二项式级数展开,略去二阶微量后可得

$$v_p = c(1 + 40.28Ne \cdot f^{-2}) \quad (3-15)$$

而当进行伪距测量时,所采用的调制码信号则是由多种频率叠加而成的电磁波信号,称为群波,以群速度  $V_G$  传播。调制码信号通过电离层时,产生群折射率  $n_G$ ,其表达式为:

$$n_G = 1 + 40.28Ne \cdot f^{-2} \quad (3-16)$$

与此相应,群速度  $V_G$  的表达式为:

$$v_G = \frac{c}{n_G} = c(1 - 40.28Ne \cdot f^{-2}) \quad (3-17)$$

由于相折射率变化而引起的传播路径距离误差  $\delta\rho_p$  可写成:

$$\delta\rho_p = c \int_S (n_p - 1) ds \quad (3-18)$$

式中: $S$  为信号传播路径,顾及式(3-14)就有

$$\delta\rho_p = -40.28 \frac{c}{f^2} \int_S Ne ds$$

其中积分表示传播路径上的电子总量,若以符号  $N_\Sigma$  表示,即令:

$$N_\Sigma = \int_S Ne ds \quad (3-19)$$

则有

$$\delta\rho_p = -40.28 \frac{c}{f^2} N_\Sigma \quad (3-20)$$

同样,由群折射率引起的信号传播距离误差为

$$\delta\rho_G = 40.28 \frac{c}{f^2} N_\Sigma \quad (3-21)$$

对于双频机用户来说,可利用双频信号传播路径距离误差,求出电离层改正,纠正电离层延迟对测距和测相的影响。根据式(3-20)与(3-21),双频信号的电离层传播路径距离误差分别为:

$$\delta\rho_1 = -40.28 \frac{N_\Sigma}{f_1^2} \quad (3-22)$$

$$\delta\rho_2 = -40.28 \frac{N_\Sigma}{f_2^2} \quad (3-23)$$

式中: $f_1$  与  $f_2$  分别为载波  $L_1$  与  $L_2$  的频率。两式相除,可得

$$\delta\rho_2 = \delta\rho_1 \cdot \frac{f_1^2}{f_2^2}$$

设信号穿过电离层的传播路径为  $\rho_0$ , 则

$$\rho_0 = \rho_1 - \delta\rho_1 \quad (3-24)$$

于是有  $\rho_1 = \rho_0 + \delta\rho_1$      $\rho_2 = \rho_0 + \delta\rho_1 \cdot \frac{f_1^2}{f_2^2}$

令  $\delta\rho$  表示由  $L_1$  载波和  $L_2$  载波分别测定的  $\rho_1$  与  $\rho_2$  之差, 则

$$\delta\rho = \rho_1 - \rho_2 = \delta\rho_1 \left( \frac{f_2^2 - f_1^2}{f_2^2} \right)$$

由此, 求出距离误差

$$\delta\rho_1 = \delta\rho \cdot \left( \frac{f_2^2}{f_2^2 - f_1^2} \right) \quad (3-25)$$

由此, 代入(3-24)得

$$\rho_0 = \rho_1 - \delta\rho \cdot \left( \frac{f_2^2}{f_2^2 - f_1^2} \right) \quad (3-26)$$

对于 GPS 信号,  $f_1 = 1\,575.42$  MHz,  $f_2 = 1\,227.6$  MHz。因此, 有

$$\delta\rho_1 = -1.545\,73\delta\rho$$

所以

$$\rho_0 = \rho_1 + 1.545\,73\delta\rho \quad (3-27)$$

(3-27)表明, 双频机用户可通过由双频信号获得的  $\delta\rho$  改正所测的伪距, 求出信号穿过电离层的真实距离  $\rho_0$ 。

类似地, 利用双频信号观测数据也可以消除电离层折射对测量载波相位的影响。现略去推导, 仅给出结果。设  $\varphi_1$  与  $\varphi_2$  为两个载波的相位观测值,  $\delta\varphi_1$  与  $\delta\varphi_2$  为由电离层折射引起的测相误差, 而  $\varphi_1$  为消除电离层折射影响后的相位值, 则

$$\varphi_1 = \varphi_1 - \delta\varphi_1 \quad (3-28)$$

式中

$$\delta\varphi_1 = -1.545\,73(\varphi_1 - 1.283\,33\delta\varphi_2) \quad (3-29)$$

经过双频改正后, 伪距残差为厘米级。

### (3) 利用两个(或多个)测站的同步观测值求差。

当相邻测站间的距离较近时, 由于卫星信号到达不同测站的路径相近, 所经过的介质状况相似, 所以通过不同测站对相同卫星的同步观测值求差, 便可显著地减弱电离层折射影响, 其残差将不会超过  $1 \times 10^{-6}$ 。对于单频接收机用户来说, 这一方法的重要意义尤为明显。经验表明, 大约在 20 km 范围内, 利用同步观测值求差的方法都可以有效地削弱电离层折射影响。而当基线边长度大于 20 km 时, 采用上述双频技术则可较好地遏制由电离层折射带来的测距和测相精度损失。

#### 3.1.5.2 对流层传播误差

从地面起向上到距地面 40 km 的这一大气层称为对流层。电磁波在对流层中的传播速度与大气折射率和传播方向有关。由于对流层的介质对 GPS 信号没有弥散效应, 所以其群折射率与相折射率可认为相等。对流层折射对观测值的影响可分为干分量与湿分量两部分, 干分量主要与大气的温度与压力有关, 而湿分量主要与信号传播路径上的大气湿度和高度有关。当卫星处于天顶方向时, 对流层干分量对距离观测值的影响约占对流层影响的 90%, 且这种影响

可以应用地面的大气资料计算。若地面平均大气压为 1 013 mbar, 则在天顶方向干分量对所测距离的影响约为 2.3 m, 而当高度角为 10° 时其影响约为 20 m。湿分量的影响虽数值不大, 但由于很难可靠地确定信号传播路径上的大气物理参数, 所以湿分量尚无法准确地测定。因此, 当要求定位精度较高或基线较长时(例如 > 50 km), 它将成为误差的主要来源之一。

关于消除对流层折射的影响, 通常有如下三种处理方法:

(1) 应用对流层模型加以改正。即测定测站周围的气象元素, 代入对流层模型计算改正数, 这一方法可消除对流层传播误差的 92%~93%。

(2) 对流层影响的附加待估参数求解。引入描述对流层影响的附加待估参数, 在数据处理中一并求解。

(3) 同步观测值求差。与电离层的影响相类似, 当两观测站相距不太远时, 由于信号通过对流层的路径相近, 对流层的物理特性相似, 所以对同一卫星的同步观测值求差, 可以明显地减弱对流层折射的影响。因此, 这一方法在精密相对定位中应用非常成功。不过, 随着同步观测站之间距离的增大, 测区大气状况的相关性很快减弱, 这一方法的有效性也将随之降低。

### 3.1.5.3 多路径效应影响

所谓多路径效应, 是指接收机天线除直接收到卫星的信号外, 尚可能收到经天线周围物体反射的卫星信号(图 3-6)。两种信号叠加将会引起天线相位中心位置的变化。而这种变化随天线周围反射面的性质而异, 很难控制。多路径效应具有周期性特征, 其变化幅度可达数厘米。在同一地点, 当所测卫星的分布相似时, 多路径效应将会重复出现。

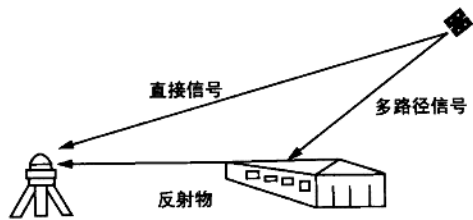


图 3-6 多路径效应

由图 3-7 可以估计多路径效应影响, 由

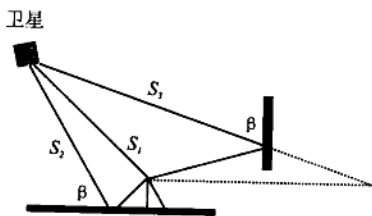


图 3-7 多路径效应的影响

卫星直接传送接收的信号和反射后接收的信号分别为

$$S_1 = A \cdot \cos \varphi$$

$$S_2 = \alpha A \cdot \cos(\varphi + \Delta\varphi) \quad (3-30)$$

式中:  $A$ 、 $\varphi$  表示信号的振幅与相位,  $\alpha$  为振幅衰减因子 ( $0 < \alpha < 1$ ),  $\Delta\varphi$  为多路径信号相位变化值, 两信号叠加时的信号为

$$S = S_1 + S_2 = A' \cdot \cos(\varphi + \theta) \quad (3-31)$$

其中  $A'$  为组合信号的振幅

$$A' = A(1 + 2\alpha \cos \varphi + \alpha^2)^{1/2} \quad (3-32)$$

而  $\theta$  为相位延迟

$$\theta = \tan^{-1} \left[ \frac{\alpha \sin \Delta\varphi}{1 + \alpha \cos \Delta\varphi} \right] \quad (3-33)$$

$$\Delta\varphi = \frac{4\pi h}{\lambda} \sin \beta \quad (3-34)$$

式中:  $\beta$  为入射角,  $h$  为天线到反射面的垂直距离, 则多路径误差为

$$S_{multi} = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{\lambda}{2\pi} \tan^{-1} \left[ \frac{\alpha \sin \Delta\varphi}{1 + \alpha \cos \Delta\varphi} \right] \quad (3-35)$$

当  $\alpha$  为常数,  $\Delta\varphi$  为  $\pm 90^\circ$  时, 多路径影响为最大, 约为  $\lambda/4 \approx 4.8 \text{ cm}$  (对载波相位)。

减弱多路径效应影响的主要办法有:

- (1) 仔细选择天线安置的位置, 避开较强的反射面。
- (2) 选择造型良好的(微带、扼流圈)天线并扩大天线盘, 使之带有抑径板。
- (3) 针对多路径误差的周期性, 采用较长观测时间的数据取平均值。

### 3.1.6 与接收设备有关的误差

在 GPS 定位测量中, 与用户接收设备有关的误差主要包括: 观测误差、接收机钟差、天线相位中心偏移误差。

#### 3.1.6.1 观测误差

观测误差, 主要是指仪器硬、软件对 GPS 信号的分辨率误差。根据经验, 一般认为分辨率误差约为信号波长的 1%。由此, 对 GPS 测距码信号和载波信号的观测精度将如表 3-1 所示:

表 3-1 观测误差表

信号	波长	观测误差
P 码	29.3 m	0.3 m
C/A 码	293 m	2.9 m
载波 L1	19.05 cm	2.0 mm
载波 L2	24.45 cm	2.5 mm

观测误差属偶然性质的误差, 适当增加观测测量将会明显地减弱其影响。除此之外, 观测误差尚包括接收机天线相对测站点的安置误差、天线整平与天线高量测误差。例如, 当天线高度为 1.6 m 时, 如果天线置平误差为  $0.1^\circ$ , 则由此引起光学对中器的对中误差约为 3 mm。因此, 在精密定位工作中必须仔细操作, 以尽量减小这种误差的影响。

#### 3.1.6.2 接收机钟差

GPS 接收机一般设有高精度的石英钟, 其稳定度约为  $10^{-6}$ 。如果接收机钟与卫星钟之间的同步差为  $1 \mu\text{s}$  ( $1 \times 10^{-6} \text{ s}$ ), 则由此引起的等效距离误差约为 300 m。

处理接收机钟差比较有效的方法, 是在每个观测站上引入钟差参数作为未知数, 在数据处理中与观测站的位置参数一并求解。这时如果假定在每一观测瞬间钟差都是独立的, 则处理较为简单。所以, 这一方法广泛应用于实时定位。在静态绝对定位中, 也可像卫星钟那样, 将接收机钟差表示为多项式的形式, 并在观测量的平差计算中求解多项式的系数。不过这将涉及到在构成钟差模型时, 对钟差特性所作假设的正确性。在定位精度要求较高时, 可以采取高精度的外接频标(即时间标准), 如铷原子钟或铯原子钟, 以提高接收机时间标准的精度。在精密相对定位中, 还可以利用观测值求差的方法有效地消除接收机钟差的影响。

#### 3.1.6.3 天线相位中心偏移误差

GPS 定位是以接收机天线相位中心为准的, 而天线对中则是以天线的几何中心为准的。从理论上讲, 接收机天线相位中心与天线的几何中心应完全一致, 但实际上接收机天线相位中

心随着信号输入的强度与方位不同而有变化,往往偏离天线的几何中心,这项误差称为天线相位中心偏移误差。天线相位中心偏移误差,可以给定位结果带来几毫米至几厘米的误差。在实际工作中,如果使用同一类型的天线,在相距不远的两个或多个观测站上同步观测了同一组卫星,那么,就可通过观测值求差的方法削弱天线相位中心偏移误差。不过,这时各观测站的天线均应按天线附有的方位标进行定向,使之根据罗盘指向磁北极。在高精度定位测量中,常用一种带有螺旋状结构的天线,称为扼流圈天线,它可以有效地消除天线相位中心偏移误差。

### 3.1.6.4 其他误差来源

GPS 定位除受到上述三类误差的影响外,还受到地球自转、相对论效应以及其他一些因素的影响。本书限于篇幅对此不作讨论,有兴趣的读者可参考有关文献。

## 3.2 静态绝对定位原理

静态绝对定位是在接收机天线处于静止状态下,确定测站的三维地心坐标。定位所依据的观测量,是根据码相关测距原理测定的卫星至测站间的伪距。由于定位仅需使用一台接收机,速度快,灵活方便,且无多值性问题等优点,广泛用于低精度测量和导航。本节介绍静态绝对定位原理,包括:伪距观测方程;伪距法绝对定位解;卫星的几何分布对绝对定位精度的影响等问题。

### 3.2.1 伪距观测方程及其线性化

为了建立伪距观测方程,引进如下符号:

$t^j$ (GPS)表示第  $j$  颗卫星发出信号瞬间的 GPS 标准时间; $t^j$  是相应的卫星钟钟面时刻; $t_i$ (GPS)表示接收机在第  $i$  个测站上收到卫星信号瞬间的 GPS 标准时间; $t_i$  是相应的接收机钟钟面时刻; $\delta t^j$  代表卫星钟钟面时相对 GPS 标准时间的钟差;而  $\delta t_i$  则是接收机钟钟面时相对 GPS 标准时间的钟差。

显然,卫星钟和接收机钟钟面时与 GPS 标准时间之间,存在如下关系:

$$t^j = t^j(\text{GPS}) + \delta t^j \tag{3-36}$$

$$t_i = t_i(\text{GPS}) + \delta t_i \tag{3-37}$$

由此,卫星信号由卫星到达测站的钟面传播时间:

$$\Delta t_i^j = t_i - t^j = t_i(\text{GPS}) - t^j(\text{GPS}) + \delta t_i - \delta t^j \tag{3-38}$$

如果不考虑大气折射影响,那么由钟面传播时间  $\Delta t_i^j$  乘以光速  $c$ ,即得卫星  $S^j$  至测站  $T_i$  间的伪距:

$$\tilde{D}_i^j = c\Delta t_i^j = c[t_i(\text{GPS}) - t^j(\text{GPS})] + c(\delta t_i - \delta t^j) \tag{3-39}$$

并且,引用记号  $D_i^j$  表示卫星  $S^j$  至测站  $T_i$  间的几何距离; $\delta t_i^j$  表示接收机钟与卫星钟的相对钟差,于是,显然有:



$$D_i^j = c[t_i(\text{GPS}) - t^j(\text{GPS})] \quad (3-40)$$

与

$$\delta t_i^j = \delta t_i - \delta t^j \quad (3-41)$$

以式(3-40)与(3-41)代入式(3-39)即得伪距表达式的简化形式:

$$\tilde{D}_i^j = D_i^j + c\delta t_i^j \quad (3-42)$$

式中第二项  $c\delta t_i^j$  表示接收机钟与卫星钟之相对钟差的等效距离误差。现顾及大气层折射影响, 则伪距观测方程可写成:

$$\tilde{D}_i^j(t) = D_i^j(t) + c\delta t_i^j + \delta I_i^j(t) + \delta T_i^j(t) \quad (3-43)$$

式中:  $\delta I_i^j(t)$  为  $t$  时刻电离层折射延迟的等效距离误差; 而  $\delta T_i^j(t)$  则为  $t$  时刻对流层折射延迟的等效距离误差。

式(3-43)中  $D_i^j(t)$  是非线性项, 表示测站与卫星之间的几何距离。显然有:

$$D_i^j(t) = [(X^j(t) - X_i)^2 + (Y^j(t) - Y_i)^2 + (Z^j(t) - Z_i)^2]^{1/2} \quad (3-44)$$

这里  $X^j(t), Y^j(t), Z^j(t)$  为  $t$  时刻卫星  $S^j$  的三维地心坐标,  $X_i, Y_i, Z_i$  则是测站  $T_i$  的三维地心坐标。如果设:

$$\left. \begin{aligned} X_i &= X_i^0 + \delta X_i \\ Y_i &= Y_i^0 + \delta Y_i \\ Z_i &= Z_i^0 + \delta Z_i \end{aligned} \right\} \quad (3-45)$$

式中:  $(X_i^0, Y_i^0, Z_i^0)$  为测站三维地心坐标的近似值, 并且如果视导航电文所提供的卫星瞬时坐标为固定值, 那么, 对  $D_i^j(t)$  以  $(X_i^0, Y_i^0, Z_i^0)$  为中心作 Taylor 展开取一次项后可得:

$$D_i^j(t) = (D_i^j(t))_0 + \left(\frac{\partial D_i^j(t)}{\partial X_i}\right)_0 \delta X_i + \left(\frac{\partial D_i^j(t)}{\partial Y_i}\right)_0 \delta Y_i + \left(\frac{\partial D_i^j(t)}{\partial Z_i}\right)_0 \delta Z_i$$

式中

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial D_i^j(t)}{\partial X_i}\right)_0 &= -\frac{1}{(D_i^j(t))_0} (X^j(t) - X_i^0) = -k_i^j(t) \\ \left(\frac{\partial D_i^j(t)}{\partial Y_i}\right)_0 &= -\frac{1}{(D_i^j(t))_0} (Y^j(t) - Y_i^0) = -l_i^j(t) \\ \left(\frac{\partial D_i^j(t)}{\partial Z_i}\right)_0 &= -\frac{1}{(D_i^j(t))_0} (Z^j(t) - Z_i^0) = -m_i^j(t) \end{aligned}$$

于是, 站星几何距离的线性化表达式为:

$$D_i^j(t) = (D_i^j(t))_0 - k_i^j(t)\delta X_i - l_i^j(t)\delta Y_i - m_i^j(t)\delta Z_i \quad (3-46)$$

而

$$(D_i^j(t))_0 = [(X_i^0(t) - X_i^0)^2 + (Y_i^0(t) - Y_i^0)^2 + (Z_i^0(t) - Z_i^0)^2]^{1/2} \quad (3-47)$$

为站星几何距离近似值。以式(3-46)代入式(3-43)后可得线性化的伪距观测方程:

$$\tilde{D}_i^j(t) = (D_i^j(t))_0 - k_i^j(t)\delta X_i - l_i^j(t)\delta Y_i - m_i^j(t)\delta Z_i + c\delta t_i^j + \delta I_i^j(t) + \delta T_i^j(t) \quad (3-48)$$

### 3.2.2 伪距法绝对定位解

在伪距观测方程(3-48)中, 含有三个测站未知数  $\delta X_i, \delta Y_i$  与  $\delta Z_i$ , 以及一个钟差未知数  $\delta t_i^j$ , 因此接收机至少要跟踪 4 颗 GPS 卫星, 才能组成 4 个伪距观测方程, 由此解算出测站  $T_i$

的三维地心坐标(图 3-8)。

现假定电离层和对流层延迟等效距离误差已通过适当的数学模型求出, 据此, 在式(3-48)中可令:

$$\tilde{R}_i^j(t) = \tilde{D}_i^j(t) - \delta I_i^j(t) - \delta T_i^j(t) \quad (3-49)$$

并记  $\delta D_i = C\delta t_i^j$  (3-50)

称为卫星钟与接收机钟相对钟差等效距离误差。于是, 伪距观测方程可以改写为:

$$\tilde{R}_i^j(t) = (D_i^j(t))_0 - k_i^j(t)\delta X_i - l_i^j(t)\delta Y_i - m_i^j(t)\delta Z_i + \delta D_i \quad (3-51)$$

式中  $j=1, 2, 3, 4$ 。采用矩阵形式, 则有:

$$\begin{bmatrix} k_1^1(t) & l_1^1(t) & m_1^1(t) & -1 \\ k_1^2(t) & l_1^2(t) & m_1^2(t) & -1 \\ k_1^3(t) & l_1^3(t) & m_1^3(t) & -1 \\ k_1^4(t) & l_1^4(t) & m_1^4(t) & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta X_i \\ \delta Y_i \\ \delta Z_i \\ \delta D_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (D_1^1(t))_0 - \tilde{R}_1^1(t) \\ (D_1^2(t))_0 - \tilde{R}_1^2(t) \\ (D_1^3(t))_0 - \tilde{R}_1^3(t) \\ (D_1^4(t))_0 - \tilde{R}_1^4(t) \end{bmatrix}$$

上式简化为  $A_i(t) \delta G_i = L_i(t)$  (3-52)

由此, 伪距法绝对定位解可表示为:

$$\delta G_i = A_i(t)^{-1} L_i(t) \quad (3-53)$$

当跟踪卫星颗数  $n^j > 4$  时, 则可应用最小二乘法求解, 这时有误差方程:

$$v_i(t) = A_i(t) \delta G_i - L_i(t) \quad (3-54)$$

其相应的最小二乘解为:

$$\delta G_i = (A_i(t)^T A_i(t))^{-1} A_i(t)^T L_i(t) \quad (3-55)$$

现假定共观测了  $n_i$  个历元, 则可形成  $n_i$  组误差方程组:

$$\begin{bmatrix} v_i(t_1) \\ v_i(t_2) \\ \vdots \\ v_i(t_{n_i}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i(t_1) \\ A_i(t_2) \\ \vdots \\ A_i(t_{n_i}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta X_i \\ \delta Y_i \\ \delta Z_i \\ \delta D_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_i(t_1) \\ L_i(t_2) \\ \vdots \\ L_i(t_{n_i}) \end{bmatrix}$$

且可简写为  $V_i = A_i \cdot \delta T_i - L_i$  (3-56)

其最小二乘解为  $\delta T_i = (A_i^T A_i)^{-1} A_i^T L_i$  (3-57)

式(3-57)就是绝对定位解的一般形式, 而反映定位精度的未知数协因数矩阵则为:

$$Q_{T_i} = (A_i^T A_i)^{-1} \quad (3-58)$$

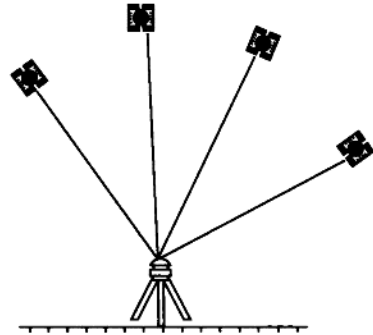


图 3-8 静态绝对定位示意图

且参数向量各个分量的中误差:

$$(m_{T_i})_k = \sigma_0 \sqrt{(Q_{T_i})_{kk}} \quad (3-59)$$

式中:  $\sigma_0$  为伪距测量中误差;  $(Q_{T_i})_{kk}$  为  $Q_{T_i}$  阵主对角线上第  $k$  个元素。

当观测时间较长时,接收机钟差随时间变化不容忽视。这时可用下述两种方法处理:一是将钟差表示成多项式,平差时同时求出系数;另一种方法是对不同的观测历元,分别取独立的钟差参数,即取

$$\delta D_i = \begin{bmatrix} \delta D_i(t_1) \\ \delta D_i(t_2) \\ \dots \\ \delta D_i(t_n) \end{bmatrix} \quad (3-60)$$

### 3.2.3 卫星几何分布精度因子

式(3-59)说明, GPS 静态绝对定位的精度,由两个因素确定:其中一个因素是单位权中误差  $\sigma_0$ ,它由码相关伪距测量的精度、卫星星历精度以及大气折射影响等许多因素确定;另一个因素是未知参数的协因数矩阵  $Q_{T_i}$ ,它由卫星的空间几何分布确定。

在 GPS 导航和定位测量中,定义所谓几何精度因子 DOP(Dilution of Precision),并以此作为衡量卫星空间几何分布对定位精度影响的标准。

记未知参数的协因数矩阵为:

$$Q_{T_i} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} & q_{44} \end{bmatrix} \quad (3-61)$$

式中各个元素反映出在特定的卫星空间几何分布下,不同参数的定位精度及其相关性信息。因此利用这些元素的不同组合,即可定义出若干从不同侧面描述卫星空间几何分布对定位精度影响的精度因子。

#### 3.2.3.1 钟差精度因子 TDOP(Time DOP)

$$\text{定义} \quad \text{TDOP} = \sqrt{q_{44}} \quad (3-62)$$

则相应的钟差中误差为:

$$m_T = \sigma_0 \cdot \text{TDOP} \quad (3-63)$$

#### 3.2.3.2 三维位置精度因子 PDOP(Position DOP)

$$\text{定义} \quad \text{PDOP} = \sqrt{q_{11} + q_{22} + q_{33}} \quad (3-64)$$

则相应的三维位置中误差为:

$$m_p = \sigma_0 \cdot \text{PDOP} \quad (3-65)$$

综合 TDOP 和 PDOP, 可定义反映卫星空间几何分布对接收机钟差和位置综合影响的精度因子——GDOP(Geometric DOP)

$$\text{GDOP} = \sqrt{q_{11} + q_{22} + q_{33} + q_{44}} \quad (3-66)$$

由此, 相应的时空精度中误差为:

$$m_G = \sigma_0 \cdot \text{GDOP} \quad (3-67)$$

### 3.2.3.3 垂直分量精度因子 VDOP (Vertical DOP)

定义 
$$\text{VDOP} = \sqrt{q_{33}} \quad (3-68)$$

反映卫星空间几何分布对接收机位置垂直分量的影响, 相应的垂直分量中误差为:

$$m_V = \sigma_0 \cdot \text{VDOP} \quad (3-69)$$

VDOP 的另一种定义称为高程精度因子

$$\text{VDOP} = \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{q} / |\mathbf{r}|} \quad (3-70)$$

式中:  $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$  为测站概略位置向量,  $\mathbf{q} = \{q_{11}, q_{22}, q_{33}\}$  为三维精度因子向量。由(3-70)定义的 VDOP 计算  $m_v$ , 即得高程定位中误差。

### 3.2.3.4 水平分量精度因子 HDOP (Horizontal DOP)

定义 
$$\text{HDOP} = \sqrt{q_{11} + q_{22}} \quad (3-71)$$

相应的水平分量中误差为:

$$m_H = \sigma_0 \cdot \text{HDOP} \quad (3-72)$$

HDOP 也有另外一种定义称为水平位置精度因子:

$$\text{HDOP} = \sqrt{\text{PDOP}^2 - \text{VDOP}^2} \quad (3-73)$$

由上式定义的 HDOP 计算  $m_H$ , 即得水平位置中误差。

显然, GPS 绝对定位的误差和精度因子(DOP)的大小成正比, 因此在测距精度  $\sigma_0$  确定的情况下, 应尽量采用精度因子小的一组卫星进行观测。换句话说, 当接收机跟踪的卫星多于 4 颗时, 便可选择其中 GDOP 最小的一组卫星进行观测, 这项工作称为选星, 通常接收机可以自动完成。

## 3.3 静态相对定位原理

静态绝对定位, 由于受到卫星轨道误差、接收机钟不同步误差, 以及信号传播误差等多种因素的干扰, 其定位精度较低, 2~3 h C/A 码伪距绝对定位精度约为  $\pm 20$  m, 远不能满足大地测量精密定位的要求。而静态相对定位, 由于采用载波相位观测量以及相位观测量的线性组合技术, 极大地削弱了上述各类定位误差的影响, 其定位相对精度高达  $10^{-6} \sim 10^{-7}$ , 是目前 GPS 定位测量中精度最高的一种方法, 广泛应用于大地测量、精密工程测量以及地球动力学研究。

### 3.3.1 静态相对定位的一般概念

用两台接收机分别安置在基线的两端点,其位置静止不动,同步观测相同的4颗以上GPS卫星,确定基线两端点的相对位置,这种定位模式称为静态相对定位(图3-9)。在实际工作中,常常将接收机数目扩展到3台以上,同时测定若干条基线(图3-10)。这样做不仅提高了工作效率,而且增加了观测量,提高了观测成果的可靠性。

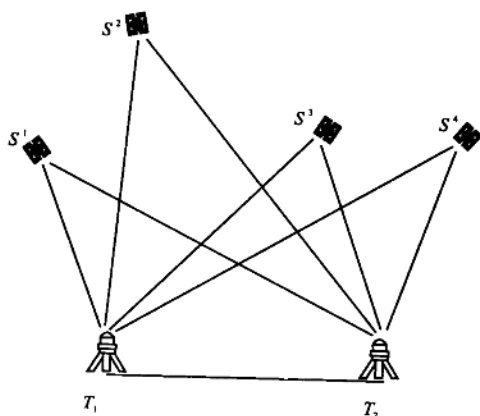


图 3-9 静态相对定位原理

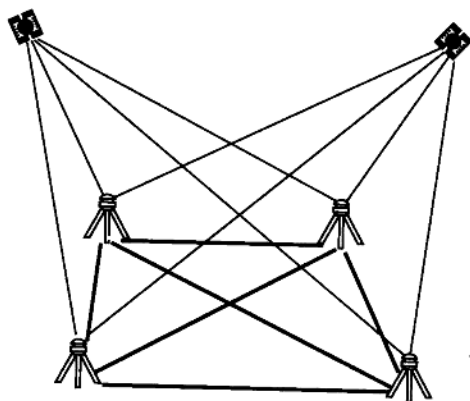


图 3-10 用多台接收机定位作业

静态相对定位采用载波相位观测量为基本观测量,载波波长短,测量精度远高于码相关伪距测量,并且采用不同载波相位观测量的线性组合可以有效地削弱卫星星历误差、信号传播误差以及接收机钟不同步误差对定位结果的影响。天线长时间固定在基线两端点上,可保证取得足够多的观测数据,从而可以准确确定整周未知数  $N_0$ 。上述这许多优点,使得静态相对定位可以达到很高的精度。实践证明,在通常情况下,采用广播星历定位精度可达  $10^{-6} \sim 10^{-7}$ ,如果采用精密星历和轨道改进技术,那么定位精度可提高到  $10^{-8} \sim 10^{-9}$ 。如此高的定位精度,是常规大地测量望尘莫及的。

当然,静态相对定位也存在缺点,即定位观测时间过长。在跟踪4颗卫星的情况下,通常要观测1~1.5h,甚至观测更长的时间。长时间观测影响了GPS定位测量的功效,因此近几年发展了一种整周未知数快速逼近技术,可以在短时间内快速确定整周未知数,使定位测量时间缩短到几分钟,为GPS定位技术开辟了更广泛的应用前景。

### 3.3.2 载波相位观测方程及其线性化

设卫星  $S^j$  在卫星钟钟面时间  $t^j$  发射的载波信号相位为  $\varphi^j(t^j)$ ,而接收机  $M_i$  在接收机钟面时间  $t_i$  收到卫星信号后产生的基准信号相位为  $\varphi_i(t_i)$ 。根据2.4中的讨论,这时相应于历元  $t$  的相位观测量  $\tilde{\varphi}_i^j(t)$ ,应当等于接收机基准信号相位与卫星发射信号相位之差减去相应于初始

历元  $t_0$  的相位差整周数  $N_i^j(t_0)$ 。即成立：

$$\varphi^j(t) = \varphi(t_i) - \varphi(t^j) - N_i^j(t_0) \quad (3-74)$$

式中  $N_i^j(t_0)$  未知,称为整周未知数(整周模糊度)。

卫星钟和接收机钟的振荡器都有良好的稳定度,通常在 1 s 内可达  $10^{-11} \sim 10^{-12}$  s,相应的频率漂移为 0.016~0.0016 Hz。并且,信号由卫星到达接收机的传播时间  $\Delta t$  极短,其取值范围约为 0.066~0.090 s 之间,因此,由频率漂移产生的误差可以忽略。即可视卫星发射的载波信号频率  $f^j$ ,以及接收机产生的基准信号频率  $f_i$ ,两者相等。即有:

$$f^j = f_i = f \quad (3-75)$$

在上述条件下,信号相位与频率之间成立关系式:

$$\varphi(t + \Delta t) = \varphi(t) + f\Delta t \quad (3-76)$$

现记  $t_i = t + \Delta t, t^j = t$ ,且顾及(3-74)式则有:

$$\varphi^j(t) = f\Delta t - N_i^j(t_0) \quad (3-77)$$

由于钟面时与 GPS 标准时间之间存在差异,因此可设:

$$t_i = t_i(\text{GPS}) + \delta t_i \quad (3-78)$$

与

$$t^j = t^j(\text{GPS}) + \delta t^j \quad (3-79)$$

式中:  $t_i(\text{GPS})$  与  $t^j(\text{GPS})$  分别表示与钟面时  $t_i$  和  $t^j$  相应的标准 GPS 时间;  $\delta t_i$  与  $\delta t^j$  则分别是接收机钟与卫星钟的钟差改正数。于是,信号传播时间  $\Delta t$  可表示为:

$$\Delta t = t_i - t^j = t_i(\text{GPS}) - t^j(\text{GPS}) + \delta t_i - \delta t^j = \Delta \tau + \delta t_i - \delta t^j$$

将上式代入(3-77)式,相位观测量可进一步表示为:

$$\varphi^j(t) = f[t_i(\text{GPS}) - t^j(\text{GPS})] + f\delta t_i - f\delta t^j - N_i^j(t_0) = f\Delta \tau + f\delta t_i - f\delta t^j - N_i^j(t_0) \quad (3-80)$$

考虑到  $\Delta \tau = \frac{1}{c} D_i^j(t)$ ,且顾及电离层和对流层对信号传播的影响,则有载波相位观测方程:

$$\varphi^j(t) = \frac{f}{c} [D_i^j(t) + \delta I_i^j(t) + \delta T_i^j(t)] + f\delta t_i - f\delta t^j - N_i^j(t_0) \quad (3-81)$$

如果将(3-81)式两边同乘上  $\lambda = \frac{c}{f}$ ,则有:

$$\check{D}_i^j(t) = D_i^j(t) + \delta I_i^j(t) + \delta T_i^j(t) + c\delta t_i - c\delta t^j - \lambda N_i^j(t_0) \quad (3-82)$$

将(3-82)式与(3-43)式进行比较,可以看出,载波相位观测方程除了增加了整周未知数  $N_0$  外,其余部分和伪距观测方程完全相同。

式(3-81)或(3-82)式给出的载波相位观测方程是一种近似的简化表达式。在相对定位中,当基线较短时,完全可以采用这种简化式。但是当基线较长时,则应采用较为严密的观测模型。

在(3-81)式或(3-82)式中,由于卫星发射载波信号的时刻一般是未知的,则由

$$\Delta \tau = t_i(\text{GPS}) - t^j(\text{GPS})$$

可得

$$t^j(\text{GPS}) = t_i(\text{GPS}) - \Delta \tau \quad (3-83)$$

即应将卫星发射信号的时刻表示成为接收机接收信号时刻的函数  $t^j(\text{GPS}) = t_i(\text{GPS}) - \Delta \tau$ 。

由于信号传播时间与传播距离、传播速度存在关系  $\Delta\tau = D/c$ ，而卫星  $j$  与测站  $i$  之间的几何距离是卫星发射信号时刻  $t^j$  与接收信号时刻  $t_i$  的函数，那么有：

$$\Delta\tau = \frac{1}{c}D_i^j[t_i(\text{GPS}), t^j(\text{GPS})] = \frac{1}{c}D_i^j[t_i(\text{GPS}), t_i(\text{GPS}) - \Delta\tau] \quad (3-84)$$

将上式按泰勒级数展开，取一次项可得：

$$\Delta\tau = \frac{1}{c}D_i^j[t_i(\text{GPS})] - \frac{1}{c}\dot{D}_i^j[t_i(\text{GPS})]\Delta\tau \quad (3-85)$$

考虑到接收机钟差，则有： $t_i(\text{GPS}) = t_i - \delta t_i$ 。那么把(3-85)式表示成为以观测历元  $t_i$  表示的形式：

$$\Delta\tau = \frac{1}{c}D_i^j(t_i) - \frac{1}{c}\dot{D}_i^j(t_i)\Delta\tau - \frac{1}{c}\dot{D}_i^j(t_i)\delta t_i \quad (3-86)$$

$\Delta\tau$  的计算采用迭代法，若取  $\Delta\tau = \frac{1}{c}D_i^j(t_i)$ ，则(3-86)式成为

$$\Delta\tau = \frac{1}{c}D_i^j(t_i)(1 - \frac{1}{c}\dot{D}_i^j(t_i)) - \frac{1}{c}\dot{D}_i^j(t_i)\delta t_i \quad (3-87)$$

将此式代入(3-80)式，并考虑电离层和对流层的影响，则有较严密的载波相位观测方程：

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{f}{c}D_i^j(t)\left[1 - \frac{1}{c}\dot{D}_i^j(t)\right] + f\left[1 - \frac{1}{c}\dot{D}_i^j(t)\right] \cdot \\ &\delta t_i - f\delta t^j + \frac{f}{c}\delta I_i^j(t) + \frac{f}{c}\delta T_i^j(t) - N_i^j(t_0) \end{aligned} \quad (3-88)$$

与(3-82)式相同，(3-87)式也可表示为：

$$\begin{aligned} \check{D}_i^j(t) &= D_i^j(t)\left[1 - \frac{1}{c}\dot{D}_i^j(t)\right] + c\left[1 - \frac{1}{c}\dot{D}_i^j(t)\right] \cdot \\ &\delta t_i - c\delta t^j + \delta I_i^j(t) + \delta T_i^j(t) - \lambda N_i^j(t_0) \end{aligned} \quad (3-89)$$

与伪距观测方程相同，测站与卫星之间的几何距离也是坐标的非线性函数，即有(3-44)式

$$D_i^j(t) = [(X^j(t) - X_i)^2 + (Y^j(t) - Y_i)^2 + (Z^j(t) - Z_i)^2]^{1/2}$$

同样，可取测站坐标的近似值( $X_i^0, Y_i^0, Z_i^0$ )，将其线性化后有：

$$D_i^j(t) = (D_i^j(t))_0 - k_i^j(t)\delta X_i - l_i^j(t)\delta Y_i - m_i^j(t)\delta Z_i \quad (3-90)$$

式中各符号的意义同 3.2。

将(3-90)代入(3-81)式有线性化的载波相位观测方程：

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_i^j(t) &= \frac{f}{c}(D_i^j(t))_0 - \frac{f}{c}[k_i^j(t)\delta X_i + l_i^j(t)\delta Y_i + m_i^j(t)\delta Z_i] + \\ &\frac{f}{c}\delta I_i^j(t) + \frac{f}{c}\delta T_i^j(t) + f\delta t_i - f\delta t^j - N_i^j(t_0) \end{aligned} \quad (3-91)$$

同理，测相伪距观测方程的线性化形式为：

$$\begin{aligned} \check{D}_i^j(t) &= (D_i^j(t))_0 - [k_i^j(t)\delta X_i + l_i^j(t)\delta Y_i + m_i^j(t)\delta Z_i] + \\ &\delta I_i^j(t) + \delta T_i^j(t) + C\delta t_i - C\delta t^j - \lambda N_i^j(t_0) \end{aligned} \quad (3-92)$$

以上两式为载波相位观测的简化线性方程式。同理，可以很方便得出其较为严密方程的线性化形式，此处不再一一列出。

### 3.3.3 基线向量的单差模型及其解算

利用载波相位进行测量,就其本身来讲,测量精度可达 0.5~2.0 mm,但是,由 3.1 知 GPS 测量受到多种误差的影响。如卫星轨道误差、卫星钟差、接收机钟差以及电离层和对流层的折射误差的影响。为了提高定位精度,应研究各种误差规律,建立改正模型对其进行改正,但是,由于这种改正往往难以完全正确地反映误差的规律,所以,观测值中仍存有残余影响,一般可通过在观测方程中加入相应的附加参数来消除其影响,例如对接收机钟差,按每一个观测历元设立一个钟差未知参数。同样对其他误差也可采用这样的办法。但是,这样做又给观测方程中增加了大量与定位无直接关系的多余未知参数,仅钟差未知数而言,当观测 90 min,每隔 15 s 记录一次(观测一次),那么观测方程中将有 360 个独立的钟差未知参数。大量的多余未知参数不但大大增加了平差计算工作量,而且还影响定位未知参数的可靠性。

由于上述 GPS 观测误差对两个观测站或多个观测站同步观测相同卫星具有较强的相关性,因此,一种简单有效消除或减弱误差影响的方法是将这些观测量进行不同的线性组合。

假设测站(接收机)1 和 2 分别在  $t_1$  和  $t_2$  时刻(历元)对卫星  $p$  和  $q$  进行了同步观测,如图 3-11,则可得载波相位观测量: $\varphi^p(t_1)$ 、 $\varphi^p(t_2)$ 、 $\varphi^q(t_1)$ 、 $\varphi^q(t_2)$ 、 $\varphi^p(t_1)$ 、 $\varphi^q(t_2)$ 、 $\varphi^q(t_1)$ 、 $\varphi^p(t_2)$ 。那么,可以在卫星间求差,在接收机(测站)间求差,也可以在历元(时刻)间求差,则有:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\varphi^p(t_j) &= \varphi^p(t_j) - \varphi^q(t_j) & i = 1, 2; j = 1, 2 \\ \Delta\varphi^q_2(t_j) &= \varphi^q_2(t_j) - \varphi^q_1(t_j) & k = p, q; j = 1, 2 \\ \Delta\varphi^q(t_{12}) &= \varphi^q(t_2) - \varphi^q(t_1) & i = 1, 2; k = p, q \end{aligned} \right\} \quad (3-93)$$

将这种求差称为求单差或一次差,将求差后的线性组合当作虚拟观测值。

可以看出在观测值间有三种求单差的形式,在此以测站间求差为例,给出其虚拟观测值线性模型及其解算,类似可得出卫星间求差、历元间求差后的观测模型。

如图 3-11 所示,若在  $t_1$  时刻在测站 1、2 同时对卫星  $P$  进行了载波相位测量,由(3-81)有观测方程:

$$\varphi^p_1(t_1) = \frac{f}{c} [D^p_1(t_1) + \delta I^p_1(t_1) + \delta T^p_1(t_1)] + f\delta t_1 - f\delta t^p - N^p_1(t_0)$$

$$\varphi^p_2(t_1) = \frac{f}{c} [D^p_2(t_1) + \delta I^p_2(t_1) + \delta T^p_2(t_1)] + f\delta t_2 - f\delta t^p - N^p_2(t_0)$$

将以上两式代入(3-93)中的第二式得:

$$\Delta\varphi^p_2(t_1) = \varphi^p_2(t_1) - \varphi^p_1(t_1) = \frac{f}{c} [D^p_2(t_1) - D^p_1(t_1)] + \frac{f}{c} [\delta I^p_2(t_1) - \delta I^p_1(t_1)] + \frac{f}{c} [\delta T^p_2(t_1) - \delta T^p_1(t_1)] + f[\delta t_2 - \delta t_1] - f[\delta t^p - \delta t^p] - [N^p_2(t_0) - N^p_1(t_0)]$$

(3-94)

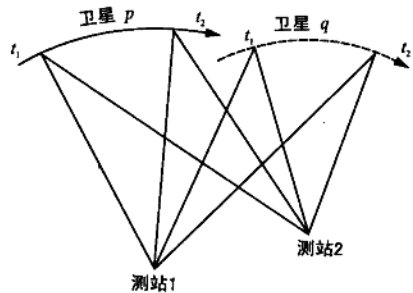


图 3-11 GPS 相对观测示意图



设:  $D_{12}^f(t_1) = D_2^f(t_1) - D_1^f(t_1)$ ,  $\delta I_{12}^f = \delta I_2^f - \delta I_1^f$ ,  $\delta T_{12}^f = \delta T_2^f - \delta T_1^f$ ,  $\delta t_{12} = \delta t_2 - \delta t_1$ ,  $N_{12}^f(t_0) = N_2^f(t_0) - N_1^f(t_0)$ , 则可得单差虚拟观测方程

$$\Delta\varphi_{12}^f(t_1) = \frac{f}{c}D_{12}^f(t_1) + f\delta t_{12} - N_{12}^f(t_0) + \frac{f}{c}\delta I_{12}^f + \frac{f}{c}\delta T_{12}^f \quad (3-95)$$

由上式可知, 卫星钟差影响已消除。当两测站相距不太远(例如在 20 km 以内), 由于对流层和电离层折射的影响具有很强的相关性, 故在测站间求一次差可几乎消除大气折射误差。

另外可由图 3-12 研究卫星星历误差对定位的影响。在图 3-12 中 1, 2 为测站的近似位置,  $S$  为卫星的正确位置, 设卫星的星历存在误差  $ds$ , 则由星历求出卫星的位置在  $S'$ 。若在测站 1 上进行单点定位时,  $ds$  对测距的影响为  $dD = ds \cdot \cos\alpha$ 。当在测站间求差后,  $ds$  对测距的影响为:

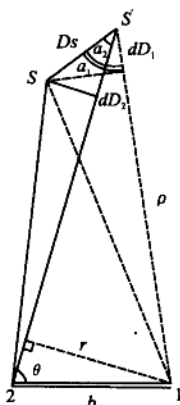


图 3-12 卫星星历误差影响

$$dD_2 - dD_1 = ds \cdot (\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1) = -2ds \cdot \sin \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} \cdot \sin \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}$$

$$\sin \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} = -ds \cdot \sin \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} \cdot (\alpha_2 - \alpha_1) \quad (3-96)$$

而:  $r = b \cdot \sin\theta$ , 由角度与弦长关系可得:  $\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{r}{\rho} = (\frac{b}{\rho})\sin\theta$ , 若  $b \cdot \sin\theta = 20 \text{ km}$ ,  $\rho = 20000 \text{ km}$ , 则  $(b/\rho)\sin\theta \leq 0.001$ , 这表明在测站间求差后, 星历误差对测距的影响只有原来的千分之一。

由以上的讨论可以得知, 测站间求单差的虚拟观测模型具有下列优点。

- (1) 消除了卫星钟误差的影响。
- (2) 大大削弱了卫星星历误差的影响。
- (3) 大大削弱了对流层折射和电离层折射的影响, 在短距离内几乎可以完全消除其影响。

在  $n_i$  个测站间求单差, 通常以某点为已知参考点。例如在两个测站中, 测站 1 作为已知参考点, 坐标已知, 测站 2 为待定点, 应用(3-91)式和(3-95)式, 且考虑电离层、对流层折射影响已基本消除, 可得单差观测方程的线性化形式:

$$\Delta\varphi_{12}^f(t_1) = -\frac{f}{c} [k_2^f(t_1) \quad l_2^f(t_1) \quad m_2^f(t_1)] \begin{bmatrix} \delta X_2 \\ \delta Y_2 \\ \delta Z_2 \end{bmatrix} + f\delta t_{12} - N_{12}^f(t_0) + \frac{f}{c} [D_2^f(t_1) - D_1^f(t_1)] \quad (3-97)$$

式中:  $D_1^f(t_1)$  为  $t_1$  时刻测站 1 至卫星  $P$  的距离。

对单差观测方程可写出相应的误差方程:

$$\Delta V_{12}^f(t_1) = -\frac{f}{c} [k_2^f(t_1) \quad l_2^f(t_1) \quad m_2^f(t_1)] \begin{bmatrix} \delta X_2 \\ \delta Y_2 \\ \delta Z_2 \end{bmatrix} + f\delta t_{12} - \lambda N_{12}^f(t_0) + \Delta L_{12}^f(t_1) \quad (3-98)$$

式中 
$$\Delta L_{12}^f = \frac{f}{c} [(D_2^f(t_1))_0 - D_1^f(t_1)] - \Delta\varphi_{12}^f(t_1)$$

如果两测站, 同步观测  $n^s$  个卫星, 则应相应列出  $n^s$  个误差方程。

$$\begin{bmatrix} \Delta V_{12}^1(t_1) \\ \Delta V_{12}^2(t_1) \\ \vdots \\ \Delta V_{12}^p(t_1) \end{bmatrix} = -\frac{f}{c} \begin{bmatrix} k_{12}^1(t_1) & l_{12}^1(t_1) & m_{12}^1(t_1) \\ k_{12}^2(t_1) & l_{12}^2(t_1) & m_{12}^2(t_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ k_{12}^p(t_1) & l_{12}^p(t_1) & m_{12}^p(t_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta X_2 \\ \delta Y_2 \\ \delta Z_2 \end{bmatrix} + f \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \delta t_{12} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{12}^1(t_0) \\ N_{12}^2(t_0) \\ \vdots \\ N_{12}^p(t_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta L_{12}^1(t_1) \\ \Delta L_{12}^2(t_1) \\ \vdots \\ \Delta L_{12}^p(t_1) \end{bmatrix} \quad (3-99)$$

或用矩阵符号形式写为:

$$V(t_1) = a(t_1) \delta X_2 + b(t_1) \delta t_{12} + C(t_1) N^p + L(t_1)$$

$\begin{matrix} n^p \times 1 & n^p \times 3 & 3 \times 1 & n^p \times 1 & n^p \times n^p & n^p \times 1 & n^p \times 1 \end{matrix}$

若设同步观测该组卫星的历元数为  $n_i$ , 则可列出  $n_i$  组误差方程式:

$$V = [V(t_1) \ V(t_2) \ \dots \ V(t_{n_i})]^T$$

即

$$V = A \delta X_2 + B \delta t + C N^p + L \quad (3-100)$$

其中

$$A = [a(t_1) \ a(t_2) \ \dots \ a(t_{n_i})]^T$$

$$B = \begin{bmatrix} b(t_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b(t_2) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b(t_3) & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b(t_{n_i}) \end{bmatrix}$$

$$C = [C(t_1) \ C(t_2) \ \dots \ C(t_{n_i})]^T$$

$$V = [V(t_1) \ V(t_2) \ \dots \ V(t_{n_i})]^T$$

$$L = [L(t_1) \ L(t_2) \ \dots \ L(t_{n_i})]^T$$

按最小二乘原理对观测方程求解, 有法方程

$$N Y + U = 0 \quad (3-101)$$

式中: 法方程系数阵  $N = [A \ B \ C]^T P [A \ B \ C]$ ; 法方程常数阵  $U = [A \ B \ C]^T P L$ ; 未知参数阵  $Y = [\delta X_2 \ V N^p]^T$ , 对法方程求解后有:

$$Y = -N^{-1} U \quad (3-102)$$

解的精度评定可按以下方式进行, 由观测方程改正数可得单位权方差

$$\sigma_0^2 = \frac{V^T P V}{f} \quad (3-103)$$

式中:  $f$  为自由度, 即多余观测数, 而单差观测方程数:

$$n = (n_i - 1) n^p \cdot n_i \quad (3-104)$$

式中:  $n_i$  为测站数;  $n^p$  为观测的卫星数;  $n_i$  为观测历元数, 而模型中的未知参数的总数为:

$$u = (n_i - 1)(3 + n^p + n_i) \quad (3-105)$$

$$f = n - u$$

未知数的协因数阵  $O_y = N^{-1}$ , 而未知数向量  $Y$  中任一分量的精度估值为

$$\sigma_{y_i} = \sigma_0 \sqrt{1/p_{y_i}} \quad (3-106)$$

按类似的方法,可以得到在卫星间求单差、在观测历元间求单差的数学模型及其求解,在此不再详细介绍。

### 3.3.4 基线向量的双差和三差模型及其解算

#### 3.3.4.1 基线向量的双差模型及其解算

对测站间或卫星间或历元间求过一次差后的虚拟观测方程,仍可求两次差,即求双差,由于求差与先后顺序无关,因此,GPS 观测量之间的双差仍可有 3 种求法:

- (1) 在测站间求单差,卫星间求双差。
- (2) 在卫星间求单差,历元间求双差。
- (3) 在历元间求单差,测站间求双差。

以测站间求单差卫星间求双差为例,给出双差模型。设在 1、2 测站  $t_1$  时刻同时观测了  $p$ 、 $q$  两个卫星,那么对  $p$ 、 $q$  两颗卫星分别有单差模型(3-95),如果忽略大气折射残差,可得在卫星求双差的虚拟观测方程。

$$\begin{aligned} \Delta\phi_{12}^q(t_1) &= \Delta\phi_{12}^q(t_1) - \Delta\phi_{12}^p(t_1) = \frac{f}{c}(D_{12}^q(t_1) - D_{12}^p(t_1)) + \\ f(\delta t_{12} - \delta t_{12}) + (N_{12}^q(t_0) - N_{12}^p(t_0)) &= \frac{f}{c}D_{12}^q(t_1) + N_{12}^q(t_0) \end{aligned} \quad (3-107)$$

由(3-107)可以看出,两卫星观测方程在  $t_1$  时刻均含有相同的接收机钟差  $\delta t_{12}$ ,卫星间求差后,不再存在钟差。也就是说在双差模型中可以消除钟差影响。

由将  $D_{12}^q(t_1)$  的线性化形式代入(3-107)式,可得线性化后的双差模型:

$$\begin{aligned} \Delta\phi_{12}^q(t_1) &= -\frac{f}{c}[\Delta k_{12}^q(t_1) \Delta L_{12}^q(t_1) \Delta m_{12}^q(t_1)] \times \begin{bmatrix} \delta X_2 \\ \delta Y_2 \\ \delta Z_2 \end{bmatrix} - \\ N_{12}^q(t_0) + \frac{f}{c}[(D_{12}^q(t_1))_0 - D_{12}^q(t_1) - (D_{12}^p(t_1))_0 + D_{12}^p(t_1)] & \end{aligned} \quad (3-108)$$

设 
$$\Delta L_{12}^q(t_1) = -\frac{f}{c}[(D_{12}^q(t_1))_0 - D_{12}^q(t_1) - (D_{12}^p(t_1))_0 + D_{12}^p(t_1)] - \Delta\phi_{12}^q(t_1)$$

则有双差观测值的误差方程式:

$$V_{12}^q(t_1) = -\frac{f}{c}[\Delta k_{12}^q(t_1) \Delta L_{12}^q(t_1) \Delta m_{12}^q(t_1)] \begin{bmatrix} \delta X_2 \\ \delta Y_2 \\ \delta Z_2 \end{bmatrix} - N_{12}^q(t_0) + \Delta L_{12}^q(t_1) \quad (3-109)$$

如果当两测站同步观测了  $n^p$  个卫星时,可得  $(n^p-1)$  个误差方程组。

$$V(t_1) = \begin{matrix} a(t_1) & C(t_1) & N & + \Delta L(t_1) \\ \begin{matrix} (n^p-1) \times 1 \\ (n^p-1) \times 3 \\ 3 \times 1 \end{matrix} & \begin{matrix} (n^p-1) \times 3 \\ (n^p-1) \times 3 \\ (n^p-1) \times 1 \end{matrix} & \begin{matrix} (n^p-1) \times 1 \\ (n^p-1) \times 1 \\ (n^p-1) \times 1 \end{matrix} & \begin{matrix} (n^p-1) \times 1 \\ (n^p-1) \times 1 \\ (n^p-1) \times 1 \end{matrix} \end{matrix} \quad (3-110)$$

式中

$$V(t_1) = [V^{1p}(t_1) \ V^{2p}(t_1) \ \dots \ V^{(p-1)p}(t_1)]$$

如果在两测站上对  $n^p$  组卫星同步观测了  $n_i$  个历元,那么相应的误差方程为:

$$V = A\delta X_2 + CN + L \quad (3-111)$$

式中各符号的意义,类似于(3-100),并由此得法方程:

$$NY + U = 0 \quad Y = -N^{-1}U \quad Y = [\delta X_2 \ N]^T$$

同样,精度评定可按与单差类似的方式进行。

双差观测模型的总个数为:

$$(n_i - 1)(n^p - 1)n_i$$

方程中待定总未知数的个数为:

$$3(n_i - 1) + (n^p - 1)(n_i - 1)$$

### 3.3.4.2 基线向量的三差模型

在观测值之间求双差后,仍可在观测值之间求三差。由于求差与求差(相减)次序无关,所以只有一种求三次差的方法,即在测站、卫星和观测历元之间求三差。

设在测站 1、2 分别在  $t_1, t_2$  历元同时观测了  $p, q$  卫星,则根据(3-107)式,有双差观测方程:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_{12}^{pq}(t_1) &= \frac{f}{c}D_{12}^{pq}(t_1) + N_{12}^{pq}(t_0) \\ \Delta\varphi_{12}^{pq}(t_2) &= \frac{f}{c}D_{12}^{pq}(t_2) + N_{12}^{pq}(t_0) \end{aligned}$$

对以上两双差观测方程求三次差有:

$$\Delta\varphi_{12}^{pq}(t_1, t_2) = \frac{f}{c}(D_{12}^{pq}(t_2) - D_{12}^{pq}(t_1)) + N_{12}^{pq}(t_0) - N_{12}^{pq}(t_0) = \frac{f}{c}D_{12}^{pq}(t_1, t_2) \quad (3-112)$$

由于整周未知数  $N_{12}^{pq}(t_0)$  与观测历元无关,因而在相减时被消去,可见三差观测方程中已不存在整周未知数。

对三差模型(3-112)进行线性化,则有:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_{12}^{pq}(t_1, t_2) &= -\frac{f}{c}[\Delta k_{12}^{pq}(t_1, t_2) \ \Delta l_{12}^{pq}(t_1, t_2) \ \Delta m_{12}^{pq}(t_1, t_2)] \begin{bmatrix} \delta X_2 \\ \delta Y_2 \\ \delta Z_2 \end{bmatrix} + \frac{f}{c}[(D_{12}^{pq}(t_2))_0 - \\ &D_{12}^{pq}(t_2) - (D_{12}^{pq}(t_2))_0 + D_{12}^{pq}(t_2) - (D_{12}^{pq}(t_1))_0 + D_{12}^{pq}(t_1) + (D_{12}^{pq}(t_1))_0 - D_{12}^{pq}(t_1)] = \\ &-\frac{f}{c}[\Delta k_{12}^{pq}(t_1, t_2) \ \Delta l_{12}^{pq}(t_1, t_2) \ \Delta m_{12}^{pq}(t_1, t_2)] \begin{bmatrix} \delta X_2 \\ \delta Y_2 \\ \delta Z_2 \end{bmatrix} + (\Delta D_{12}^{pq}(t_1, t_2))_0 \end{aligned} \quad (3-113)$$

式中

$$\begin{aligned} \Delta k_{12}^{pq}(t_1, t_2) &= \Delta k_{12}^{pq}(t_2) - \Delta k_{12}^{pq}(t_1) \\ \Delta l_{12}^{pq}(t_1, t_2) &= \Delta l_{12}^{pq}(t_2) - \Delta l_{12}^{pq}(t_1) \\ \Delta m_{12}^{pq}(t_1, t_2) &= \Delta m_{12}^{pq}(t_2) - \Delta m_{12}^{pq}(t_1) \\ [\Delta D_{12}^{pq}(t_1, t_2)]_0 &= [D_{12}^{pq}(t_2)]_0 - D_{12}^{pq}(t_2) - [D_{12}^{pq}(t_2)]_0 + \\ &D_{12}^{pq}(t_2) - [D_{12}^{pq}(t_1)]_0 + D_{12}^{pq}(t_1) - [D_{12}^{pq}(t_1)]_0 + D_{12}^{pq}(t_1) \end{aligned}$$

同样对(3-113)式可得相应的误差方程

$$V_{f_2}^p(t_1, t_2) = -\frac{f}{c} [\Delta k_{f_2}^p(t_1, t_2) \quad \Delta l_{f_2}^p(t_1, t_2) \quad \Delta m_{f_2}^p(t_1, t_2)] \begin{bmatrix} \delta X_2 \\ \delta Y_2 \\ \delta Z_2 \end{bmatrix} + \Delta L_{f_2}^p(t_1, t_2) \quad (3-114)$$

当同步观测  $n^p$  个卫星的  $n_i$  个历元时用与单差、双差类似的最小二乘法列立方程可对三差模型求解,在此不再赘述。此时未知参数中仅包含待定点的坐标。

### 3.3.5 相位观测量线性组合的相关性

由前面的讲述可以看到,通过相位观测量求差获得的线性组合方程,具有消除或大大减弱 GPS 卫星定位中的多项相关误差,大大提高定位精度的优点。同时该线性组合还具有消去多余未知参数,使求解简单易行的优点。

但是,任何事物总有两面性,求差法也带来一些缺点:一是由于求差使观测方程数大大减少,使许多有效的观测数据不能得以利用,导致观测数据利用率低;二是由求差产生的观测值之间产生相关性,随着求差次数的增加,其相关性显著地增强,从而导致解的精度和可靠性降低。观测值的相关性可由其协方差阵说明,这里我们重点讨论单差、双差相关观测量的相关性。

#### 3.3.5.1 单差观测量的相关性

假设我们不考虑观测中的物理相关性,则可认为相位观测值是独立、等精度、服从正态分布的,那么观测值的协方差阵为:

$$D_\varphi = \sigma^2 E^2 \quad (3-115)$$

式中:  $\sigma^2$  为单位权方差;  $E$  为单位阵。

假设在  $t$  时刻,由测站 1、2 对卫星  $p$ 、 $q$  进行观测,则有单差观测方程。

$$\varphi_{f_2}^p(t) = \varphi_{f_2}^q(t) - \varphi_{f_2}^q(t)$$

$$\varphi_{f_2}^q(t) = \varphi_{f_2}^q(t) - \varphi_{f_2}^q(t)$$

以上两式表示为矩阵形式为:

$$\begin{bmatrix} \Delta\varphi_{f_2}^p(t) \\ \Delta\varphi_{f_2}^q(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{f_2}^q(t) \\ \varphi_{f_2}^q(t) \\ \varphi_{f_2}^q(t) \\ \varphi_{f_2}^q(t) \end{bmatrix} = K\varphi \quad (3-116)$$

由方差与协方差传播定律,可得这两个单差的协方差阵为:

$$D_{\Delta\varphi} = K D_\varphi K^T = \sigma^2 \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2\sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-117)$$

由上式可见,两测站同步观测两个不同卫星,所组成的单差模型之间是不相关的。不难推广得出,两测站同步观测  $n^p$  个卫星、观测  $n_i$  个历元获得的单差基线是不相关的,即按单基线求解的单差模型相互独立。

在此还需提及的是,当有三台及其以上的接收机进行同步观测时,同一观测时刻的单差观测值之间具有相关性。例如有三台接收机,同时在 1、2、3 三个测站上  $t$  时刻同步观测了  $p$  和  $q$  卫星,则其站间一次差为:

$$\begin{bmatrix} \Delta\varphi_{12}^p(t) \\ \Delta\varphi_{13}^p(t) \\ \Delta\varphi_{12}^q(t) \\ \Delta\varphi_{13}^q(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1^p(t) \\ \varphi_2^p(t) \\ \varphi_3^p(t) \\ \varphi_1^q(t) \\ \varphi_2^q(t) \\ \varphi_3^q(t) \end{bmatrix} = K\varphi \quad (3-118)$$

由协方差传播律得 4 个单差观测值的协方差阵为:

$$D_{\Delta\varphi}(t) = KD_{\varphi}K^T = \sigma^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3-119)$$

### 3.3.5.2 双差观测量的相关性

设在  $t$  时刻,由测站 1、2 同步观测了  $p_1、p_2、p_3、p_4$  颗卫星,则以  $p_1$  为基准卫星,按双差求差模型有:

$$\Delta\varphi_{12}^{p_i}(t) = \Delta\varphi_{12}^p(t) - \Delta\varphi_{12}^q(t) \quad i = 2, 3, 4$$

用矩阵形式表示有:

$$\begin{bmatrix} \Delta\varphi_{12}^{p_2}(t) \\ \Delta\varphi_{12}^{p_3}(t) \\ \Delta\varphi_{12}^{p_4}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\varphi_{12}^p(t) \\ \Delta\varphi_{12}^q(t) \\ \Delta\varphi_{12}^r(t) \\ \Delta\varphi_{12}^s(t) \end{bmatrix} = K\Delta\varphi \quad (3-120)$$

由协方差传播律得出双差观测量的协方差阵

$$D_{\Delta\Delta\varphi} = KD_{\Delta\varphi}K^T = 2\sigma^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3-121)$$

可见,根据不同卫星的同步观测测量组构的双差观测值间是相关的。

当两个观测站同步观测  $n^p$  个卫星时,其协方差阵

$$D_{\Delta\Delta\varphi} = 2\sigma^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{bmatrix}$$

$(n^p-1) \times (n^p-1)$

相应的权阵为

$$P_{\Delta\Delta\varphi} = \frac{1}{2\sigma^2} \frac{1}{n^p} \begin{bmatrix} n^p - 1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n^p - 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & \cdots & n^p - 1 \end{bmatrix} \quad (3-122)$$

如果同步观测的历元数为  $n_t$ , 则相应双差的权矩阵可表示为:

$$P_{\Delta\Delta\varphi} = \begin{bmatrix} P_{\Delta\Delta\varphi}(t_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_{\Delta\Delta\varphi}(t_2) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_{\Delta\Delta\varphi}(t_n) \end{bmatrix} \quad (3-123)$$

对于三差观测方程, 不仅因使用同一个卫星求双差而引起的相关, 而且还因为使用同一个历元求三差而引起的相关。可采用与双差观测相类似的方法推导, 只是更为复杂麻烦, 这里就不再详细介绍。

### 3.4 整周未知数的确定方法与周跳分析

载波相位测量, 特别是利用将载波相位观测值求差进行的相对定位测量具有很高的精度, 是目前最精确的观测方法。但是, 这种高精度是以正确确定整周未知数  $N_0$  和彻底消除周跳为前提的。因为, 无论是整周未知数确定的不正确, 还是周跳没有消除干净, 一个整周数值的错误, 就将产生 0.2 m 的误差。所以, 整周未知数的确定、整周跳变的探测与消除, 在利用 GPS 载波相位进行精密定位中, 具有非常重要的意义。

整周未知数的确定、整周跳变的消除, 只能根据一定的数学理论及方法, 通过数据处理手段来进行, 因此也使数据处理变得复杂且有相当的难度。国内外学者对此进行了大量的研究, 取得了丰硕的成果, 较好地解决了如何快速准确可靠地确定整周未知数, 及时有效地发现和修复整周跳变。

#### 3.4.1 整周未知数的确定方法

当以载波相位测量进行精密定位时, 连续跟踪的某颗卫星的所有载波相位观测值中, 均含有相同的整周未知数  $N_0^p$ , 正确确定  $N_0^p$  是获取高精度定位结果的关键问题之一。同时, 在静态相对定位中, 由于整周未知数解的精度与卫星图形的构形变化、卫星数目的多少密切相关, 因此往往需要 1~2 h 甚至更长的观测时间, 其目的就是为了能正确确定整周未知数, 且理论分析与实践均表明, 如果整周未知数一旦确定, 再延长观测时间, 对提高相对定位精度的作用不大。因此, 快速准确地确定整周未知数, 是载波相位测量的重要问题。确定整周未知数的方法很多, 在此介绍几种常用的方法。

##### 3.4.1.1 整周未知数的平差待定参数法

把整周未知数作为平差计算中的待定参数, 在平差过程中与其他参数一起求解确定。静态

相对定位中常采用这种方法,即可采用(3-98)或(3-109)模型,根据最小二乘原理,通过平差求解相应的整周未知数,而整周未知数的取值有两种取值方法。

(1) 整数解(固定解)。整周未知数从理论上讲应该是一个整数,但是,由于各种误差的影响,平差求得的整周未知数往往不是一个整数,而是一个实数。

对于短基线,当进行1 h以上的静态相对定位,由于测站间星历误差、大气折射等误差具有强相关性,相对定位可以使这些误差大大削弱;同时也由于在较长的观测时间,观测卫星的几何分布会产生较大的变化,因此能以较高的精度来求定整周未知数。此时,平差求出的整周未知数一般为较接近于相邻近整数的实数,且如果整周未知数估值的中误差甚小,则可直接取相邻近的整数为整周未知数;或者从统计检验的角度,取整周未知数估值加上3倍的中误差(即 $N_r \pm 3\sigma_{N_r}$ )为整周未知数的整数取值范围,该范围内包含的所有整数均作为整周未知数的候选值。

当所有的整周未知数取了整数后,应作为已知值代入观测方程,再进行最小二乘平差求得待定坐标的平差值。如果整周未知数的整数候选值不止一个,则应将所有卫星的候选值构成不同组合,逐一作为已知值代入进行平差,最后取能使待定坐标平差后方差最小的那一组整数作为整周未知数。

整周未知数的整数解获得的待定点坐标估值也称为固定解。对于短基线,由于这种方法顾及了整周未知数的整数特性,因此能够改善相对定位的精度。

(2) 实数解(浮动解)。对于长基线,误差的相关性降低,因此卫星星历、大气折射等误差的影响难以有效消除,求解的整周未知数精度较低。事实上,整周未知数的实数解中往往包含了一些系统误差,此时,再将其取为某一整数,实际上对于相对定位精度只会损而无害。所以通常对于20 km以上的长基线通常不再考虑整周未知数的整数性质,直接将实数作为整周未知数的解。由实数整周未知数获得的待定点坐标估值也称为浮动解。

### 3.4.1.2 三差法

由载波相位观测值的线性组合可知,当连续跟踪载波相位观测值在历元之间求差时,由于其含有相同的整周未知数,求差后方程中不再含有整周未知参数,因此可直接解出坐标参数。但是,在两个历元之间,由于几何图形结构相近,观测方程相关性强,所以求差后的方程性态不好,导致求出的坐标参数精度不高。实际应用时,一般采用在测站、卫星、历元间求三差后的方程求解坐标未知数并将其作为未知参数的初始值,代入双差模型再求解整周未知数。由于利用三差法求出的坐标估值是具有较好近似度的初始值,因此有益于提高双差求解整周未知数的精度。

由于三差法利用了连续跟踪卫星的两个历元间的相位差等于多普勒积分值这一性质,所以也称该方法为多普勒法。

### 3.4.1.3 伪距双频法

由于伪距测量中的码相位不受整周未知数的影响,那么可以将伪距观测值 $S$ 减去载波相位实际观测值与波长的乘积,则有:

$$\lambda \cdot N_0 = S - S' = S - \lambda(N(t - t_0) + \delta\varphi) \quad (3-124)$$



$$N_0 = \frac{S - S'}{\lambda} \quad (3-125)$$

但是,由于伪距测量精度较低,即使取多次观测  $\lambda \cdot N_0$  的平均值也难以达到载波相位中测定整周未知数的精度要求。另外,电离层折射误差对码信号与载波相位的影响大小相同,符号相反,两者相减,电离层折射误差对整周未知数确定的影响扩大成 2 倍。

针对伪距码求整周未知数的两个弱点,Hatch<sup>[39]</sup>提出一个确定整周未知数的扩波技术,也就是通过  $L_1$  和  $L_2$  双频载波相位观测量的线性组合,产生一种波长较长的宽波。再由宽波相位观测量与 P 码相位观测量的综合处理求得整周未知数。该方法的基本思路为:

将  $L_1$ 、 $L_2$  载波相位观测量进行线性组合,若取组合后的频率:

$$f_m = f_1 - f_2 \quad f_n = f_1 + f_2$$

则相应的波长及整周未知数成为:

$$\lambda_m = \frac{c}{f_m} \quad \lambda_n = \frac{c}{f_n}$$

$$N_m = N_{L_1} - N_{L_2} \quad N_n = N_{L_1} + N_{L_2}$$

而对应的电离层折射引起的延迟量:

$$\text{相位延迟} \quad \delta\varphi_{l,m} = + \frac{C_I}{f_1 \times f_2} f_m \quad \delta\varphi_{l,n} = - \frac{C_I}{f_1 \times f_2} f_n$$

$$\text{时间延迟} \quad \delta t_{l,m} = + \frac{C_I}{f_1 \times f_2} \quad \delta t_{l,n} = - \frac{C_I}{f_1 \times f_2}$$

而将 P 码对应于载波相位进行相应的线性组合,得到虚拟的 P 码相位组合值,其对应的电离层折射的影响,大小与对载波相位组合的影响相等,符号相反,那么由载波相位组合方程有:

$$\lambda_m \cdot \varphi_{im}^i(t) = D_i^j(t) + C[\delta t_i(t) - \delta t^j(t)] - \lambda_m \cdot N_{im}^i + C \frac{C_I}{f_1 \times f_2} + \delta T_i^j(t) \quad (3-126)$$

虚拟 P 码相位观测量的组合方程为:

$$\lambda_n \cdot \varphi_{in}^i(t) = D_i^j(t) + C[\delta t_i(t) - \delta t^j(t)] + C \cdot \frac{C_I}{f_1 \times f_2} + \delta T_i^j(t) \quad (3-127)$$

方程(3-120)与(3-121)相减后,有:

$$-\lambda_m N_{im}^i = \lambda_m \cdot \varphi_{im}^i(t) - \lambda_n \cdot \varphi_{in}^i(t)$$

$$N_{im}^i = - \left[ \varphi_{im}^i(t) - \frac{\lambda_n}{\lambda_m} \varphi_{in}^i(t) \right] \quad (3-128)$$

对于 GPS 卫星  $L_1$ 、 $L_2$  载波相位有:

$$N_{im}^i = - \left[ \varphi_{im}^i(t) - \frac{17}{137} \varphi_{in}^i(t) \right] \quad (3-129)$$

由(3-128)可以看到,采用伪距双频法,仅观测一个历元,就可求出整周未知数。但是,采用此方法必须要已知 P 码,且有双频接收机。另外,由于多路径反射误差与波长成正比,所以还应注意多路径误差的消除。

#### 3.4.1.4 交换天线法

在某待定点上安置接收机天线作为固定点( $T_1$ ),并在其附近(5~10 m)处选择一个天线

交换点( $T_2$ ), 两点各安置一个天线后, 同步观测若干历元(1~2 min), 在保持对 GPS 卫星连续观测且天线高度不变的条件下, 将两天线相互交换, 并继续同步观测若干历元(1~2 min)。最后再把两天线恢复到原来位置, 此时, 假设在固定站  $T_1$  上的天线  $A$  和在交换点  $T_2$  上的天线  $B$ , 在历元  $t_1$  时刻同步观测了卫星  $p$  和  $q$ (见图 3-13), 则可得单差观测方程

$$\left. \begin{aligned} \Delta\varphi_{12}^p(t_1) &= \frac{1}{\lambda} [D_{12}^p(t_1) - D_1^p(t_1)] - \Delta N^p + f\delta t_{12}(t_1) \\ \Delta\varphi_{12}^q(t_1) &= \frac{1}{\lambda} [D_{12}^q(t_1) - D_1^q(t_1)] - \Delta N^q + f\delta t_{12}(t_1) \end{aligned} \right\} \quad (3-130)$$

同时可得相应的双差观测方程:

$$\Delta\varphi_{12}^{pq}(t_1) = \frac{1}{\lambda} [D_{12}^q(t_1) - D_{12}^p(t_1)] - \Delta N^q + \Delta N^p \quad (3-131)$$

式中:  $\Delta N^p = N_B^p(t_0) - N_A^p(t_0)$ ,  $\Delta N^q = N_B^q(t_0) - N_A^q(t_0)$ 。

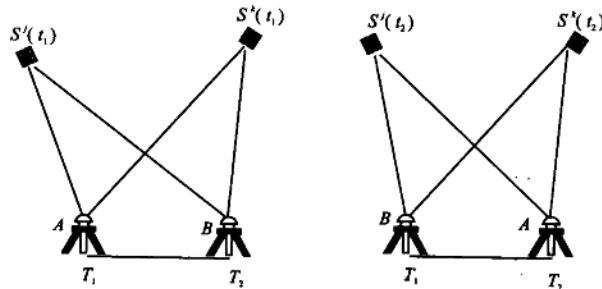


图 3-13 交换天线法

天线交换后, 对应于  $t_2$  历元的单差观测方程:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\varphi_{12}^p(t_2) &= \frac{1}{\lambda} D_{12}^p(t_2) + \Delta N^p + f\delta t_{12}(t_2) \\ \Delta\varphi_{12}^q(t_2) &= \frac{1}{\lambda} D_{12}^q(t_2) + \Delta N^q + f\delta t_{12}(t_2) \end{aligned} \right\} \quad (3-132)$$

相应的双差观测方程为:

$$\Delta\varphi_{12}^{pq}(t_2) = \frac{1}{\lambda} [D_{12}^q(t_2) - D_{12}^p(t_2)] + \Delta N^q - \Delta N^p \quad (3-133)$$

若将  $t_1$  和  $t_2$  历元的双差观测方程求和, 则有

$$\sum \Delta\varphi_{12}^{pq} = \frac{1}{\lambda} [D_{12}^q(t_2) - D_{12}^p(t_2) + D_{12}^q(t_1) - D_{12}^p(t_1)] \quad (3-134)$$

按此方法可对基线向量求解, 进而求得整周未知数。该方法与三差法有相类似之处, 但本方法是由同步观测的双差之和消除整周未知数, 方程性态良好, 因而求解基线向量精度较高, 且由于基线很短, 求差后较好地消除了卫星星历误差、大气折射误差, 因此解算的整周未知数精度较高, 且观测时间短、操作方便, 在准动态定位中常采用此方法。

### 3.4.2 周跳的探测与修复

由前面内容我们知道,只要接收机连续不断地跟踪卫星,接收机由积分多普勒计数可连续不断地记录跟踪期间载波相位的整周数的变化。但是,如果由于仪器线路的瞬间故障、卫星信号被障碍物暂时阻断、载波锁相环路的短暂失锁等因素的影响,引起计数器在某一个时间无法连续计数,这就是所谓的整周跳变现象(简称周跳)。周跳一旦发生,不仅这一次观测整周数是错误的,而且此后的所有的观测均会含有这一错误。因此周跳对测量成果的精度将产生显著影响,必须在数据预处理阶段探测出周跳发生的位置,并对其进行修正。事实上,在一个观测时间段中,往往难以避免会产生周跳,而且有时往往还不止一处,所以发现并修复周跳是处理载波相位测量数据必然会碰到的问题。对周跳的探测和修复已有很多种方法,这里仅介绍常用的几种方法。

#### 3.4.2.1 三差探测周跳法

一种有效地探测周跳的方法是利用载波相位观测值,在测站间、卫星间、历元间求三差来发现周跳。由于当测站  $A$  所接收的  $P$  卫星的信号在  $i-1$  与  $i$  历元之间发生了周跳  $\delta N$ ,则从第  $i$  历元起,与  $P$  卫星有关的双差观测值的整周数均改变了  $\delta N$ ,然而对于在历元间求三差后,仅是第  $i-1$  与  $i$  历元间的观测值改变了  $\delta N$ ,其余均不受影响。同时,由于三差观测值不仅消除了整周未知数,而且接收机钟差、卫星星历误差、大气折射误差等影响或是消除或是大大减弱,因而当不存在周跳时,误差方程式的常数项较小(一般小于 0.1 周),若某一常数的绝对值大于 1 周,则可以断定该观测值含有周跳,并取常数项中的整数为周跳修正值。

另外对于仅 1 至 2 周的小周跳,可以利用最小二乘平差的改正数发现。将周跳看作三差观测值中的粗差,用选权迭代法平差,在平差中对改正数大的观测值赋以较小的权,直至平差收敛,此时改正数大于 1 周的观测值即是周跳所在的位置及量值。

由于三差观测值并非实际的观测值,还应判断周跳究竟发生在哪个测站、卫星、历元的观测值上。对于历元,由于是按历元顺序依次求差的,若发现由第  $i-1$ 、 $i$  两历元求差的观测值含有周跳,而上一个三差是正常的,则可知周跳是发生在第  $i$  历元的双差观测值上。而对于在卫星间求差的双差观测值,可检查该历元求差的基星与其他卫星所组成的三差,若其是正常的,则可认为周跳发生在非基星的那颗卫星的单差观测值上。反之,若该基星与其他卫星所组成的三差不正确,则周跳发生在基星上。采用与双差类似的比较法,即可发现周跳在哪个测站上,并将三差法发现的周跳量改正到  $A$  测站、 $P$  卫星、 $t$  历元的观测值上,获得正确的观测值。

#### 3.4.2.2 用高次差及多项式探测周跳法

本方法利用在不发生周跳的情况下,载波相位的变化随卫星接收机的变化而变化,且是平缓而有规律的,周跳将破坏这一规律的特点,对卫星与接收机之间的相位观测值求高次差。一般而言,当在相位观测值间求 4~5 次差时,距离变化对整周数的影响已趋于零,这时的差值主要是接收机振荡器的随机误差引起的,因而具有随机特性(见表 3-2)。

表 3-2 相位观测值高次差

历元序号	$\varphi(t)$	1 次差	2 次差	3 次差	4 次差
$t_{30}$	475 833. 2251				
$t_{31}$	487 441. 978 4	11 608. 753 3	399. 813 8		
$t_{32}$	499 450. 545 5	12 008. 567 1	402. 321 2	2. 507 4	-0. 579 5
$t_{33}$	511 861. 433 8	12 410. 888 3	404. 248 9	1. 927 7	0. 963 9
$t_{34}$	524 676. 571 0	12 815. 137 2	407. 140 5	2. 891 6	-0. 272 1
$t_{35}$	537 898. 848 7	13 222. 277 7	409. 760 0	2. 619 5	-0. 421 9
$t_{36}$	551 530. 886 4	13 632. 037 7	411. 957 6	2. 197 6	
$t_{37}$	565 574. 881 7	14 043. 995 3			

如果在观测过程中发生了周跳,则上述的规律性被破坏,且高次差还具有“误差放大”现象,利用这一性质,便可发现周跳。例如在表 3-2 中的第  $t_{34}$  个历元的观测值发生了 100 周的周跳,那么在求 4 次差值时,相邻观测值的差值成为 400 周(见表 3-3,表中有 \* 号的数据为有周跳的数据),而由表 3-3 中的 5 次差的数值可以判断周跳的位置与数值。一般,一旦在 4 次差或 5 次差中出现数 10 周的值,就可断定观测值中出现了周跳。

表 3-3 含有周跳的观测值高次差

历元序号	$\varphi(t)$	- 1 次差	2 次差	3 次差	4 次差	5 次差
$t_{30}$	475 833. 2251					
$t_{31}$	487 441. 978 4	11 608. 753 3	399. 813 8			
$t_{32}$	499 450. 545 5	12 008. 567 1	402. 321 2	2. 507 4	-100. 579 7*	(-100°)
$t_{33}$	511 861. 433 8	12 410. 888 3	304. 248 9*	-98. 072 3*	300. 963 9*	401. 543 6*
$t_{34}$	524 576. 571 0*	12 715. 137 2*	507. 140 5*	202. 891 6*	-300. 272 1*	-601. 236*
$t_{35}$	537 798. 848 7*	13 222. 277 7	409. 760 0	-97. 380 5*	99. 578 1*	399. 850 2*
$t_{36}$	551 430. 886 4*	13 632. 037 7	411. 957 6	2. 197 6		(-100°)
$t_{37}$	565 474. 881 7*	14 043. 995 3				

观测值的周跳也可多项式拟合发现并修复周跳。可以根据若干个相位观测值拟合一个  $n$  阶多项式,并根据此多项式来预估下一个观测值且与实测值比较,从而发现周跳并修正周跳。由于观测值 4 次差或 5 次差已呈偶然误差特征,无法用函数加以拟合,所以多项式的阶数通常也只取 4 至 5 阶。本方法的实质与高次差法是相同的,只是采用的计算形式不同。

采用本方法时,由于受到接收机振荡器的随机误差影响,只能用于发现较大周跳,对于小于 5 周的小周跳则无能为力。

### 3.4.2.3 卫星间求差法

表3-4给出了载波相位观测值求4次差后的结果,其中卫星6从第46个观测值起均包含1周的周跳,但是,由于接收机振荡器的随机误差的影响也达几周,因而难以发现小周跳。而在同一测站同一时刻观测的若干卫星的载波相位观测值中,均包含相同的振荡器随机误差影响,因而对观测值的高次差再在卫星间求差则可消除接收机振荡器的随机误差的影响,因而有可能发现小的周跳。由表3-4可以看到,在卫星间求差后的残差均很小,但凡与含有周跳的6号卫星求差的45、46历元的差值均为3周,44、47均为1周。

本方法可以发现与卫星有关的周跳,如卫星信号被短暂中断。但却难以发现与接收机有关的周跳,此时可通过双差相位观测值的高阶差来发现周跳。

探测和修复周跳的方法还有很多种,在此就不再一一列举了,究竟采用何种方法应根据具体情况而定。

表3-4 相位观测值高次差同一时刻卫星间求差

历元序号	相位观测4次差值					
	6号卫星	8号卫星	11号卫星	6号卫星~8号卫星	6号卫星~11号卫星	8号卫星~11号卫星
40	-2.65	-2.87	-2.54	0.22	-0.11	-0.23
41	-0.12	0.08	0.02	-0.20	-0.14	+0.06
42	1.13	1.24	1.01	-0.09	+0.12	+0.23
43	-1.00	1.25	-0.92	+0.25	-0.08	-0.33
44	-0.05*	1.20	0.79	-1.25*	-0.84*	+0.41
45	+0.54*	-2.31	-2.63	-2.85*	-3.19*	0.32
46	+0.63*	+3.71	+3.56	-3.08*	-2.93*	+0.15
47	0.62*	-1.46	-1.71	+0.84	+1.09*	+0.25
48	2.14	1.85	+2.08	+0.29	+0.06	-0.23
49	0.14	0.01	-0.05	+0.13	+0.19	+0.06

## 3.5 GPS快速静态相对定位

载波相位静态定位测量中,之所以需要较长的观测时间(例如1~2h),其主要目的是为了可靠地确定载波相位的整周未知数,且通过研究发现,一旦能正确地确定整周未知数,就可以厘米级的精度实现相对定位。而继续延长观测时间,对定位精度的提高作用不明显。因此,如何快速准确地确定整周未知数是在保证达到一定精度和可靠性的基础上,缩短观测时间,提高作业效率的关键问题。从人们开始利用GPS进行测量以来,就一直试图解决这个问题,并提出了一系列的方法,如上节所介绍的伪距双频法、交换天线法等整周未知数快速解算法。但是由于这些方法在实际应用方面均有一定的缺陷,故一直未能在实际测量工作中得到广泛的应用。

1985年美国 Remondi B. W 提出了一种快速相对定位模式,其基本思想为:利用已确定的整周末知数,在整个测量期间,保持对卫星的连续不断跟踪,这样在新点上只需要进行 1~5 min 的观测便可精确定位。由于这一定位方法在形式上与动态相对定位相似,但实际上在每一新点上仍需静止观测,只是停留时间很短,因此人们将此快速相对定位法称为准动态相对定位法。

准动态相对定位法的主要缺点是,在接收机迁移过程中,必须保持对观测卫星的连续跟踪。一旦失锁,需重新确定整周末知数,因此作业效率难以保证。对此,E. Frei 和 G. Beutler 提出了“基于快速整周末知数解算(FARA)的快速静态定位”的方法。该方法实际上是一种快速确定载波相位的整周末知数的解算方法,因此当接收机在测站间迁移时,无需保持对所测卫星的连续跟踪。利用该方法只需要少量的 GPS 同步观测数据(数分钟的数据)即可实现定位,且定位精度与常规静态相对定位(90 min,甚至数小时)精度相当。该方法以其定位速度快、精度高且对接收机无特殊要求的特点,受到 GPS 用户的广泛重视,成为提高静态作业效率的一种重要技术手段。

### 3.5.1 准动态定位法

该方法是基于在保持对卫星连续不断跟踪的条件下,整周末知数不变这一基本事实,在作业过程中,首先采用某种方式快速确定整周末知数,并在随后的迁站过程中继续保持对卫星的连续跟踪,当接收机到达新的测站后就不再需要确定整周末知数,这样在新点上只需进行 1~2 min 的观测即可实现定位。

该方法通常采用相对定位的作业模式,可采用交换天线法来确定整周末知数,或者当有已知点时,采用将两台接收机分别置于已知点上进行短时间观测,利用已知坐标便可正确解出整周末知数。

整周末知数一旦确定,则可将一台接收机设置在已知点上不动进行连续观测,另一台接收机按预定计划,在保持对卫星连续跟踪的条件下,依次迁往各待定点(流动站),由于此时整周末知数没变且为已知的,因此在每个待定的流动点上只需要观测 1~2 min,就可实现厘米级精度的定位。

准动态定位的关键是迁站过程中必须保持对卫星的连续跟踪,因此该方法只适用于开阔地区,例如草原、沙漠、大平原等地区,而在山区、城区、树林等区域却不适用。因为信号一旦失锁,在附近又找不到两个可用的已知点来重新确定整周末知数,而将两台接收机调到一起,重新交换天线,也将使作业效率大大降低。正是因为如此,该方法作业不够方便,因而也严重地限制了该方法的应用。

### 3.5.2 快速整周末知数解算原理

1990年 E. Frei 和 G. Beuler 提出了基于 FARA (Fast Ambiguity Resolution Approach) 的快速静态相对定位法,其与常规确定整周末知数方法相比,所需的观测时间大大缩短,当两

站相距 10 km 以下,则仅需几分钟的观测数据,就可求得的整周未知数,且精度与常规静态相对定位精度大致相当。

FARA 的基本思想是:以数理统计理论的假设检验为基础,利用初次平差提供的所有信息,包括解向量、相应的协因数阵和单位权中误差,确定在某一置信区间整周未知数一切可能的整数解的组合,并依次将该整周未知数的组合作为已知值代入方程通过平差进行搜索,寻求平差后方差和最小的一组整周未知数作为最优解。

当两个测站上同步观测的时间较短,则由平差所求的整周未知数的实数解与其整数解偏差较大,而且其对应的中误差也较大,此时可在一定置信水平条件下,取整周未知数的置信区间为:

$$N_i - m_{N_i}t(\alpha/2) \leq N_{A_i} \leq N_i + m_{N_i}t(\alpha/2) \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (3-135)$$

式中:  $N_i$  为第  $i$  个整周未知数的实数解;  $N_{A_i}$  为第  $i$  个整周未知数整数解的备选值;  $t(\alpha/2)$  为显著水平  $\alpha$  和自由度的函数,可由  $t$  分布表中查得。

由于整周未知数实数解的中误差较大,此时落入(3-135)式所决定的置信区间内的整数可能不仅一个,且其真实的整周未知数的整数解,往往包含在其中,因此,应对  $r$  个整周未知数的一切可能的整数解组成的组合进行搜索,寻找一组最优解。

FARA 有别于一般利用假设检验求解整周未知数的重要一点在于,该方法不仅利用了中误差,而且还充分利用了整周未知数协方差阵所提供的信息来帮助进行整周未知数的确定。即由:

$$N_{ik} - t(\alpha/2) \cdot m_{N_{ik}} \leq N_{A_{ik}} \leq N_{ik} + t(\alpha/2)m_{N_{ik}} \quad (3-136)$$

协助进行整周未知数整数解的筛选。式中:  $N_{ik} = N_k - N_i$  为整周未知数的实数解之差;  $N_{A_{ik}} = N_{A_k} - N_{A_i}$  为整周未知数的整数解候选值之差;  $m_{N_{ik}} = m_0 \sqrt{g_{N_{ik}}}$  为整周未知数实数解之差的验后方差;  $g_{N_{ik}} = q_{N_{ii}} - 2q_{N_{ik}} + q_{N_{kk}}$ 。

(3-136)式对于所有可能组合的整数解向量中任两个整数之差,利用整周未知数实数解及其协方差阵的信息进行统计检验,剔除两整数之差不能通过检验的包含这两个整数的整数解组合,只有所有整数差值  $N_{A_{ik}}$  均能通过(3-136)检验的组合才保留下来。从而可大大减少须进行最优搜索的整数解候选值的个数,减少计算工作量。

另外,整周未知数最优解,除按上述方法进行检验外,还须通过假设检验,考察能否满足以下三个条件:

- (1) 其相应的基线向量解与初始平差结果应相一致。
- (2) 其相应的单位权方差与初始解结果的单位权方差应相一致。
- (3) 备选整周未知数进行基线解算时,最小单位权方差与次最小单位权方差应有明显差异。

只有能通过所有检验的该组整数组合,方可认为是整周未知数的最优解,如果上述三条检验有一个不能通过,则认为利用所提供的观测数据不能可靠地确定整数未知数。

### 3.5.3 快速整周未知数求解方法

(1) 利用基线两端测站上的观测数据,建立相应的误差方程:

$$V = (A \ B) \begin{bmatrix} \delta X \\ N \end{bmatrix} + L \quad (3-137)$$

其中:  $\delta X$  为测站点坐标未知数平差改正值;  $N$  为整周未知数;  $N = [N_1, N_2, \dots, N_r]^T$ 。经初始平差后,有  $Q_{NN}$  为整周未知数解的协因数阵,  $m_0^2$  为单位权方差,那么可求出整周未知数的协方差阵  $m_N = m_0^2 Q_{NN}$ 。

(2) 对于  $r$  个整周未知数的实数解  $N_i$ , 分别构成一个由(3-135)式所决定的置信区间,取区间内所有的整数值  $N_A$ , 设对于  $N_i$  在该区间共有  $n_i$  个  $N_A$  整数值。取  $r$  个整周未知数的整数值的所有组合,则其组合的总个数为:

$$n = \prod_{i=1}^r n_i = n_1 \cdot n_2 \cdots n_r \quad (3-138)$$

其后本应将上述的组合分别作为固定值,再由平差寻找最优解,但是上述组合的数目过大,导致计算工作量过大,例如,当观测 6 颗卫星即  $r=6$ , 取置信水平度  $\alpha=0.01$ , 自由度为 40, 从  $t$  分布表中可查出  $t(\alpha/2)=3.55$ , 这时如果初始平差得  $N_i=9.05, m_{N_i}=0.78$ , 则由(3-135)式可得:

$$6.28 \leq N_A \leq 11.8$$

由此可知  $N_i$  的整数取值为(6~12)。如果假设每颗卫星可能的整数取值均为 7 个,那么共有组合数  $n=7^6=117\ 649$  个。

(3) 由于需要检核的数量过大,则可利用(3-136)式对  $n$  个组合中的每一个组合中的任意两个元素间差值进行检验,以检核该整数向量是否与由协方差  $Q_{NN} \cdot m_0^2$  所提供的统计信息相容,只要有一个差值不能通过上述检验,则不仅舍去该整数解向量,而且还应剔除包含这两个整数的所有向量组合,无须对它们再作检验。因此,可有效地缩小搜索整周未知数最优值的范围。

(4) 寻求最优估值。将通过(3-136)式检验后的组合  $n$  中的每一组,作为整周未知数向量的固定值,分别代入(3-137)的误差方程式进行最小二乘平差,可得  $n$  组坐标未知数的解  $\delta X_j$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ) 以及相应的  $n$  个单位权中误差  $m_{0j}$ , 其中单位权中误差为最小的  $m_{0i}$  所对应的即为整周未知数的最优整数解向量,其对应的坐标平差值  $\delta X$  为待定点坐标解。

(5) 通过进一步进行三项检验,确定最优整数整周未知数解是否正确可靠。为检验最优坐标解  $X_{CA}$  与初次坐标解统计上是否一致,可构成下式所确定的坐标向量三维置信区域对  $X_{CA}$  进行检验:

$$(X_C - X_{CA})^T \cdot q_{X_C}^{-1} (X_C - X_{CA}^0) \leq 3m_0^2 \cdot F(3, f, 1 - \alpha) \quad (3-139)$$

式中:  $q_{X_C}$  为坐标解的协因数阵;  $m_0$  为单位权中误差;  $F$  表示以  $1-\alpha$  为置信水平,以 3 及  $f$  为自由度的  $F$  分布密度函数的单尾分位值。

为检验最优解单位权方差  $m_0^2$  和初次解中的  $m_0^2$  在统计观点上看是否一致,可作原假设:



$$H_0 : m_{\omega}^2 = m_0^2 \quad (3-140)$$

并构造相应统计量

$$T_1 = \frac{m_{\omega}^2}{m_0^2} \quad (3-141)$$

若原假设成立,  $T_1$  即为其自由度为  $f$  的  $\chi^2$  分布的概率密度, 如果  $T_1$  满足

$$\chi_{\alpha/2}^2(f) \leq T_1 \leq \chi_{1-\alpha/2}^2(f) \quad (3-142)$$

则可认为  $m_{\omega}^2$  和  $m_0^2$  在统计上相容。

为检验最优解的单位权中误差  $m_{\omega}$  与次最优解的单位权  $m_{\omega}'$  在统计上是否有显著的差异, 设原假设

$$H_0 : m_{\omega}^2 = m_{\omega'}^2 \quad (3-143)$$

备选假设为

$$m_{\omega}^2 \neq m_{\omega'}^2 \quad (3-144)$$

构成相应的检验统计量

$$T_1' = \frac{m_{\omega}^2}{m_{\omega'}^2} \quad (3-145)$$

$T_1'$  为两个自由度均为  $f$  的  $F$  分布的密度函数, 如果  $T_1'$  满足:

$$T_1' \leq F_{1-\alpha/2}(f, f) \quad (3-146)$$

则接受原假设, 认为两者方差相异不显著, 且最优解可能不止一个, 因而, 获得解不可靠。

在此三项检验中, 只要有一个不能满足, 则可认为通过探索所得的整周未知数整数最优解不可靠, 不可采用, 仍需对提供的数据进一步探测。

(6) 对于双频接收机, 在快速整周未知数确定过程中, 可利用双频观测值增加一项检验, 若令  $N_{L_1}$ 、 $N_{L_2}$  分别表示载波  $L_1$  和  $L_2$  的整周未知数的实数解向量, 而  $N_{A_{L_1}}$ 、 $N_{A_{L_2}}$  为相应的整周未知数的整数向量, 并令:

$$\Delta N_R = N_{L_1} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} N_{L_2}$$

$$\Delta N_A = N_{A_{L_1}} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} N_{A_{L_2}}$$

则在置信水平  $(1-\alpha)$  的情况下, 存在置信区间

$$\Delta N_R - t(\alpha/2) \cdot m_{N_R} \leq \Delta N_A \leq \Delta N_R + t(\alpha/2) \cdot m_{N_R} \quad (3-147)$$

若  $\Delta N_A$  不在置信区间, 那么凡包含  $N_{A_{L_1}}$ 、 $N_{A_{L_2}}$  的整数组合均可被剔除, 使搜索整周未知数最优估值的范围进一步缩小, 从而加快搜索进度。

### 3.5.4 快速静态定位作业方式

由于采用 FARA 技术, 静态相对定位观测的时间大大地缩短了, 一般当两测站间距离小于 10 km 时, 观测时间由原来的 1 小时缩短到数分钟, 这种作业常称为快速静态定位。此时, 若仍采用通常的同步环扩展作业方式, 将大大影响作业效率。因此对应采用相应的快速定位作业方式。目前常采用二种作业方式。

### 3.5.4.1 单基准站法(星形网)

在一段观测时间内,将一台接收机固定在某一测站上作为基准站,并一直保持对卫星的连续跟踪观测。同时,其他接收机在以基准站为中心的一定范围内流动设站进行观测,求定该点与基准点间的基线向量(如图 3-14)。该方式具有较高的作业效率,但可靠性不高。可采用两次设站的方式提供检核条件。但是,同一点两次设站,又大大地降低了作业效率。

### 3.5.4.2 双基准站法

在一段观测时间内,将两台接收机固定在某两测站上作为基准站,并一直保持对卫星的连续跟踪。同时,其余接收机在一定范围内流动设站观测,以求定该测站与两基准站间的基线向量(如图 3-15)。该作业方式一般只需设站一次,具有较高的作业效率和较好的可靠性。

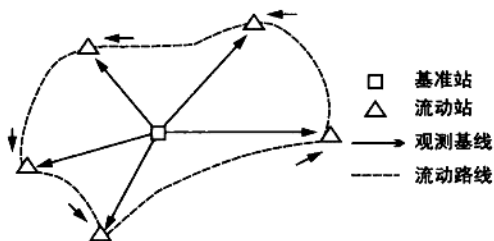


图 3-14 单基准站作业方式

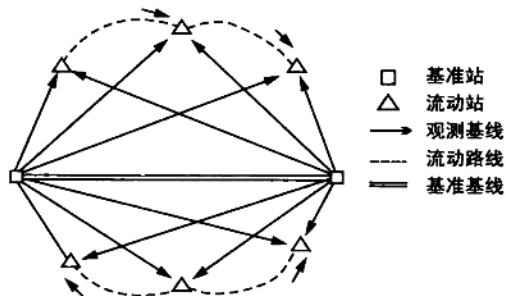


图 3-15 双基准站作业方式

## 思考题

- [1] 名词解释:绝对定位;相对定位;静态定位;动态定位;静态绝对定位;静态相对定位;整周未知数;整周跳变(周跳)。
- [2] 说明完整的载波相位观测值都有哪些部分组成?
- [3] 试写出伪距观测量的表达式(顾及大气折射影响),并说明各项符号的意义?
- [4] 设在某测站上做单点定位,静态观测了一小时,若历元间隔为 15 秒,问可组成多少伪距观测方程?列出其中 1 个?
- [5] 试写出 TDOP、PDOP、GDOP、VDOP、HDOP 的定义?
- [6] 简单论述卫星空间几何分布对三维定位精度的影响?
- [7] 试写出当基线长度小于 10km 时载波相位观测方程的表达式,并说明其中各项符号的意义?
- [8] 如何由载波相位观测方程转化为测相伪距观测方程?
- [9] 试写出单差、双差、三差观测方程?并说明它们各自有哪些特点?
- [10] 试述整周未知数的确定有哪几种方法?并说明各种方法的含义?
- [11] 试总结应用载波相位观测量的高差分析周跳的方法?
- [12] 如果在两个测站上同步观测 5 颗卫星,共观测 240 个历元,试分别计算可组成多少单差、双差和三差观测方程?它们又各含多少个未知参数?

# 第 4 章

## GPS 动态定位原理

GPS 动态测量是利用 GPS 卫星定位系统实时地测得连续运动着的物体的运动状态参数。如果所求的状态参数不仅包括三维坐标参数,还包含物体运动的三维速度,以及时间和方位等参数,这种动态定位也可称为导航。

GPS 动态定位方法主要有:单点动态绝对定位法和实时差分动态定位法。随着 GPS 定位技术(包括仪器设备和数据处理)的进一步完善,实时差分动态定位,从精度为米级的位置差分 and 伪距差分,发展到具有厘米级精度的 RTK 实时定位技术,以及可以在较大区域范围内实现实时差分动态定位的广域差分法、增强广域差分法。因此, GPS 动态定位有着极其广阔的应用领域,本章介绍 GPS 动态定位原理,以及差分 GPS 与相位差分 GPS 原理。

### 4.1 GPS 动态绝对定位原理

GPS 绝对定位主要是以 GPS 卫星和用户接收机天线之间的距离为基本观测量,并利用已知的卫星瞬时坐标来确定接收机天线对应的点位在协议地球坐标系中的位置。动态绝对定位是确定处于运动载体上的接收机在运动的每一瞬间的位置。由于接收机天线处于运动状态,故天线点位的坐标是一个变化的量,因此确定每一瞬间坐标的观测方程只有较少的多余观测(甚至没有多余观测),且一般常利用测距码伪距进行动态绝对定位。因此,其精度较低,一般仅有几十米的精度,在 SA 政策影响下,其精度甚至低于百米。通常这种定位方法只用于精度要求不高的飞机、船舶以及陆地车辆等运动载体的导航。

如 3.2 所述,如果在历元  $t$  时刻,观测了测站至卫星之间的伪距,则有

$$\tilde{D}_i^j(t) = D_i^j(t) + \delta I_i + \delta T_i + c \cdot \delta t_i - c \cdot \delta t^j \quad (4-1)$$

如果利用导航电文提供的改正量以及改正模型,对伪距观测量  $\tilde{D}_i^j(t)$  进行修正,并取

$$D_i^j(t) = \tilde{D}_i^j(t) - \delta I_i - \delta T_i + c \cdot \delta t^j \quad (4-2)$$

则(4-1)的观测方程可写为:

$$D_i^j(t) = \tilde{D}_i^j(t) - \delta I_i - \delta T_i + c \cdot \delta t^j \quad (4-3)$$

而

$$D_i^j(t) = \sqrt{(x^j - x_i)^2 + (y^j - y_i)^2 + (z^j - z_i)^2}$$

应用(3-46)式线性化后可得:

$$D_i^j(t) = D_{i_0}^j(t) - l_i^j(t)\delta X_i - m_i^j(t)\delta Y_i - n_i^j(t)\delta Z_i + c \cdot \delta t_i \quad (4-4)$$

假设在历元  $t$ , 由测站  $i$  同步观测  $j$  颗卫星,  $j=1, 2, \dots, n$ , 则可组成  $n$  个方程:

$$\left. \begin{aligned} D_i^1(t) &= D_{i_0}^1(t) - l_i^1(t)\delta X_i - m_i^1(t)\delta Y_i - n_i^1(t)\delta Z_i + c \cdot \delta t_i \\ D_i^2(t) &= D_{i_0}^2(t) - l_i^2(t)\delta X_i - m_i^2(t)\delta Y_i - n_i^2(t)\delta Z_i + c \cdot \delta t_i \\ &\dots\dots\dots \\ D_i^n(t) &= D_{i_0}^n(t) - l_i^n(t)\delta X_i - m_i^n(t)\delta Y_i - n_i^n(t)\delta Z_i + c \cdot \delta t_i \end{aligned} \right\} \quad (4-5)$$

当方程的个数(即观测的卫星数)大于 4 时, 应列误差方程, 按最小二乘原理求解位置的三维坐标, 即:

$$\begin{bmatrix} V_i^1(t) \\ V_i^2(t) \\ \vdots \\ V_i^n(t) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} l_i^1(t) & m_i^1(t) & n_i^1(t) & -c \\ l_i^2(t) & m_i^2(t) & n_i^2(t) & -c \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_i^n(t) & m_i^n(t) & n_i^n(t) & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta X_i \\ \delta Y_i \\ \delta Z_i \\ \delta t_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{i_0}^1(t) - D_i^1(t) \\ D_{i_0}^2(t) - D_i^2(t) \\ \dots\dots\dots \\ D_{i_0}^n(t) - D_i^n(t) \end{bmatrix} \quad (4-6)$$

用矩阵符号可表示为

$$V_i(t) = A(t)\delta X + L(t) \quad (4-7)$$

由最小二乘, 可求得:

$$\delta X = - [A(t)]^T \cdot A(t)]^{-1} \cdot [A(t)]^T \cdot L(t) \quad (4-8)$$

由此可得该位置的三维坐标:

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{i_0} \\ Y_{i_0} \\ Z_{i_0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta X_i \\ \delta Y_i \\ \delta Z_i \end{bmatrix} \quad (4-9)$$

式中:  $[X_{i_0}, Y_{i_0}, Z_{i_0}]$  为该点位置的初始(近似)坐标, 平差前需获得。在动态定位中, 一般可将前一时刻的点位坐标作为此时点位的初始坐标。因此, 关键是确定第一个点位坐标的精确值。由于该点的坐标的初始值难以较精确地求得, 因此需要通过一定的算法, 经过多次迭代求得第一点精确的三维坐标, 并为后续点位的解算提供初始坐标值, 这个迭代计算第一点位坐标值的过程也称为动态定位的初始化过程。

GPS 动态绝对定位一般采用测距码伪距定位方法。主要是该方法无论是在作业上, 还是计算上均简单易行。当然动态绝对定位也可采用载波相位伪距定位方法。由(3-92)式知, 载波相位观测方程为:

$$\lambda\varphi_i^j(t) = D_{i_0}^j(t) - [l_i^j(t) \quad m_i^j(t) \quad n_i^j(t)] \begin{bmatrix} \delta X_i \\ \delta Y_i \\ \delta Z_i \end{bmatrix} - \lambda N_i^j(t_0) + C[\delta t_i - \delta t^j] + \delta I_i^j(t) + \delta T_i^j(t) \quad (4-10)$$

如果设  $\tilde{D}_i^j(t)$  为经过电离层、对流层和卫星钟差改正后的观测值, 即:

$$\tilde{D}_i^j(t) = \lambda\varphi_i^j(t) - \delta I_i^j(t) - \delta T_i^j(t) + c \cdot \delta t^j \quad (4-11)$$

则方程(4-10)可写为:

$$\tilde{D}_i^j(t) = D_{i_0}^j(t) - l_i^j(t)\delta X_i - m_i^j(t)\delta Y_i - n_i^j(t)\delta Z_i + c \cdot \delta t_i - \lambda N_i^j(t_0) \quad (4-12)$$

相应的误差方程为：

$$V_i(t) = - \begin{bmatrix} l_i^j(t) & m_i^j(t) & n_i^j(t) & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta X_i \\ \delta Y_i \\ \delta Z_i \\ \delta t_i \end{bmatrix} - \lambda N_i^j(t_0) + L_i^j(t) \quad (4-13)$$

其中  $L_i^j(t) = D_i^j(t) - \tilde{D}_i^j(t)$ ，与测距码伪距观测方程相比，载波相位观测方程仅多了一个整周未知数，其余各项均完全相同。但是，正是由于观测方程中存在整周未知数， $t$  时刻，在  $i$  测站同步观测  $n^j$  颗卫星，则可列  $n^j$  个观测方程，方程存在  $4+n^j$  个未知数，因而难以利用载波相位进行实时定位。不过只要接收机保持对  $j$  卫星的连续跟踪，则整周未知数  $N_i^j(t_0)$  是一个不变的值。因此，只要通过一个初始化过程求出整周未知数  $N_i^j(t_0)$ ，且 GPS 接收机在载体运动过程中保持对卫星信号的连续跟踪，则仍可用于 GPS 动态绝对定位，且精度优于测距码伪距动态定位。但是，要在载体运动过程中保持对卫星的连续跟踪是较为困难的，所以，动态绝对定位中主要采用测距码伪距定位法。

## 4.2 GPS 动态相对定位与差分 GPS

虽然动态绝对定位作业简单，易于快速地实现实时定位，但是，由于定位过程中受到卫星星历误差、钟差及信号传播误差等诸多因素的影响，其定位精度不高，一般为 10~50 m 左右。如果存在 SA 政策的影响，则定位精度低于百米，难以满足高精度动态定位的要求，因此，也限制了其应用范围。

由于 GPS 测量误差具有较强的相关性，因此，可以在 GPS 动态定位中引入相对定位作业方法，即 GPS 动态相对定位。该作业方法实际上是用两台 GPS 接收机，将一台接收机安设在基准站上固定不动，另一台接收机安置在运动的载体上，两台接收机同步观测相同的卫星，通过在观测值之间求差，以消除具有相关性的误差，提高定位精度。而运动点位置是通过确定该点相对基准站的相对位置实现的，如图 4-1 所示。这种定位方法也叫差分 GPS 定位。

动态相对定位分为以测距码伪距为观测值的动态相对定位和以载波相位伪距为观测值的动态相对定位。

测距码伪距相对动态定位，由安置在点位坐标精确已知的基准接收机测量出该点到 GPS

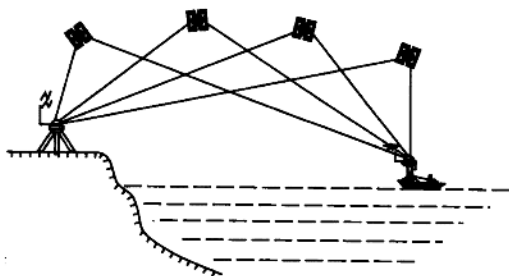


图 4-1 差分 GPS 定位

卫星的伪距  $\tilde{D}_i^j$ ，该伪距中包含了卫星星历误差、钟差、大气折射误差等各种误差的影响。此时，由于基准接收机位置已知，利用卫星星历数据可计算出基准站到卫星的距离  $D_i^j$ ， $D_i^j$  中仍包含有相同的卫星星历误差。如果将两个距离求差，即：

$$\delta D_i^j = \tilde{D}_i^j - D_i^j \quad (4-14)$$

则  $\delta D_i^j$  中包含钟差、大气折射误差，当运动

的用户接收机与基准站相距不太远(例如 $\leq 100$  km),两站的误差具有较强的相关性,因而,如果将距离差值作为距离改正数传送给用户接收机,那么,用户就得到了一个伪距改正值,可有效地消除或削弱一些公共误差的影响。运动用户接收机所在点的三维坐标与卫星之间的距离存在关系:

$$\bar{D}_i - \delta D_i = \sqrt{(X^j - X_k)^2 + (Y^j - Y_k)^2 + (Z^j - Z_k)^2} + C \cdot (\delta t_k - \delta t_i) \quad (4-15)$$

在(4-15)式包含4个未知数,即运动接收机在*t*时刻的三维坐标 $X_k, Y_k, Z_k$ 及基准站接收机(*i*)与运动站接收机(*k*)钟差之差,当同步观测卫星数等于或多于4颗时,即可求出惟一解,实现动态定位,有关测距码伪距差分GPS的原理及方法将在下一节中详细介绍。由于伪距差分可以消除大部分系统性误差,因而可以大大提高定位精度,当基准站与运动用户站之间距离小于100 km时,定位精度可达米级或亚米级。表4-1列出了GPS动态绝对定位与差分GPS定位的误差估计。

表4-1 GPS定位和差分GPS定位的误差估计

定位误差	GPS	DGPS
卫星星历误差/m	100.00	0
卫星钟误差/m	5.00	0
电离层/对流层延迟误差/m	6.41/0.40	0.15
接收机噪声/量化误差/m	2.44	0.61
接收机通道误差/m	0.61	0.61
多路径效应/m	3.05	3.05
UERE(rms)/m	100.4	3.97
水平位置误差(HDOP=1.5)/m	150.6	5.95
垂直位置误差(VDOP=2.5)/m	251.0	9.91

鉴于载波相位测量的精度要高于测距码伪距测量的精度,因此可将载波相位测量用于实时GPS动态相对定位。载波相位动态相对定位法,是通过将载波相位修正值发送给用户站来改正其载波相位实现定位,或是通过将基准站采集的载波相位观测值发送给用户站进行求差解算坐标实现定位。其定位精度在小区域范围内( $< 30$  km)可达1~2 cm,是一种快速且高精度的定位法。该动态相对定位原理及方法将在4.4中详细介绍。

动态相对定位中,根据数据处理方式不同,又分为实时处理和测后处理。数据的实时处理可实现实时动态定位,但是,在基准站和用户站之间应建立数据的实时传输系统,以便将观测数据或观测值的修正值及时传输给用户站。数据的测后处理,是在测后一并进行有关的数据处理,求得定位结果。这种处理数据的方法,不需实时传输数据,也无法实时求出定位结果,由于可以在测后对观测数据进行详细的分析,易于发现粗差。

### 4.3 差分GPS定位原理

差分GPS根据其组成系统的基准站的个数分为单基准站差分GPS,具有多个基准站的局部区域差分GPS和广域差分GPS三种不同的类型。而根据其发送的信息方式可分为位置差分、伪距差分、相位平滑伪距差分和相位差分,以及直接发送定位中各种误差源改正的差分。无论哪种差分,其基本工作原理均是由基准站发送改正数,用户站接收并用以对其测量结果进行改正,以获得精确的定位结果。所不同的是,发送改正数的具体内容不一样,其定位精度也不一样,差分方式的工作原理略有不同。本节主要叙述测距码动态相对定位的各类差分方式的工作

原理。

### 4.3.1 位置差分原理

位置差分 GPS 是一种最简单的差分方法。安置在已知点基准站上的 GPS 接收机,经过对 4 颗及 4 颗以上的卫星观测,便可实现定位,求出基准站的坐标 $(X', Y', Z')$ 。由于存在着卫星星历、时钟误差、大气折射等误差的影响,该坐标与已知坐标 $(X, Y, Z)$ 不一样,存在误差。即:

$$\left. \begin{aligned} \Delta X &= X - X' \\ \Delta Y &= Y - Y' \\ \Delta Z &= Z - Z' \end{aligned} \right\} \quad (4-16)$$

式中: $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$  为坐标改正数,基准站利用数据链将坐标改正数发送给用户站,用户站用接收到的坐标改正数对其坐标进行改正:

$$\left. \begin{aligned} X_k &= X_k' + \Delta X \\ Y_k &= Y_k' + \Delta Y \\ Z_k &= Z_k' + \Delta Z \end{aligned} \right\} \quad (4-17)$$

如果考虑数据传送的时间差而引起用户站位置的瞬间变化,则可写为:

$$\left. \begin{aligned} X_k &= X_k' + \Delta X + \frac{d(\Delta X + X_k')}{dt}(t - t_0) \\ Y_k &= Y_k' + \Delta Y + \frac{d(\Delta Y + Y_k')}{dt}(t - t_0) \\ Z_k &= Z_k' + \Delta Z + \frac{d(\Delta Z + Z_k')}{dt}(t - t_0) \end{aligned} \right\} \quad (4-18)$$

式中  $t$  为用户站定位时刻,  $t_0$  为基准站校正时刻。

经过坐标改正后的用户坐标已消去了基准站与用户站的共同误差,如卫星星历误差、大气折射误差、卫星钟差、SA 政策影响等,提高了定位的精度。

坐标差分的优点是传输的差分改正数较少,计算方法较简单,任何一种 GPS 接收机均可改装成这种差分系统。其缺点主要为:

(1) 要求基准站与用户站必须保持观测同一组卫星,由于基准站与用户站接收机配备的不完全相同,且两站观测环境也不完全相同,因此难以保证两站观测同一组卫星,并会导致定位所产生的误差可能会不很匹配,从而影响定位精度。

(2) 坐标差分定位效果不如伪距差分好。

### 4.3.2 伪距差分原理

伪距差分是目前应用最广泛的一种差分定位技术之一。该定位技术通过在基准站上利用已知坐标求出测站至卫星的距离,并将其与含有误差的测量距离比较,然后利用一个  $\alpha-\beta$  滤波器将此差值滤波并求出其偏差,并将所有卫星的测距误差传输给用户,用户利用此测距误差

来改正测量的伪距。最后,用户利用改正后的伪距求出自身的坐标。

由(3-43)知,测站  $i$  与卫星  $j$  之间在  $t$  时刻的伪距为:

$$\tilde{D}_i^j = D_i^j + c(\delta t_i - \delta t^j) + \delta I_i^j + \delta T_i^j + dD_i^j \quad (4-19)$$

式中符号意义与(3-43)式相同,  $dD_i^j$  为 GPS 卫星星历误差引起的距离偏差。

根据基准站的三维已知坐标和 GPS 卫星星历,可以算得该时刻两者之间的几何距离:

$$D_i^j = \sqrt{(X^j - X_i)^2 + (Y^j - Y_i)^2 + (Z^j - Z_i)^2}$$

故由基准站接收机测得的包含各种误差的伪距与几何距离之间存在差值:

$$\delta D_i^j = \tilde{D}_i^j - D_i^j \quad (4-20)$$

上式中的  $\delta D_i^j$  即为伪距的改正值,并将此值发送给用户接收机。用户接收机将测量的伪距  $D_i^j$  加上此项距离改正,便求得经过改正的伪距:

$$\tilde{D}'_i^j = \tilde{D}_i^j - \delta D_i^j \quad (4-21)$$

如果考虑信号传送的伪距改正数的时间变化率则有:

$$\tilde{D}'_i^j = \tilde{D}_i^j - \delta D_i^j - \frac{d\delta D_i^j}{dt}(t - t_0) \quad (4-22)$$

当用户运动站与基准站之间的距离小于 100 km,则有:

$$dD_i^j = dD_i^j \quad \delta I_i^j = \delta I_i^j \quad \delta T_i^j = \delta T_i^j$$

且

$$\delta t^j = \delta t^j$$

因此改正后的伪距  $\tilde{D}'_i^j$  为:

$$\tilde{D}'_i^j = \sqrt{(X^j - X_k)^2 + (Y^j - Y_k)^2 + (Z^j - Z_k)^2} + C \cdot \delta V_i \quad (4-23)$$

式中:  $\delta V_i$  为两测站接收机钟差之差。

如果基准站、用户站均观测了相同的 4 颗或 4 颗以上的卫星,即可实现用户站的定位。

由于伪距差分可提供单颗卫星的距离改正数  $\delta D_i^j$ ,因此用户站可选其中任意 4 颗相同卫星的伪距改正数进行改正,而不必要求两站观测的卫星完全相同,且伪距改正数是直接在 WGS-84 坐标系上进行的,是一种直接改正数,不必先变换为当地坐标,定位精度更高,且使用更方便。

由于差分定位依赖于两站公共误差的抵消来提高定位精度,误差抵消的程度决定了精度的高低。而误差的公共性在很大程度上依赖于两站距离,随着两站距离的增加,其误差公共性逐渐减弱,例如对流层、电离层误差。因此用户和基准站之间的距离对精度有着决定性的影响。下面讨论星历误差对距离测量的影响与两站之间距离的关系。

如图 4-2 所示,设用户与基准站相距  $s$  km,在不考虑其他误差影响的条件下,用户

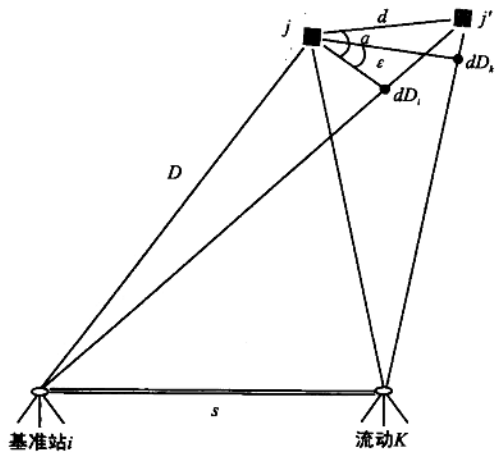


图 4-2 星历误差对距离测量的影响与两站之间距离的关系



测出该点至卫星的伪距为  $\tilde{D}_k$ , 基准站到卫星的几何距离为  $D_i$ , 由于星历误差的影响, 基准站包含误差  $dD_i$ , 用户的伪距测量误差为  $dD_k$ , 一般  $dD_i \neq dD_k$ , 因而伪距改正后仍存在剩余误差:

$$|e_{ik}| = |dD_i - dD_k| \quad (4-24)$$

而  $dD_i = d \cdot \sin \alpha, dD_k = d \cdot \sin(\alpha - \epsilon)$

代入(4-24)式有

$$|e_{ik}| = d \cdot |\sin \alpha - \sin(\alpha - \epsilon)| = d \cdot |\sin \alpha - (\sin \alpha \cdot \cos \epsilon - \sin \epsilon \cdot \cos \alpha)|$$

通常  $\epsilon$  均较小, 可令

$$\sin \epsilon \approx \epsilon \approx \frac{s}{D}, \cos \epsilon \approx 1$$

因而有  $|e_{ik}| = d \cdot |\sin \alpha - \sin \alpha + \epsilon \cdot \cos \alpha| = d \cdot \epsilon \cdot \cos \alpha = \frac{s \cdot d}{D} \cos \alpha$

即  $|e_{ik}| \leq \frac{s \cdot d}{D} \cos \alpha \quad (4-25)$

由(4-25)式可以看出: 用户站离基准站的距离越大, 伪距差分后的剩余误差越大, 定位精度越低。

### 4.3.3 相位平滑伪距差分

伪距差分实际上是在测站之间求伪距观测值的一次差, 因而消除了两伪距观测值中所含有的共同的系统误差, 但是却无法消除伪距观测值中所含有的随机误差, 从而限制了伪距差分定位的精度。载波相位测量的精度较测距码伪距测量的精度高 2 个数量级, 如果能用载波相位观测值对伪距观测值进行修正, 就可提高伪距定位的精度, 但是载波相位整周数无法直接测得, 因而难以直接利用载波观测值。虽然整周数无法获得, 但可由多普勒频率计数获得载波相位的变化信息, 即可获得伪距变化率的信息, 可利用这一信息来辅助伪距差分定位, 称为载波多普勒计数平滑伪距; 另外, 在两历元间求差, 可消除整周未知数, 可利用历元间的相位差观测值对伪距进行修正, 即所谓的相位平滑伪距。下面分别介绍这两种平滑伪距的基本思想。

#### 4.3.3.1 载波多普勒计数平滑伪距

由多普勒计数可得载波相位在一段时间内的整周数的变化值  $N(t-t_0)$ , 由此可计算伪距变化率  $\Delta D(i)$ , 利用伪距变化率可以平滑伪距改正数。设平滑区间为  $[1, N]$ , 区间中的距离变化量为:

$$\Delta D(i) = D(i+1) - D(i) \quad (4-26)$$

由基准站已知坐标求出的距离与实测距离可求出测距误差, 即:

$$\delta D(i) = \tilde{D}(i) - D(i) = \delta I(i) + \delta e(i) + V_r(i) \quad (4-27)$$

式中:  $\delta I(i)$  表示电离层误差,  $\delta e(i)$  表示除电离层误差以外的其他误差, 包括对流层、星历和卫星钟差等误差,  $V_r(i)$  表示测距码高频随机误差。

相应地由整周变化求出的距离变化所包括的误差为:

$$\delta \Delta D(i) = \tilde{\Delta D}(i) - \Delta D(i) = -\Delta \delta I(i) + \Delta \delta e(i) + V_p(i) \quad (4-28)$$

式中  $\Delta\delta I(i) = \delta I(i+1) - \delta I(i), \Delta\delta e(i) = \delta e(i+1) - \delta e(i)$

电离层对载波相位的延迟与对测距码的影响大小相等,符号相反,因此用 $-\Delta\delta I(i)$ 来表示。 $V_p(i)$ 表示载波相位测量噪声,由于载波相位测量比码伪距测量的精度高2个数量级,所以 $V_p(i)$ 很小,可以利用 $\delta\Delta D(i)$ 来改善 $\delta D(i)$ 的测量精度。设将从 $i$ 历元时刻至 $t$ 历元时刻的距离变化分成 $[1, N]$ 个平滑区间,则 $t$ 时刻的距离差为:

$$\delta D(t) = \delta D(i) + \sum_{j=i+1}^{i+N} \delta\Delta D(j) \quad (4-29)$$

则 
$$\overline{\delta D(t)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta D(t) \quad (4-30)$$

那么由(4-27)和(4-28)可得:

$$\begin{aligned} \delta D(t) &= \delta I(i) + \delta e(i) + V_r(i) - \sum_{j=i+1}^{i+N} \Delta\delta I(j) + \sum_{j=i+1}^{i+N} \Delta\delta e(j) + \sum_{j=i+1}^{i+N} V_p(j) \\ &= [2\delta I(i) - \delta I(i+N)] + \delta e(i+N) + V_r(i) + V_p(i) \end{aligned} \quad (4-31)$$

而(4-30)为:

$$\overline{\delta D(t)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [2\delta I(i) - \delta I(i+N)] + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\delta e(i+N)] + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V_r(i) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V_p(i) \quad (4-32)$$

若各次测量噪声相互独立,且各次测量噪声方差为 $\sigma^2(V_r)$ ,则 $\frac{1}{N} \sum_{j=i+1}^{i+N} V_r(i)$ 的方差为 $\left[\frac{\sigma(V_r)}{\sqrt{N}}\right]^2$ ,这表明平滑伪距使码伪距测量噪声下降了 $\sqrt{N}$ 倍。同理,载波测量噪声也下降了 $\sqrt{N}$ 倍,由于载波测量噪声远小于码测量噪声,因此可以忽略。

另外,如果在平滑区间内,电子浓度变化不大,可以假设: $\delta I(i) = \delta I(i+N)$ ,并令 $t=i+N$ ,则(4-32)可近似地表示为:

$$\overline{\delta D(t)} = \delta I(i+N) + \delta e(i+N) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V_r(i) = \delta I(t) + \delta e(t) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V_r(i) \quad (4-33)$$

由上式可知相位平滑可以大大降低码伪距测量噪声,提高差分GPS的定位精度。

#### 4.3.3.2 载波相位平滑伪距

根据载波相位测量原理知,在流动用户测站上在 $t$ 时刻的相位观测方程为:

$$\tilde{D}_i^j(t) = \lambda(N(t_0) + N(t-t_0) + \delta\varphi_i^j(t)) = D_i^j(t) + c\delta t_i^j + V_p \quad (4-34)$$

式中: $\tilde{D}_i^j(t)$ 为 $t$ 时刻用户站至卫星 $j$ 的伪距, $\delta t_i^j$ 为钟差, $V_p$ 为相位测量噪声, $N(t_0)$ 为整周未知数, $N(t-t_0)$ 为由 $t_0$ 至 $t$ 时刻相位整周变化值, $\delta\varphi_i^j(t)$ 为相位小数,在此令 $\varphi_i^j(t) = N(t-t_0) + \delta\varphi_i^j(t)$ 。

尽管(4-34)式中的整周未知数很难在短时间直接求解,但是,只要连续跟踪卫星,其为不变量。因此,取 $t_1, t_2$ 两历元时刻的相位观测量之差,则可消除整周未知数,即:

$$\delta D_i^j(t_1, t_2) = \lambda(\varphi_i^j(t_2) - \varphi_i^j(t_1)) = D_i^j(t_2) - D_i^j(t_1) + \delta t_i^j(t_2) - \delta t_i^j(t_1) + \delta\varphi_{i2} \quad (4-35)$$

式中已消除了整周未知数,且相位测量噪声之差为毫米量级的误差,相对伪距观测值而言,可视  $\delta\varphi_2=0$ 。因此,可采用历元间的相位差来平滑伪距。

在  $t_2$  时刻的伪距观测方程为:

$$\tilde{D}_k^i(t_2) = D_k^i(t_2) + c \cdot \delta t_k^i(t_2) + V_r \quad (4-36)$$

由(4-35)式可得:

$$D_k^i(t_2) = D_k^i(t_1) + \delta D_k^i(t_1, t_2) - c\delta t_k^i(t_2) + c\delta t_k^i(t_1)$$

将上式代入(4-36)式可得:

$$\tilde{D}_k^i(t_2) = D_k^i(t_1) + \delta D_k^i(t_1, t_2) + c \cdot \delta t_k^i(t_1) + V_r \quad (4-37)$$

进一步可将(4-37)写为:

$$\tilde{D}_k^i(t_2) = \tilde{D}_k^i(t_1) + \delta D_k^i(t_1, t_2) \quad (4-38)$$

那么,可利用  $t_2$  时刻差分伪距观测量经载波相位变化量回推  $t_1$  时刻的差分伪距观测量:

$$\tilde{D}_k^i(t_1) = \tilde{D}_k^i(t_2) - \delta D_k^i(t_1, t_2) \quad (4-39)$$

同样,假定有几个历元的观测值  $\tilde{D}_k^i(t_1), \tilde{D}_k^i(t_2), \dots, \tilde{D}_k^i(t_n)$ , 并利用载波相位观测值可求出从  $t_1$  到  $t_n$  的相位差值:  $\delta D_k^i(t_1, t_2), \delta D_k^i(t_1, t_3), \dots, \delta D_k^i(t_1, t_n)$ , 则可由以上两组观测值回推求出  $t_1$  时刻的伪距值:

$$\begin{cases} \tilde{D}_k^i(t_1) = \tilde{D}_k^i(t_1) \\ \tilde{D}_k^i(t_1) = \tilde{D}_k^i(t_2) - \delta D_k^i(t_1, t_2) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{D}_k^i(t_1) = \tilde{D}_k^i(t_n) - \delta D_k^i(t_1, t_n) \end{cases} \quad (4-40)$$

将所有推求值取平均,得到  $t_1$  时刻的伪距平滑值:

$$\overline{D}_k^i(t_1) = \frac{1}{n} \sum \tilde{D}_k^i(t_1) \quad (4-41)$$

$t_1$  时刻的伪距平滑值的误差的方差为单历元观测值的  $\frac{1}{n}$ , 即:

$$\sigma_b^2 = \frac{1}{n} \sigma_b^2 \quad (4-42)$$

由  $t_1$  时刻的伪距平滑值,可推得其他各时刻的平均值:

$$\overline{D}_k^i(t_n) = \overline{D}_k^i(t_1) + \delta D_k^i(t_1, t_n) \quad n = 1, 2, \dots, n \quad (4-43)$$

为了便于实时定位,可借助于滤波方法,给出另一种平滑形式:

$$\overline{D}_k^i(t_n) = \frac{1}{n} D_k^i(t_n) + \frac{n-1}{n} [D_k^i(t_{n-1}) + \delta D_k^i(t_{n-1}, t_n)] \quad (4-44)$$

## 4.4 载波相位差分原理

测距码差分 GPS,能以米级的精度实时地给出运动载体的位置,满足车辆、引航、水下测量等方面的动态定位的需要。但是测距码由于自身码结构及测量中随机噪声误差的限制,很难达到更高的精度。载波相位测量的噪声误差远远小于测距码测量噪声误差,在静态相对定位中

已实现  $10^{-6} \sim 10^{-8}$  的相对定位精度。但是,整周模糊度(整周未知数)求解需进行 1~2 h 长时间的静止观测,以及数据的事后处理,均限制了载波相位测量在动态定位中的应用,因此也限制了载波相位定位的应用范围。

由于快速逼近整周模糊度技术的出现,并且不断改进,使整周未知数可以较迅速地确定。而差分 GPS 的出现,使利用载波相位差分实时求解载体的位置成为可能,这种高速精密的载波相位差分测量技术也称为 RTK 技术(Real Time Kinematic)。

#### 4.4.1 载波相位差分 GPS 定位原理

载波相位差分 GPS 定位与伪距差分 GPS 原理相类似,其基本思想是:在基准站上安置一台 GPS 接收机,对卫星进行连续观测,并通过无线电传输设备实时地将观测数据及站坐标信息传送给用户站;用户站一方面通过接收机接收 GPS 卫星信号,同时还通过无线电接收设备接收基准站传送的观测数据,然后根据相对定位原理,实时地处理数据,并能实时地以厘米级的精度给出用户站的三维坐标。

载波相位差分 GPS 有两种定位方法,一种与伪距差分相同,基准站将载波相位的修正量发送给用户站,以对用户站的载波相位进行改正实现定位,该方法称为修正法。另一种是将基准站的载波相位发送给用户站,并由用户站将观测值求差进行坐标解算,这种方法称为求差法。下面分别介绍两种载波相位差分 GPS 定位的基本原理和基本思想。

##### 4.4.1.1 修正法

在载波相位测量中,卫星到测站点之间的相位差值主要由三部分组成:

$$\Phi_i = N_i^j(t_0) + N_i^j(t - t_0) + \delta\varphi_i \quad (4-45)$$

式中: $N_i^j(t_0)$ 为起始整周模糊度; $N_i^j(t-t_0)$ 为从起始时刻至观测时刻的整周变化值; $\delta\varphi_i$ 为测量相位的小数部分。

对(4-45)式乘以载波波长  $\lambda$ ,则可得卫星至测站点之间的距离:

$$\bar{D}_i = \lambda(N_i^j(t_0) + N_i^j(t - t_0) + \delta\varphi_i) \quad (4-46)$$

在基准站利用已知坐标和卫星星历可求得基准站到卫星之间的真实距离  $D_i^j$ ,则测量得到的伪距可表示为:

$$\bar{D}_i = D_i^j + c(\delta t_i - \delta t^j) + \delta I_i^j + \delta T_i^j + \delta M_i + V_i \quad (4-47)$$

式中: $\delta t_i$ 为接收机钟差, $\delta t^j$ 为卫星钟差, $\delta I_i^j$ 为电离层误差, $\delta T_i^j$ 为对流层误差, $\delta M_i$ 为多路径效应, $V_i$ 为 GPS 接收机噪声。

在基准站可求出的伪距改正数:

$$\delta D_i^j = \bar{D}_i - D_i^j = c(\delta t_i - \delta t^j) + \delta I_i^j + \delta T_i^j + \delta M_i + V_i \quad (4-48)$$

如果用  $\delta D_i^j$  对用户站伪距观测值进行修正,则:

$$\begin{aligned} \bar{D}_k - \delta D_k^j &= D_k^j + c \cdot (\delta t_k - \delta t_i) + (\delta I_k^j - \delta I_i^j) + \\ &(\delta T_k^j - \delta T_i^j) + (\delta M_k - \delta M_i) + (V_k - V_i) \end{aligned} \quad (4-49)$$

当基准站与用户站之间的距离小于 30 km,则:

$$\delta I_k^i = \delta I_i^j, \delta T_k^i = \delta T_i^j$$

因此(4-49)为

$$\begin{aligned} \tilde{D}_k^i - \delta D_i^j &= D_k^i + c \cdot (\delta t_k - \delta t_i) + (\delta M_k - \delta M_i) + (V_k - V_i) \\ &= \sqrt{(x^j - x_k)^2 + (y^j - y_k)^2 + (z^j - z_k)^2} + \Delta\delta D \end{aligned} \quad (4-50)$$

式中  $\Delta\delta D = c \cdot (\delta t_k - \delta t_i) + (\delta M_k - \delta M_i) + (V_k - V_i)$

将载波相位伪距测量值(4-46)代入观测方程(4-50),则可得:

$$\begin{aligned} \tilde{D}_k^i - \delta D_i^j &= \tilde{D}_k^i - \tilde{D}_i^j + D_i^j = D_i^j + \lambda(N_k^i(t_0) - N_i^j(t_0)) + \lambda(N_k^i(t - t_0) - \\ &N_i^j(t - t_0)) + \lambda(\delta\varphi_k^i - \delta\varphi_i^j) = \sqrt{(x^j - x_k)^2 + (y^j - y_k)^2 + (z^j - z_k)^2} + \Delta\delta D \end{aligned} \quad (4-51)$$

令:  $N^j(t_0) = N_k^i(t_0) - N_i^j(t_0)$  为起始整周数之差。在整个测量过程,只要保持卫星跟踪不失锁,则  $N^j(t_0)$  为常数。并令:  $\Delta\varphi = \lambda(N_k^i(t - t_0) - N_i^j(t - t_0)) - \lambda(\delta\varphi_k^i - \delta\varphi_i^j)$  为载波相位测量差值。

那么(4-51)式可表示为:

$$D_i^j + \lambda N^j(t_0) + \Delta\varphi = \sqrt{(x^j - x_k)^2 + (y^j - y_k)^2 + (z^j - z_k)^2} + \Delta\delta D$$

或  $D_i^j + \Delta\varphi = \sqrt{(x^j - x_k)^2 + (y^j - y_k)^2 + (z^j - z_k)^2} - \lambda N^j(t_0) + \Delta\delta D \quad (4-52)$

式中:  $N^j(t_0)$ 、 $X_k$ 、 $Y_k$ 、 $Z_k$  及  $\Delta\varphi$  为未知数,其中  $N^j(t_0)$  为起始整周数之差,只要不失锁即为常数,而用户坐标值为变化量,  $\Delta\delta D$  也为一个变化量。但是,无论接收机钟差之差、两站间多路径效应之差,还是两 GPS 接收机的噪声之差在两历元之间的变化量均小于厘米级动态定位允许的误差,因此在求解过程中可以视为常数。

由(4-52)可知,如果起始整周未知数一旦被确定,就可通过在基准站和用户站同时观测相同的 4 颗卫星,求解出用户站的坐标( $X_k, Y_k, Z_k$ )和  $\Delta\delta D$ ,实现定位。因此,如何快速求解起始整周未知数是实现载波相位差分动态定位的关键。

起始整周未知数的求解,不能靠增加观测卫星数求解,因为每增加一个观测卫星就会相应增加一个整周未知数,而只能通过增加观测历元数来实现求解。例如,在第 1 个历元观测了 4 颗卫星,可以得到 4 个观测方程,其中包括了 8 个未知数:  $X_k, Y_k, Z_k, \Delta\delta D, N^j(t_0)$  ( $j=1, 2, 3, 4$ )。在第 2 历元又得到 4 个观测方程,共有 8 个观测方程。但此时未知数又增加了 3 个坐标未知数,即共有 11 个未知数。当观测到 5 个历元后,可得 20 个如(4-52)式的观测方程,包含 20 个未知数:  $X_k, Y_k, Z_k$  ( $k=1, 2, \dots, 5$ ),  $N^j(t_0)$  ( $j=1, 2, 3, 4$ ),  $\Delta\delta D$ 。这样就可以对方程进行求解。如果采用快速确定整周未知数的方程求出  $N^j(t_0)$ ,就可以以厘米级的精度确定用户站的坐标,实现定位。

#### 4.4.1.2 求差法

所谓求差法就是将基准站观测的载波相位观测值实时地发送给用户观测站,在用户站对载波相位观测值求差,获得诸如静态相对定位的(3-97)、(3-108)和(3-113)的单差、双差、三差求解模型,并采用与静态相对定位类似的求解方法进行求解。两者不同的是,静态相对定位的主要任务是求解基线矢量,它的计算程序是:利用三差求解出近似的基线长度,再利用浮动双差法求解出整周未知数和基线矢量,而且对于短基线,通常还将整周未知数凑整后,再由

双差求解出更精密的基线矢量。而在动态相对定位中,主要要求的不是基线矢量,而是用户所在的实时位置,因此其定位程序为:

(1) 用户站在保持不动的情况下,静态观测若干历元,并将基准站上的观测数据通过数据链传送给用户站,按静态相对定位法求出整周未知数,这一过程即为初始化阶段。

(2) 将求出的整周未知数代入(3-108)的双差模型,此时双差方程中只包括  $\Delta X$ 、 $\Delta Y$ 、 $\Delta Z$  三个位置分量,只要 4~6 颗卫星的一个历元的观测值,就可实时地求解出三个位置分量。

(3) 将求出的  $\Delta X$ 、 $\Delta Y$ 、 $\Delta Z$  坐标增量加上已输入的基准站的 WGS-84 地心坐标  $X_i$ 、 $Y_i$ 、 $Z_i$ ,就可求得此时用户站的地心坐标,即:

$$\begin{bmatrix} X_k \\ Y_k \\ Z_k \end{bmatrix}_{\text{WGS-84}} = \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix}_{\text{WGS-84}} + \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} \quad (4-53)$$

(4) 利用已经获得的坐标转换参数,将用户站的坐标转换到当地的空间直角坐标系,并化算成实用的定位坐标成果。

由于求差模型可以消除或削弱多项 GPS 卫星观测误差,例如双差模型消除了卫星钟差、接收机钟差,大大削弱了卫星星历误差,大气折射误差,因此可以大大提高实时定位的精度。而在实时动态相位定位(RTK)中,关键是整周未知数的快速准确地求得,它决定着定位成果的准确可靠性,决定了动态定位速度及效率,而且决定了动态定位的方式,对此必须给予高度的重视。

### 4.4.2 整周未知数的动态求解

在 GPS 动态定位中,快速准确求得“整周未知数”的整数解较 GPS 静态定位具有更为重要的意义。由于在动态定位的短时间观测中,卫星位置相对接收机变化非常小(因为卫星轨道很高,约  $2 \times 10^4$  km),此时,准确求得整周未知数具有相当难度。如整周未知数为实数,则由载波相位观测值求得的 GPS 伪距观测值不准确,从而导致 GPS 基线解的精度不高,难以实现快速准确定位。反之,当整周未知数以整数正确确定,则高精度的载波相位观测值就可以作为高精度的伪距观测值,极大地提高基线解的精度,从而达到大大缩短观测时间的目的。因此整周未知数的快速准确确定,是 GPS 动态定位的瓶颈问题,成为目前 GPS 研究的热点领域之一。

各国学者已提出许多成功而有效地确定整周未知数的方法,如在 3.4 和 3.5 中已介绍的交换天线法、已知基线法、快速静态整周未知数解算法(FARA)等,这些方法均为静态整周未知数确定方法,因此在作业过程中均需初始化,且在作业过程中需保持对卫星的连续跟踪,造成作业的不便,并且影响到作业效率。因此,需要一种在运动过程中,以较少的观测值,较少的计算时间,迅速正确地解出整周未知数的方法。近年来,研究并提出了这种在运动过程中求解整周未知数的方法亦称 OTF(On the Fly Ambiguity Resolution),在此介绍几种具有代表性的 OTF 法。

#### 4.4.2.1 最小二乘搜索法

此法是由 Hatch 提出的,其基本思想是首先确定未知点的初始坐标,进而得到整周未知



高精度的初始值,通过对几分钟观测数据采取函数加密的搜索策略,直接确定点位的精确解。并利用位置精确解,可反算出一组整周未知数。模糊度函数法最大的优点是对周跳不敏感,它只用到相位观测的小数部分,因此与初始整周未知数无关,但与最小二乘搜索法相比,需要的搜索时间较长。

#### 4.4.2.4 综合法(AOTF)

近年来许多学者致力于研究整周未知数的综合解算法。该方法与一般的 OTF 法相类似,亦采用搜索的原理对整周未知数进行搜索,但是在搜索中综合利用各种观测信息和算法,以提高搜索的准确度和减少搜索的时间,通常其采用如下步骤求解:

- (1) 确定整周未知数的初值。
- (2) 以初值为中心建立搜索区域。
- (3) 给定整周未知数的某种搜索准则。
- (4) 采用某种计算模型及方法对整周未知数进行搜索,一旦整周未知数满足所给定的准则即为所求的解。

与一般的 OTF 算法相比,AOTF 法注意对以下几个方面进行了改进:

(1) 尽可能地提高求解整周未知数的效率,AOTF 注意充分利用 GPS 的定位信息。根据基线长短和电离层及观测噪声的特点选择合适的扩频工作信号(双宽巷、宽巷、半宽巷、窄巷以及无电离层影响的组合等)。对于单频接收机,一般考虑采用相位平滑伪距的算法。

(2) 在保留整周未知数具有的整数特性的同时,尽可能地消去各项误差的影响,因此,AOTF 一般均采用双差观测方程。

(3) 观测尽可能多的卫星。因为观测的卫星越多,多余的观测条件越多,可以达到对不符合要求的整周未知数快速剔除。AOTF 至少需同步观测 5 颗以上卫星,选择其中的几何结构较好的 4 颗卫星作为基本卫星组。

(4) 尽可能减少整周未知数的搜索区域,以减少计算时间。AOTF 采用了两项措施:一是提高初始基本整周未知数解的精度;二是减少整周未知数的搜索区域。

(5) 选择合适的检验项目和相应的检验阈值。AOTF 算法在搜索过程中前后共设定了 8 项检验,一项比一项严格,逐步地将搜索域内不正确的整周未知数组剔除。

(6) 算法优化。AOTF 充分利用已有诸多算法的优点,如对于双频接收机观测数据,AOTF 先利用扩频和相位平滑伪距计算出较精确的初始基本整周未知数值,利用最小二乘搜索法确定出整周未知数的变化范围后,用每组可能的整周未知数的组合,计算出对应的坐标值,采用模糊度函数法进行检验。对于仍不可区分的点,根据其坐标求出模糊度(整周未知数),以此值按固定差法重新求坐标值,选择其中具有最小验后方差的一组作为最终解,还可运用统计检验的方法判别该解的合理性。采用这种综合的搜索算法比单纯采用最小二乘搜索法或模糊度函数法快得多。

无论哪种方法求得的整周未知数解,都还应进行解的正确性和可靠性检验,即解的有效性。通常可采用对具有最小方差的一组整周未知数的方差与具有次小方差的一组整周未知数的方差之比进行  $F$  检验来确定解的有效性。

另外卡尔曼滤波法和 3.4 中介绍的伪距双频法也均可以在运动中求解整周未知数



(OTF), 卡尔曼滤波法是将初始整周模糊度作为状态向量之一, 在滤波过程中使其逐渐收敛, 但该方法需较长的收敛时间, 有时还容易发散。而伪距双频法仅需一个历元的观测数据就可解算出整周未知数, 但是需要 P 码双频观测值, 普通 GPS 接收机将难以应用此技术。

### 4.4.3 RTK GPS 定位设备

实时动态(RTK)测量系统的构成, 主要包括 GPS 接收设备、数据传输系统、软件系统三部分。

#### 4.4.3.1 GPS 接收设备

该系统中至少应包含两台 GPS 接收机, 其中一台安置在基准站上, 另一台或若干台分别安置在不同的流动用户站上。基准站应设在坐标已知的点上, 且观测条件较好的位置上。作业期间, 基准站的接收机应连续跟踪全部可见 GPS 卫星, 并将观测数据通过数据传输系统, 实时地发送给用户站(见图 4-3)。GPS 接收机可是单频或双频, 当系统中包含多个用户接收机时, 基准站上的接收机宜采用双频接收机。

#### 4.4.3.2 数据传输系统

基准站与用户站之间的联系是由数据传输系统(数据链)完成的, 数据传输设备是实现实时动态测量的关键设备之一, 它由调制解调器和无线电台组成。在基准站上, 调制解调器将有关的数据进行编码和调制, 然后由无线电发射台发射出去。用户站上的无线电接收台将其接收下来, 并由解调器将数据解调还原, 送入用户站上的 GPS 接收机中。

#### 4.4.3.3 实时动态测量的软件系统

软件系统的质量与功能, 对于保障实时动态测量的可行性、测量结果的精确性与可靠性, 具有决定性的意义。实时动态测量的软件系统应具有如下主要功能:

- (1) 整周未知数的动态快速解算。
- (2) 实时解算用户站在 WGS-84 地心坐标系下的三维坐标。
- (3) 求解坐标系之间的转换参数。
- (4) 根据转换参数, 进行坐标系统的转换。
- (5) 解算结果质量分析与精度评定。
- (6) 测量结果的显示与绘图。

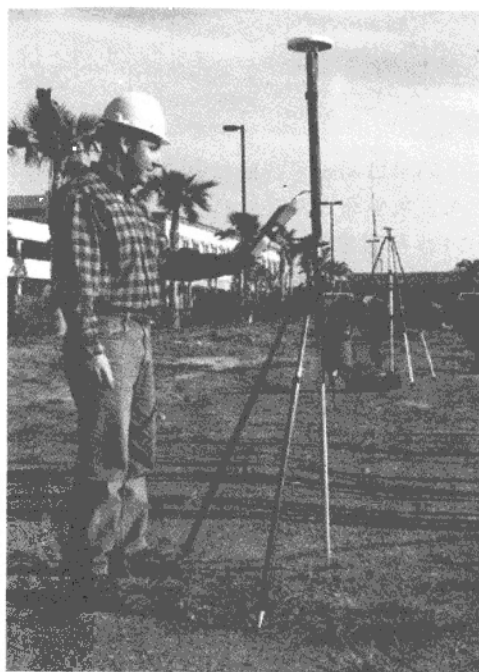


图 4-3 RTK 测量中的 GPS 接收设备

## 4.5 动态相对定位中的坐标转换

我们知道,差分 GPS 测量是在 WGS-84 地心坐标系进行,而各种测量工作和定位工作是在当地坐标系进行的,必须进行坐标转换。差分 GPS 在实时定位中,要求立即给出在当地坐标系的定位坐标,因此,坐标转换对于实现实时动态相对定位的实际应用具有十分重要的作用。

GPS 定位获得的是在 WGS-84 坐标系中的空间三维直角坐标值,如果已知转换参数,可直接利用坐标转换模型实现坐标转换,当转换参数未知时,在局部区域,应利用区域内同时已知 WGS-84 坐标系和地方坐标系中的坐标的若干公共点求出转换参数,再实现坐标转换。

在实用中,通常平面和高程是分开的,因此,坐标转换前,需将 GPS 成果投影到平面上(坐标投影方法见 6.3),再进行坐标转换,获得地方平面坐标系下的实用坐标。

### 4.5.1 三维空间直角坐标系下的坐标转换

空间直角坐标系的坐标转换,通常包括七个转换参数,即三个平移参数( $X_0, Y_0, Z_0$ ),三个旋转参数( $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ ),一个尺度参数(m)。这就是著名的布尔莎(Bursa)模型:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_T = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{WGS-84} + \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} + m \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{WGS-84} + \begin{bmatrix} 0 & -\epsilon_z & \epsilon_y \\ \epsilon_z & 0 & -\epsilon_x \\ -\epsilon_y & \epsilon_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{WGS-84} \quad (4-60)$$

如果已知 7 个转换参数,就可把转换参数输入坐标转换模型(4-60)求得地方坐标系下的空间直角坐标。而当转换参数未知时,则应用同时已知三个或三个以上点的地方坐标和 WGS-84 坐标来求解转换参数,其中 WGS-84 坐标可由静态相对定位获得。利用这些点(称为公共点)的两套坐标,代入(4-60)反求出坐标转换参数,即:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_T - \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{WGS-84} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & X & 0 & -Z & Y \\ 0 & 1 & 0 & Y & Z & 0 & -X \\ 0 & 0 & 1 & Z & -Y & X & 0 \end{bmatrix}_{WGS-84} \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \\ m \\ \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \end{bmatrix} \quad (4-61)$$

有关空间坐标转换的内容见 6.3。

另外对于米级精度的码相位伪距差分,且差分区域范围不大于  $100 \times 100 \text{ km}^2$ ,可以不考虑旋转和尺度转换参数,因而仅需一个点的两套坐标,求出平移参数即可实现坐标转换。平移参数为:

$$\left. \begin{aligned} X_0 &= X_T - X_{\text{WGS-84}} \\ Y_0 &= Y_T - Y_{\text{WGS-84}} \\ Z_0 &= Z_T - Z_{\text{WGS-84}} \end{aligned} \right\} \quad (4-62)$$

### 4.5.2 平面坐标转换

无论是 WGS-84 坐标, 还是地方坐标, 均对应着各自的几何椭球体, 可按照一定的椭球关系将 WGS-84 空间直角坐标的成果投影到高斯或 UTM 平面坐标系, 再利用平面坐标转换模型代入转换参数实现平面坐标转换, 平面坐标转换一般包括四个转换参数, 即二个平移参数( $X_0, Y_0$ ), 一个旋转参数( $\alpha$ ), 一个尺度参数( $m$ )。

#### (1) 转换参数已知。

当转换参数已知时, 可由坐标转换模型将坐标转换到实用的地方坐标系中的平面直角坐标:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}_T = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}_g + \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}_g m + \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}_g \quad (4-63)$$

#### (2) 转换参数未知, 已知若干公共点。

当两坐标系之间的转换参数未知, 但已知区域中若干点上的 WGS-84 坐标和地方坐标系的两套坐标, 则可利用这些公共点, 代入(4-63)式反求出平移、旋转和尺度参数。

当精度要求不是很高时, 可采用近似的方法求转换参数, 即利用区域中某点的两套高斯坐标之差求得平移参数。

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_0 &= x_{(i)T} - x_{(i)g} \\ \Delta y_0 &= y_{(i)T} - y_{(i)g} \end{aligned} \right\} \quad (4-64)$$

并利用某边长上方位角之差求得旋转参数:

$$\alpha = T_{(ij)T} - T_{(ij)g} \quad (4-65)$$

且由某边长之比获得尺度参数

$$m = S_{(ik)T} / S_{(ik)g} \quad (4-66)$$

将这些近似的转换参数代入到(4-63)式, 可求得转换到地方坐标系的坐标值。

另外, 如果某个转换参数过分小, 则在转换模型中不再考虑此参数。例如当不考虑尺度参数时(4-63)式的转换模型变为:

$$\left. \begin{aligned} X_T &= X_g + X_0 + X_g \cos\alpha + Y_g \sin\alpha \\ Y_T &= Y_g + Y_0 + Y_g \cos\alpha - X_g \sin\alpha \end{aligned} \right\} \quad (4-67)$$

如果仅考虑平移参数, 则转换模型成为:

$$\left. \begin{aligned} X_T &= X_g + X_0 \\ Y_T &= Y_g + Y_0 \end{aligned} \right\} \quad (4-68)$$

当然还有一种仅考虑平移和尺度参数, 不考虑旋转参数的转换模型。

(3) 仅已知地方坐标, 转换参数与 WGS-84 坐标均未知。

当在某区域范围内,仅已知某些控制点的地方坐标,而对应的 WGS-84 坐标系和转换参数均未知,这时,可采用静态相对定位的方法,观测获得这些点的 WGS-84 坐标系下的坐标。其中某一点应进行较长时间的观测,以求得该点的 WGS-84 坐标系下的绝对坐标,并由相对定位中的基线向量求得各点的 WGS-84 坐标。再由地方坐标和 WGS-84 坐标求转换参数。

在计算坐标转换参数时,应注意以下几个方面:

(1) 公共点最好选在区域的四周及中心,均匀分布。应防止将点均选在测区的一端,而求另一端转换后的坐标。

(2) 为了保证转换参数的精度及可靠性,最好选用 3 个以上的公共点求转换参数,且留下一二个公共点作为检核点。

(3) 当精度要求较低时(米级),利用 1 个公共点仅求平移转换参数,仍可满足要求。

## 4.6 广域差分 GPS

### 4.6.1 单站差分 GPS(SRDGPS)

差分 GPS 按照用户站所接收的改正信息的形式可分为单基准站差分 GPS 和具有多个基准站的区域差分 GPS 和广域差分 GPS。

单基准站差分 GPS 是仅仅根据一个基准站所提供的差分改正信息对用户站进行改正的差分 GPS 系统。因此在差分定位中,即使在某区域中设立有多个基准站,只要用户站仅接收一个基准站发送的改正信息,则仍是单基准站差分 GPS。

单基准站(简称单站)差分 GPS 系统由基准站、无线电数据通讯链和用户站等三部分组成。

#### 4.6.1.1 基准站

基准站的站坐标是已知的,站上一般需配备能同时跟踪视场中所有 GPS 卫星的接收机以及能计算差分改正数和编码的软件。单站差分 GPS 接收机大多是单频,也有部分基准站使用的是双频接收机和高精度的外接原子钟。

#### 4.6.1.2 无线电数据通讯链

编码后的差分改正信息是通过无线电通讯设备传送给用户的,将这种无线电通讯设备称为数据通讯链,它由基准站上的信号调制器、无线电发射机和发射天线以及用户站的差分信号接收机和信号解调器组成。

#### 4.6.1.3 用户站

用户站 GPS 接收机,可根据各用户站不同的定位精度及要求选择接收机。另外,用户站还应配有用于接收差分改正数的无线电接收机、信号解调器、计算软件及相应的接口设备等。

由于单站差分 GPS 系统中,用户站只接收一个基准站的改正信息来进行定位,因而系统

的可靠性较差。如果基准站出现故障,用户站便无法进行差分定位,而如果基准站给出的改正信号出错时,则用户站的定位结果就可能不正确。目前一般采用设置监控站的方法对改正信号进行检核,或用其他基准站提供的改正信息对某基准站提供的改正信息进行检核,以提高系统的可靠性。

单站差分 GPS 系统的优点是结构和算法都较为简单,技术上也较为成熟。但是该方法的前提是要求用户站误差和基准站误差具有强相关性,因此,定位精度将随着用户站与基准站之间的距离增加而迅速降低。此外,由于用户站只是根据单个基准站所提供的改正信息来进行定位改正,所以精度和可靠性均较差。

#### 4.6.2 局部区域差分 GPS(LADGPS)

在一个较大的区域布设多个基准站,以构成基准站网,其中常包含一个或数个监控站,位于该区域中的用户根据多个基准站所提供的改正信息经平差计算后求得用户站定位改正数,这种差分 GPS 定位系统称为具有多个基准站的局部区域差分 GPS 系统。

区域差分 GPS 提供的改正量主要有以下两种方式:

(1) 各基准站均以标准化的格式发射各自改正信息,而用户接收机根据接收到的各基准站的改正量,取其加权平均,作为用户站的改正数。其中改正数的权,可根据用户站与基准站的相对位置来确定。这种方式,由于应用了多个高速的差分 GPS 数据流,所以要求多倍的通信带宽,效率较低。

(2) 根据各基准站的分布,预先在网中构成以用户站与基准站的相对位置为函数的改正数的加权平均值模型,并将其统一发送给用户。这种方式不需要增加通信带宽,是一种较为有效的方法。

区域差分 GPS 系统较单站差分 GPS 系统的可靠性和精度均有所提高。但是由于数据处理是把各种误差的影响综合在一起进行改正的。而实际上不同误差对定位的影响特征是不同的,如星历误差对定位的影响是与用户站至基准站间的距离成正比的,而对流层延迟误差则主要取决于用户站和基准站的气象元素间的差别,其并不一定与距离成正比。因此将各种误差综合在一起,用一个统一的模式进行改正,就必然存在不合理的因素影响定位精度,且这种影响会随着用户站离基准站的距离增加而变得越大,导致差分定位的精度迅速下降。所以在区域差分 GPS 系统中,用户站不能距基准站太远,才能获得较好的精度。因而基准站必须保持一定的密度(小于 300 km)和均匀度,那么当区域覆盖的面积很大时,所需的基准站的数量将是十分惊人的。另外,区域差分 GPS 还存在于某些区域,例如海洋、我国西部的高山区和沙漠区中,难以建立永久性的基准站而导致形成一些空白区。

#### 4.6.3 广域差分 GPS 系统(WADGPS)

针对单站差分和区域差分 GPS 存在的问题,Chang Clongkee 博士提出了广域差分 GPS 的思想,将观测误差按误差的不同来源分解成星历误差、卫星钟差及大气折射误差,以提高定

位的精度、可靠性以及完备性。

### 4.6.3.1 广域差分 GPS 的基本思想

在一个相当大的区域中用相对较少的基准站组成差分 GPS 网,各基准站将求得的距离改正数发送给数据处理中心,由数据处理中心统一处理,将各种 GPS 观测误差源加以区分,然后再传送给用户。这样一种系统称为广域差分 GPS 系统。

广域差分 GPS 是通过对用户站的误差源直接的改正,达到削弱这些误差,改善用户 GPS 定位精度的目的。广域差分 GPS 系统主要对三种误差源加以分离,并单独对每一种误差源分别进行“模型化”。

(1) 星历误差:广播星历是一种外推星历,精度不高,且其影响与基准站和用户站之间的距离成正比,是 GPS 定位的主要误差来源之一。广域差分 GPS 依赖区域中基准站对卫星的连续跟踪,对卫星进行区域精密定轨,确定精密星历,取代广播星历。

(2) 大气延时误差(包括电离层和对流层延时):普通差分 GPS 提供的综合改正值,包含基准站处的大气延时改正,当用户站的大气电子密度和水汽密度与基准站不同时,对 GPS 信号的延时也不一样,使用基准站的大气延时量来代替用户站的大气延时必然会引起误差。广域差分 GPS 技术通过建立精确的区域大气延时模型,能够精确地计算出其对区域内不同地方的大气延时量。

(3) 卫星钟差误差:普通差分 GPS 利用广播星历提供的卫星钟差改正数,这种改正数仅近似反映了卫星钟与标准 GPS 时间的物理差异,残留的随机钟误差约有  $\pm 30$  ns,等效伪距为  $\pm 9$  m,如果考虑 SA 政策中的  $\delta$  抖动,其对伪距的影响达近百米。广域差分 GPS 可以计算出卫星钟各时刻的精确钟差值。

### 4.6.3.2 广域差分 GPS 系统的构成

该系统主要由主站、监测站、数据通信链和用户设备组成(图 4-4)。

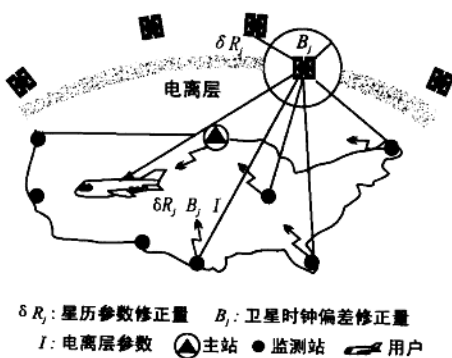


图 4-4 广域差分 GPS 的组成

(1) 主站:根据各监测站的 GPS 观测量,以及各监测站的已知坐标,计算出 GPS 卫星星历并外推 12 h 星历,建立区域电离层延时改正模型,拟合出改正模型中的 8 个参数;计算出卫星钟差改正值及其外推值,并将这些改正信息和参数传送到各发射台站。

(2) 监测站:一般设有一台铯钟和一台双频 GPS 接收机。各监测站将伪距观测值、相位观测值、气象数据等,均通过数据链实时地发射到主站。监测站的三维地心坐标应精确已知,监测站的数量一般不应少于 4 个。

(3) 数据链:数据通信包括两部分:监测站与主站之间的数据传递,广域差分 GPS 网与用户之间进行的数据通信。可采用数据通信网,如 Internet 网或其他数据通信专用网,或选用通信卫星。广域差分 GPS 网与用户之间的通信,由

于系统覆盖面广,作用范围大,故小型发射机难于满足需要,一般应选用短波或长波通信、调频副载波、卫星通信等方式。

(4) 用户设备:一般包括单频 GPS 接收机和数据链的用户端,以便用户在接收 GPS 卫星信号的同时,还能接收主站发射的差分改正数,并据以修正原始 GPS 观测数据,最后解出用户站的位置。

由以上 4 部分组成的广域差分 GPS 系统,其系统的工作流程为:

- (1) 在已知坐标的若干监测站上,跟踪观测 GPS 卫星的伪距、相位等信息。
- (2) 将监测站上测得的伪距、相位和电离层延时的双频量测结果全部传送到主站。
- (3) 主站在区域精密定轨计算的基础上,计算出卫星星历误差改正,卫星钟差改正及电离层时间延迟改正模型。
- (4) 将这误差改正用数据通信链传送到用户站。
- (5) 用户站利用这些误差改正来修正自己观测的伪距、相位和星历等,计算出具有较高精度的 GPS 定位结果。

#### 4.6.3.3 广域差分 GPS 系统的特点

广域差分 GPS 提供给用户的改正量,是每颗可见 GPS 卫星星历的改正量,时钟偏差修正量和电离层时延改正模型,其目的就是最大限度地降低监测站与用户站间定位误差的时空相关性和对时空的强依赖性,改善和提高实时差分定位的精度。

与一般的差分 GPS 相比,广域差分 GPS 具有如下特点:

(1) 主站、监测站与用户站的站间距离从 100km 增加到 200km,定位精度不会出现明显的下降,即定位精度与用户和基准站(监测站)之间的距离无关。

(2) 在大区域内建立广域差分 GPS 网比区域 GPS 网需要的监测站数量少,投资小。例如,在美国大陆的任意地方要达到 5 米的差分定位精度,使用区域差分 GPS 方式需要建立 500 个基准站,而使用广域差分 GPS 方式的监测站个数将不超过 15 个,其经济效益可见一斑。

(3) 广域差分 GPS 具有较均匀的精度分布,在其覆盖范围内任意地区定位精度大致相当,而且定位精度较区域差分 GPS 系统高。

(4) 广域差分 GPS 的覆盖区域可以扩展到区域差分 GPS 不易作用的地域,如海洋、沙漠、森林等。

(5) 广域差分 GPS 系统使用的硬件设备及通信工具昂贵,软件技术复杂,运行和维持费用较区域差分 GPS 高得多。

另外,近年来,美国联邦航空局(FAA)在广域差分 GPS 的基础上,提出利用地球同步卫星(GEO)采用  $L_1$  波段转发广域差分 GPS 修正信号,同时发射调制在  $L_1$  上的 C/A 码伪距的思想,称之为广域增强 GPS 系统(WAAS)(图 4-5)。这一系统完全抛弃了附加的差分数据

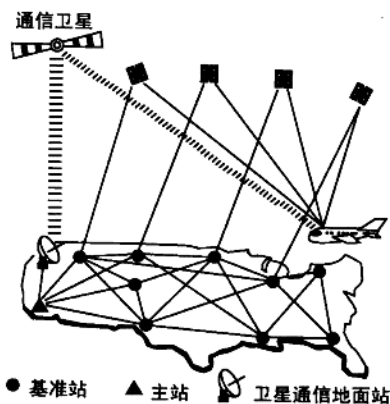


图 4-5 广域增强 GPS 系统

据通信链系统,直接利用 GPS 接收天线识别、接收、解调由地球同步卫星发送的差分数据链。同时,该系统利用地球同步卫星发射 C/A 码测距信号,增加测距卫星源,从而大大提高了系统的导航精度、可靠性和完备性。与此同时,为补充广域差分技术的不足,一种地基伪卫星技术(pseudolite)也迅速发展,它是在机场或重要地区附近建立少数具有精确地心坐标的固定站,模拟 GPS 卫星发射 L1 波段 C/A 码伪距信号,用于引导飞机进场、着陆或附近地面及空中运动载体的精确导航。

GPS 定位技术在导航方面有极为丰富和十分广阔的领域,特别是当其与数据传输和通信技术相结合时,充分地显示了这一导航技术的巨大潜力和广泛的应用前景。

### 思 考 题

- [1] 名词解释:GPS 动定位;导航;差分动态定位;LADGPS;WADGPS;WAAS?
- [2] 简述 GPS 动态定位的特点?
- [3] 试写出 GPS 动态定位的几种方法?
- [4] 试述实时单点动态定位的原理,并写出相应的观测方程和误差方程?
- [5] 实时差分动态定位有哪几种方法? 这些方法各有什么特点?
- [6] 试述位置差分 and 伪距差分的基本原理,并写出相应的观测方程?
- [7] 试述 RTK 的定位原理及 RTK 系统的组成?
- [8] RTK 定位中修正法的原理是什么? 写出 RTK 定位中求差法的计算过程?
- [9] 试述 WADGPS 的组成部分及各部分的作用?
- [10] LADGPS 的作业原理是什么?
- [11] WADGPS 有哪些特点?



# 第 5 章 GPS 控制网设计与外业工作

GPS 定位测量的高精度、高效率 and 低成本是以测前科学的技术设计和测后精确可靠的数据处理为基础的。GPS 测量的技术设计是按照 GPS 测量规范要求, 兼顾精度、可靠性、经济性等指标, 在测量前制定严格、科学、切实可行的布网及观测方案。

GPS 设计与施测的依据主要是测量任务书和 GPS 测量规范。由于 GPS 测量技术属一门新型的正在发展的技术方法, 因此规范中某些条款在执行过程中可以商榷。但是, GPS 测量规范仍旧是我们进行 GPS 测量的主要技术标准, 应按照 GPS 测量规范的统一标准, 进行 GPS 网的设计和制定外业工作方案。

## 5.1 GPS 网的构网特点与网形设计一般原则

### 5.1.1 GPS 网的构网特点

GPS 网的设计需要考虑诸多因素, 其核心是如何高质量低成本完成既定的测量任务。GPS 网的设计包括网形构造、精度、基准等方面的设计, 此外, 对于外业工作具体实施, 还应考虑观测时段、时间、测站位置的选择, 接收机的类型及数量, 交通后勤等因素。

目前的 GPS 控制测量, 基本上都是采用相对定位的测量方法。这就需要两台以及两台以上的 GPS 接收机在相同的时间段内同时连续跟踪相同的卫星组, 即实施所谓同步观测。同步观测时各 GPS 点组成的图形称为同步图形。

不同台数 GPS 接收机同步观测一个时段, 便组成以下各种不同同步图形结构, 如图 5-1。

总之, 当  $T$  台接收机同步观测获得的同步图形由  $n$  条基线构成, 其中  $n$  为:

$$n = T(T - 1)/2 \quad (5-1)$$

同步图形是构成 GPS 网的基本图形。而在组成同步图形的  $n$  条基线中, 只有  $(T-1)$  条是独立基线, 其余基线均为非独立基线, 可由独立基线推算得到。由此, 也就在同步图形中形成了若干坐标闭合差条件, 称为同步图形闭合差。由于同步图形是在相同的时间观测相同的卫星所获得的基线解构成的, 基线之间是相关的观测量。因此, 同步图形闭合差不能作为衡量精度的指标, 但它可以反映野外观测质量和条件的好坏。

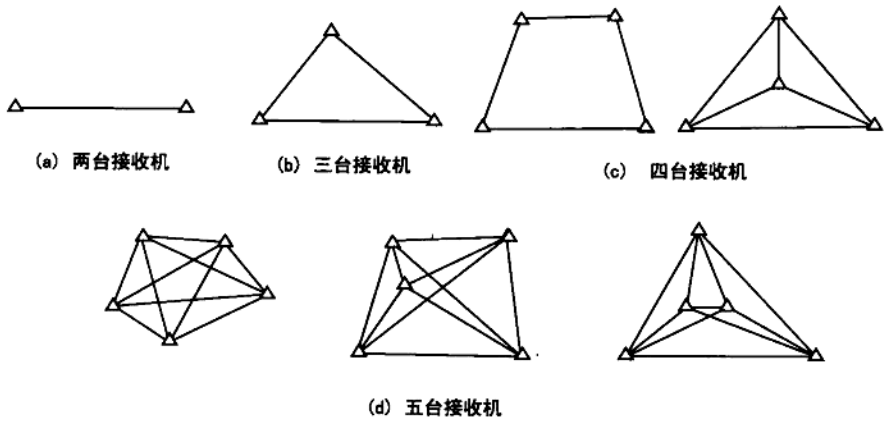


图 5-1 同步图形示例

在 GPS 测量中,与同步图形相对应的,还有非同步图形或称为异步图形,即由不同时段  
的基线构成的图形。由异步图形形成的坐标闭合差条件称为异步图形闭合差。当某条基线被两个  
或多个时段观测时,就有了所谓重复基线坐标闭合差条件。异步图形闭合条件和重复基线坐  
标闭合条件是衡量精度、检验粗差和系统差的重要指标。

### 5.1.2 GPS 控制网的构网方式

GPS 网是由同步图形作为基本图形扩展延伸得到的,当采用不同的连接方式,网形结构  
随之会有不同形状。GPS 网的布设就是如何将各同步图形合理地衔接成一个有机的整体,使  
之能达到精度高,可靠性强,且作业量和作业经费少的要求。

GPS 网的布设按网的构成形式分为:星形网、点连式网、边连式网、网连式网。按其作业方  
式可分为:同步作业方式网、基准站同步作业方式网(作业时始终保持不动的仪器站称为基准

站)、快速定位作业方式。下面我们按照布网的形  
状,逐一讨论各种构网方式的优劣,由此获得  
GPS 网形设计的一般原则。

#### 5.1.2.1 星形网

星形网的图形如图 5-2。

这种网形在作业中只需要两台 GPS 接收机,  
作业简单,是一种快速定位作业方式,常用在快速  
静态定位和准动态定位中。但由于各基线之间不  
构成任何闭合图形,所以其抗粗差的能力非常差。  
一般只用在工程测量、边界测量、地籍测量和碎部  
测量等一些精度要求较低的测量中。

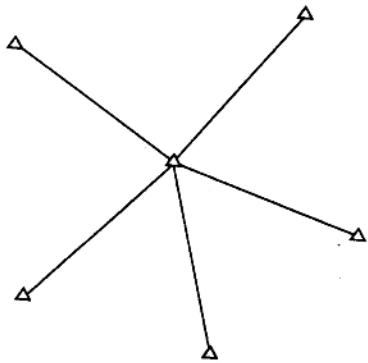


图 5-2 星形网图形

### 5.1.2.2 点连式网

所谓点连式网,就是相邻同步图形间仅由一个公共点连接成的网,其网形如图 5-3。

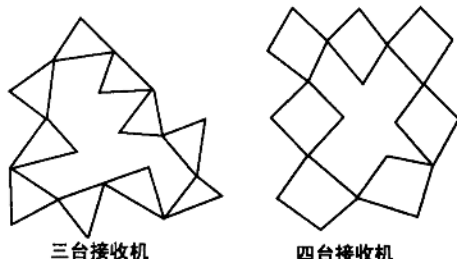


图 5-3 点连式 GPS 网

任一个  $m$  个点的网,由  $T$  台接收机观测,则完成该网至少要  $n$  个同步图形:

$$n = 1 + INT[(m - T)/(T - 1)] \quad (5-2)$$

例如,当  $m=30$  时,采用三、四、五台接收机最少同步图形分别为 15、10、8。

网的必要观测基线数为  $m-1$ ,而网中  $n$  个同步图形总共有  $n \times (T-1)$  条独立基线。

显然,以这种方式布网,没有或仅有少量的异步图形闭合条件。因此,所构成的网形抗粗差能力仍不强,特别是粗差定位能力差,网的几何强度也较弱。在这种网的布设中,可以在  $n$  个同步图形的基础上,再加测几个时段,增加网的异步图形闭合条件的个数,从而提高网的几何强度,使网的可靠性得到改善。

### 5.1.2.3 边连式网

边连式布网方法是指相邻同步图形之间通过两个公共点相连,即同步图形由一条公共基线连接。

任一个由  $m$  个构成的网,若用  $T$  台 ( $T \geq 3$ ) 接收机采用边连式布网方法进行观测,则完成该测量任务的最少同步图形个数  $n$  为:

$$n = 1 + INT[(m - T)/(T - 2)] \quad (T \geq 3) \quad (5-3)$$

相应观测获得的总基线数为  $n \times (T - 1) \cdot T/2 \quad (5-4)$

其中独立基线数为  $n \times (T - 1)$ ,而网的多余观测基线数为  $n \times (T - 1) - (m - 1)$ 。

边连式构网图形如图 5-4。

比较边连式与点连式布网方法,可以看出,采用边连式布网方法有较多的非同步图形闭合条件,以及大量的重复基线边,因此,用边连式布网方式布设的 GPS 网其几何强度较高,具有良好的自检能力,能够有效发现测量中的粗差,具有较高的可靠性。

### 5.1.2.4 网连式网

所谓网连式布网方法,是指相邻同步图形之间有两个以上公共点相连接,相邻同步图形之间存在互相重迭的部分,即某一同步图形的一部分是另一同步图形中的一部分。

这种布网方式通常要 4 台或更多的 GPS 接收机,这样密集的布网方法,其几何强度和可靠性指标是相当高的,但其观测工作量以及作业经费均较高,仅适用于网点精度要求较高的测量任务。

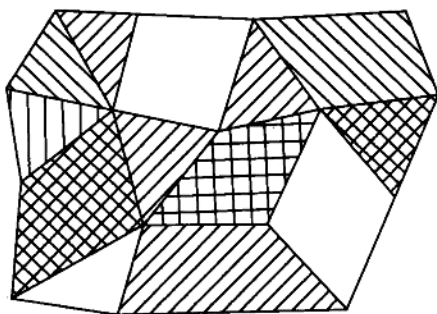


图 5-4 边连式网

### 5.1.3 GPS 控制网网形设计的一般原则

由各种构网方式可以看出,在 GPS 作业前,应设计出一种比较实用的既能满足一定精度、可靠性要求、又有较高经济指标的布网作业计划,这就是 GPS 网的优化设计问题,本章将就此问题给予专门讨论,在此仅给出网形设计的一般原则:

(1) GPS 网中不应存在自由基线。所谓自由基线是指不构成闭合图形的基线,由于自由基线不具备发现粗差的能力,因而必须避免出现,也就是 GPS 网一般应通过独立基线构成闭合图形。

(2) GPS 网中的结构等某一闭合条件中基线数不可过多,这将导致各边中粗差在求闭合差时相互抵消,不能起到发现粗差的作用。网中各点最好有三条或更多基线分支,以保证检核条件,提高网的可靠性,使网的精度、可靠性较均匀。

(3) GPS 网应以“每个点至少独立设站观测两次”的原则布网。这样不同接收机数测量构成的网之精度和可靠性指标比较接近。

(4) 为了实现 GPS 网与地面网之间的坐标转换,GPS 网至少应与地面网有 2 个重合点。研究和实践表明,应有 3~5 个精度较高、分布均匀的地面点作为 GPS 网的一部分,以便 GPS 成果较好地转换至地面网中。同时,还应与相当数量的地面水准点重合,以提供大地水准面的研究资料,实现 GPS 大地高向正常高的转换。

(5) 为了便于观测,GPS 点应选择交通便利、视野开阔、容易到达的地方。尽管 GPS 网的观测不需要考虑通视的问题,但是为了便于用经典方法扩展,至少应与网中另一点通视。

## 5.2 GPS 控制网的优化设计

控制网的优化设计,是在限定精度、可靠性和费用等质量标准下,寻求网设计的最佳极值。经典控制网优化设计包括零类设计(基准问题)、一类设计(图形问题)、二类设计(观测权问题)、三类设计(加密问题)。

与经典控制网相似,GPS 网的设计也存在优化的问题。但是,由于 GPS 测量无论是在测量方式上,还是在构网方式上均完全不同于经典控制测量,因而其优化设计的内容也不同于经典优化设计。

### 5.2.1 GPS 测量的特点以及优化设计的内容

#### 5.2.1.1 GPS 测量的特点

GPS 相对定位测量是若干台 GPS 接收机同时对天空卫星进行观测,从而获得接收机天线相位中心元间的基线向量。因此,各点之间不需通视。另外,在 GPS 测量中,当整周模糊度确定

之后,观测量的权不再随观测时间增长而显著提高,所以,经典控制网观测权的优化设计在GPS测量中已不再具有显著的意义。

GPS网是一种非层次结构,可一次扩展到所需的密度。网的精度不受网点所构成的几何图形的影响,即其精度与网中各点的坐标及边与边之间的角度无关,而只与网中各点所发出的基线数目及基线的权阵有关,这可以从GPS网的平差数学模型中看出。因此,经典控制网的一类优化设计(网的几何图形设计)在GPS网中成为网形结构设计。

经典控制网的必要起算数据包括:一点的坐标(用于网的定位),一条边的方位(用于网的定向),一条边的长度(用于确定网的尺度)。GPS网的观测量——基线向量本身已包含尺度和方位信息,因此,理论上只需要一个点的坐标对网进行定位。但是考虑到GPS观测量的尺度因子受卫星轨道误差影响较大,而且与地面网的尺度因子之间存在匹配问题,往往需提供一些边长基准,但是这并不是必要基准,而是削弱系统误差所采用的措施。

经典控制网中,误差具有累积性,网中各边的相对精度和方位精度不均匀。而GPS网中的基线向量均含有长度和方位观测值,不存在误差传递与积累问题。因而,网的精度比较均匀,各边的方位和边长之相对精度基本上在同一数量级。

### 5.2.1.2 GPS网优化设计的内容

GPS网不同于经典控制网的所有种种特点,决定了GPS网的优化设计不同于经典控制网的优化设计。

从GPS测量的特点分析可以看出,GPS网需要一个点的坐标为定位基准,而此点的精度高低直接影响到网中各基线向量的精度和网的最终精度。同时由于GPS网的尺度含有系统误差以及与地面网的尺度匹配问题,所以有必要提供精度较高的外部尺度基准。

由于GPS网的精度与网的几何图形结构无关,且与观测权相关甚小,而影响精度的主要是网中各点发出基线的数目及基线的权阵。文献[16]中提出了GPS网形结构强度优化设计的概念,讨论增加的基线数目、时段数、点数对GPS网的精度、可靠性、经济效益的影响。同时,经典控制网中的三类优化设计,即网的加密和改进问题,对于GPS网来说,也就意味着网中增加一些点和观测基线,故仍可将其归结为对图形结构强度的优化设计中去。

因此,综上所述,GPS网的优化设计主要归结为二类内容的设计:

(1) GPS网基准的优化设计。

(2) GPS网图形结构强度的优化设计,其中包括:网的精度设计,网的抗粗差能力的可靠性设计,网发现系统差能力的强度设计。

## 5.2.2 GPS网基准的优化设计

经典控制网的基准优化设计是选择一个外部配置,使得 $Q_{xx}$ 达到一定的要求,而GPS网的基准优化设计主要是对坐标未知参数 $X$ 进行设计。基准选取的不同将会对网的精度产生直接影响,其中包括GPS网基线向量解中位置基准的选择,以及GPS网转换到地方坐标系所需的基准设计。另外,由于GPS尺度往往存在系统误差,也应提出对GPS网尺度基准的优化设计。

### 5.2.2.1 GPS 网位置基准的优化设计

研究表明, GPS 基线向量解算中作为位置基准的固定点误差是引起基线误差的一个重要因素, 使用测量时获得的单点定位值作为起算坐标, 由于其误差可达数十米以上, 所以选用不同点的单点定位坐标值作为固定点时, 引起的基线向量差可达数厘米。因此, 必须对网的位置基准进行优选设计。

对位置基准的优化可以采用如下方案:

(1) 若网中点具有较准确的国家坐标系下或地方坐标系下的坐标, 可以通过它们所属坐标系与 WGS-84 坐标系的转换参数求得该点的 WGS-84 系下的坐标, 把它作为 GPS 网的固定位置基准。

(2) 若网中某点是 Doppler 点或 SLR 站, 由于其定位精度较 GPS 伪距单点定位高得多, 可将其联至 GPS 网中作为一点或多点基准。

(3) 若网中无任何其他类已知起算数据时, 可将网中一点多次 GPS 观测的伪距坐标作为网的位置基准。

### 5.2.2.2 GPS 网的尺度基准

尽管 GPS 观测量本身已含有尺度信息, 但由于 GPS 网的尺度含有系统误差, 所以, 还需要提供外部尺度基准。

GPS 网的尺度系统误差有两个特点: 一是随时间变化, 由于美国政府的 SA 政策, 使广播星历误差大大增加, 从而对基线带来较大的尺度误差; 另一是随区域变化, 由区域重力场模型不准确引起的重力摄动所造成。因此, 如何有效地降低或消除这种尺度误差, 提供可靠的尺度基准就是尺度基准优化问题。其优化有以下几种方案:

(1) 提供外部尺度基准。对于边长小于 50 km 的 GPS 网, 可用较高精度的测距仪( $10^{-6}$  或更高)施测 2~3 条基线边, 作为整网的尺度基准, 对于大型长基线网, 可采用 SLR 站的相对定位观测值和 VLBI 基线作为 GPS 网的尺度基准。

(2) 提供内部尺度基准。在无法提供外部尺度基准的情况下, 仍可采用 GPS 观测值作为 GPS 网的尺度基准, 只是对于作为尺度基准观测量提出一些不同要求, 其尺度基准设计如下(见图 5-5)。

在网中选一条长基线, 对该基线尽可能多地长时间、多次观测, 最后取多次观测段所得的基线的平均值, 以其边长作为网的尺度基准。由于它是不同时期的平均值, 尺度误差可以抵消, 它的精度要比网中其他短基线高得多。所以, 可以作为尺度基准。

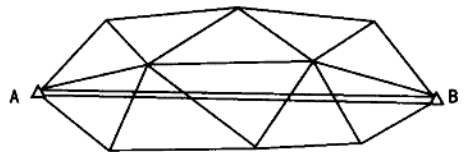


图 5-5 GPS 网尺度基准设计

以上讨论了 GPS 基线向量解算中位置基准及 GPS 尺度基准的选择与优化问题。此外, GPS 成果转换到地面实用坐标系中, 还存在一个转换基准的选择问题, 有关此问题将在下一章详细讨论。

### 5.2.3 GPS 网的精度设计

精度是用来衡量网的坐标参数估值受观测偶然误差影响程度的指标。网的精度设计是根据偶然误差传播规律,按照一定的精度设计方法,分析网中各未知点平差后预期能达到的精度。这也常被称为网的统计强度设计与分析。一般常用坐标的方差—协方差阵来分析,也常用误差椭圆(球)和相对误差椭圆(球)来描述坐标点的精度情况,或用点之间方位、距离和角度的标准差来定义。

对于 GPS 网的精度要求,较为通行的方法是用网中点之间的距离误差来表示,其形式为:

$$\sigma = \sqrt{a^2 + (b \cdot d)^2} \quad (5-5)$$

式中:  $\sigma$  为网中点之间距离的标准差(mm);  $a$  为固定误差(mm);  $b$  为比例误差系数( $10^{-6}$ );  $d$  为两点之间的距离(km)。

我国颁发的《GPS 测量规范》,根据网的不同用途,将 GPS 网划分成五个等级,其相应的精度列于表 5-1。

对于许多大地网、工程控制网仅有点之间距离的相对精度要求还不够,通常往往以网各点

表 5-1 GPS 网的等级划分

级别	固定误差 $a$ /mm	比例误差 $b/(10^{-6})$
A	$\leq 5$	$\leq 0.1$
B	$\leq 8$	$\leq 1$
C	$\leq 10$	$\leq 5$
D	$\leq 10$	$\leq 10$
E	$\leq 10$	$\leq 20$

点位精度,或网的平均点位精度作为表征网的精度特征指标,这种精度指标可由网中点的坐标之方差—协方差阵构成描述精度的纯量精度标准和准则矩阵来实现。纯量精度标准是选择一个描述全网总体精度的一个不变量作出不同选择,构成了不同的纯量精度标准,并用其来建立优化设计的精度目标函数。准则矩阵是将网中点的坐标方差—协方差阵构造具有理想结构

的矩阵,它代表了网的最佳精度分布,具有更细致描述网的精度结构的控制标准。但是对于 GPS 测量,正如前所述,GPS 测量精度与网的点位坐标无关,与观测时间无明显的相关性(整周模糊度一旦被确定后),GPS 网平差的法方程只与点间的基线数目有关,且基线向量的三个坐标分量之间又是相关的,因此,很难从数学的角度和实际应用出发,建立使未知数的协因数阵逼近理想的准则矩阵。

因此,目前较为可行的方法是给出坐标的协因数阵的某种纯量精度标准函数。

设 GPS 网有误差方程:

$$\begin{cases} V = A X + l \\ D_u = \sigma_0^2 P^{-1} \end{cases} \quad (5-6)$$

其中: $l$ 、 $V$  分别为观测向量和改正向量, $X$  为坐标未知参数向量, $P$  为观测值权阵, $\sigma_0^2$  为先验方差因子(在设计阶段取  $\sigma_0^2=1$ )。

由最小二乘可得参数估值及其协因数阵为:

$$\begin{cases} \hat{X} = (A^T P A)^{-1} A^T P l \\ Q_x = (A^T P A)^{-1} \end{cases} \quad (5-7)$$

优化设计中常用的纯量精度标准,根据其由  $Q_{\hat{x}}$  构成的函数形式的不同分为 4 类不同的最优纯量精度标准函数。

(1) A 最优性标准:

$$f = \text{Trace}(Q_{\hat{x}}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_l \rightarrow \min$$

$\text{Trace}$  表示迹,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l$  为  $Q_{\hat{x}}$  的非零特征值。

(2) D 最优性标准:

$$f = \text{Det}(Q_{\hat{x}}) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_l \rightarrow \min$$

$\text{Det}$  表示行列式之值。

(3) E 最优性标准:

$$f = \lambda_{\max} \rightarrow \min$$

$\lambda_{\max}$  为  $Q_{\hat{x}}$  的最大特征值。

(4) C 最优性标准:

$$f = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \rightarrow \min$$

在以上四个纯量精度最优性函数标准中, C、D、E 三个标准需要求行列式和特征值,而对于高阶矩阵这些值的计算都是比较困难的,因此,在实际中较少应用,多用于理论研究。相反, A 最优性标准函数求的是  $Q_{\hat{x}}$  的迹,计算简便,避免了特征值的计算,因此在实际中应用较多。

实际应用中还可以根据工程对网的具体要求,将 A 最优性标准变形为:

$$f = \text{Trace}(Q_{\hat{x}}) \leq C \quad (5-8)$$

## 5.2.4 GPS 网精度设计实例

对 GPS 进行网形设计,必须考虑精度要求, GPS 网精度设计可按如下步骤进行:

(1) 首先根据布网目的,在图上进行选点,然后到野外踏勘选点,以保证所选点满足本次控制测量任务要求和野外观测应具备的条件,进而在图上获得要施测点位的概略坐标。

(2) 根据本次 GPS 控制测量使用的接收机台数  $m$ ,按照上节所述布网原则,选取  $(m-1)$  条独立基线设计网的观测图形,并选定网中可能追加施测的基线。

表 5-2 GPS 模拟网坐标值

点号	纬度/°	经度/°	大地高/m
1	36.16	112.30	100
2	36.11	112.30	80
3	36.16	112.34	120
4	36.14	112.32	150
5	36.14	112.36	120
6	36.11	112.34	100
7	36.16	112.38	200
8	36.11	112.38	110

(3) 根据本次控制测量的精度要求,采用解析—模拟方法,依据精度设计模型,计算网可达到的精度数值。

(4) 采用逐步增减网中独立观测基线,直至精度数值达到网的精度指标,并获得最终网形及施测方案。

例 5.1 对一个由 8 个点组成的 GPS 模拟网,进行网的精度设计。该 8 个点的概略大地坐标由图上量出列于表 5-2, 点位及网形如图 5-6 所示。

在图 5-6 中,独立基线为 1~2, 1~3, 1~4,



2~4, 2~6, 3~4, 3~7, 5~6, 5~7, 5~8, 6~8, 7~8, 共 12 条 GPS 基线。

假定单位权方差因子  $\sigma_0^2=1$ , 以 1 号点作为基准点, 设计后的平均点位误差要求为 2.2 cm (即  $C=2.2$  cm)。

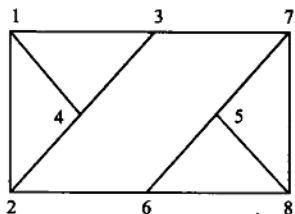


图 5-6 GPS 模拟网

设 GPS 基线边长、方位和高差的精度为:

	固定误差	比例误差
$D$ (边长)	5 mm	$1 \times 10^{-6}$
$A$ (方位)	3"	1"
$h$ (高差)	10 mm	$2 \times 10^{-6}$

根据由图 5-6 独立基线构成的 GPS 网形结构, 由式(5-7)可求出网的协因数阵  $Q_{xx}$ , 再由式(5-8)可求出网的平均协因数  $Trace(Q_{xx})$ , 进而求出网的平均点位误差  $\bar{m}^2 = \sigma_0^2 \sqrt{Trace(Q_{xx})}$ , 为 2.9 cm, 未达到设计精度要求。

网中增加新基线, 并重新计算协因数及平均点位误差:

增加基线	达到的平均点位误差(cm)
4~6	2.5
3~5	2.3
4~5	2.2

由计算结果可看出, 只要加测 3~5, 4~6 和 4~5 等 3 条基线后, 即可达到设计精度要求。因此, 最终设计图形及需测的独立基线如图 5-7 所示。

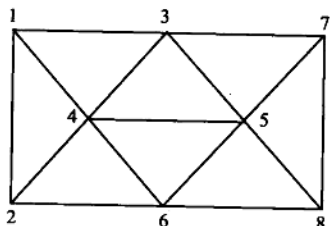


图 5-7 增加新基线后的 GPS 模拟网

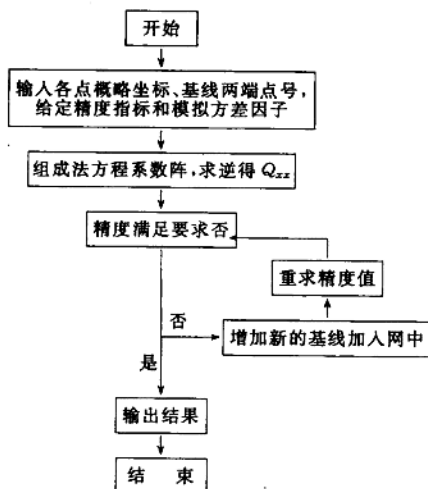


图 5-8 GPS 网的精度设计程序框图

精度设计应采用相应程序进行, 其程序框图见图 5-8。

## \* 5.3 GPS 网的可靠性设计

### 5.3.1 GPS 网可靠性概念

控制网的可靠性是用于衡量网辨别粗差、抵抗粗差影响能力的度量指标, 一般分为内可靠性指标和外可靠性指标。内可靠性是指在一定的置信水平和检验功效下, 可以发现网中存在的粗差的最小值, 即当粗差为多大时, 可以在网中发现并指出。外可靠性是指不可发现的粗差对

网的坐标未知参数的影响,即未能发现的粗差对测量成果的影响值。

GPS 控制网观测作业中,由于卫星轨道误差、信号发射和传播误差、周跳及整周未知数的确定均容易导致观测向量带有粗差。因此,在 GPS 控制网设计阶段,应考虑 GPS 网的可靠性,根据一定的可靠性指标标准,进行控制网的设计。GPS 网的可靠性取决于网的图形结构和基线向量的权阵,而不是取决于实现观测的本身。因此,可根据 GPS 网的特点,在网的设计阶段考虑网的可靠性,以使网具有发现尽可能小的粗差和减少不可发现的粗差对网的坐标未知参数的影响。

进行控制网的可靠性设计,首先应给出相应的可靠性设计标准,即可靠性指标。由于 GPS 控制网观测与传统控制网大相径庭,所以, GPS 控制网可靠性指标的确定,既有与传统控制网相同的地方,也有许多不同之处。本节中,首先给出传统控制网可靠性设计指标,然后根据 GPS 网的特点,给出 GPS 控制网可靠性指标,最后给出顾及可靠性标准的 GPS 网的优化设计。

### 5.3.2 传统控制网可靠性设计标准

由于含有粗差的观测值的大小以及其出现的位置事先并不知道,所以,只有采用假设检验的方法,对粗差进行估计定位判断。

由式(5-6)和(5-7)知:

$$V = A\hat{X} - l \quad (5-9)$$

$$\hat{X} = (A^T P A)^{-1} A^T P l \quad (5-10)$$

式中 
$$l = L - F(X^0) \quad (5-11)$$

则 
$$V = [A(A^T P A)^{-1} A^T P - E]l = -R \cdot l \quad (5-11a)$$

按协因数传播律有:

$$Q_w = Q - A(A^T P A)^{-1} A^T \quad (5-11b)$$

式中:  $R = E - A(A^T P A)^{-1} A^T P = Q_w P$  为秩亏阵,其秩等于独立未知参数的个数。

由(5-11)式可以看出,若以未知数的真值代入函数  $F(X)$ ,则  $\epsilon = l = L - F(\hat{X})$  代表观测值的真误差。则可得观测值改正数和真误差  $\epsilon$  的关系式为:

$$V_{n \times 1} = -R \cdot \begin{matrix} \epsilon \\ n \times n \\ n \times 1 \end{matrix} \quad (5-12)$$

不难看出,矩阵  $R$  包含了观测值真误差作用于改正数上的影响的全部信息。某一观测值的误差不仅对其自身的改正数有影响,还对所有观测值的改正数有不同程度的影响。同样,所有观测的误差也都作用于任一观测值改正数之上。

设观测值  $L_i$  的误差  $\epsilon_i$  对其自身改正数的影响为:

$$V_i^* = - (R)_{ii} \cdot \epsilon_i = -r_i \cdot \epsilon_i \quad (5-13)$$

其中:  $0 \leq r_i \leq 1, \sum_{i=1}^n r_i = r, r$  为网中总的多余观测数。

通常将  $r_i$  称为多余观测分量,它代表该观测值在总的多余观测数中所占的分量,当  $r_i = 0$  时,表示该观测值为必要观测;若  $r_i = 1$ ,则表示该观测完全为多余,即未参与平差,误差全部反

映在改正数中,可靠率为 100%。一般来说,观测值误差只能部分地反映在其改正数中。当没有多余观测( $r_i=0$ )时,所有  $r_i$  均为零,此时,所有观测值的误差将全部作用到解算的未知数中去,而所有的观测值的改正数为零,任何误差均无法检测发现,可靠率为 0。

如果某一观测量  $L_i$  含有粗差  $\nabla \hat{l}_i$ ,则可利用(5-13)式,由平差得到的观测值改正数来估计  $\nabla \hat{l}_i$  的大小:

$$\nabla \hat{l}_i = -\frac{V_i}{r_i} \quad (5-14)$$

按协方差传播律,由(5-13)式可得:

$$\sigma_{v_i}^2 = r_i \cdot \sigma_{\nabla l_i}^2 \text{ 或 } \sigma_{v_i} = \sqrt{r_i} \cdot \sigma_{\nabla l_i} \quad (5-15)$$

假设观测值  $L_i (i=1, 2, \dots, n)$  只存在一个粗差,即  $\nabla l = (0, 0, \dots, \nabla l_i, 0, \dots, 0)^T$ ,且已知观测值的单位权方差  $\sigma_0^2$ ,则可对  $V_i$  求出标准化值,即:

$$\omega_i = \frac{V_i}{\sigma_{v_i}} = \frac{V_i}{\sqrt{r_i} \cdot \sigma_{\nabla l_i}} \quad (5-16)$$

观测值  $l_i$  的粗差  $\nabla l_i$  引起检验量  $\omega_i$  的分布函数产生相应的平移  $\Delta \omega_i = \delta_i$ ,该平移量在统计学上称为非中心化参数  $\delta_i$ ,其可由  $\Delta V_i = -r_i \nabla l_i$  求出:

$$\delta_i = \Delta \omega_i = \frac{-\Delta V_i}{\sqrt{r_i} \delta_i} = \frac{\nabla l_i \sqrt{r_i}}{\delta_i} \quad (5-17)$$

当观测值  $l_i$  无粗差时,  $\omega_i$  服从标准正态分布,  $\omega_i \sim N(0, 1)$ ; 当观测值  $l_i$  含有一个数值为  $\nabla l_i$  的粗差,则  $\omega_i$  的密度函数产生大小为  $\delta_i$  的位移,即有:  $\omega_i \sim N(\delta_i, 1)$ 。因此,可通过对统计量  $\omega_i$  按照标准正态分布的弃真和纳伪概率(显著水平  $\alpha$  和检验功效  $1-\beta$ )进行检验,确定  $L_i$  中是否含有粗差。

零假设

$$H_0: \nabla l_i = 0, \omega_i \sim N(0, 1)$$

备选假设

$$H_{a_1}: \nabla l_i \neq 0, \omega_i \sim N(\delta, 1)$$

给定显著水平  $\alpha$ ,查正态分布表得到相应的检验临界值  $K$ ,若  $\omega_i > K$ ,则认为观测值  $l_i$  可能含粗差。

一个观测值含有多大的粗差  $\nabla l_i$ ,它才能以规定的检验功效  $\beta_0$  在显著水平为  $\alpha_0$  的检验中被发现呢?显然,这取决于备选假设  $H_{a_1}$  的非中心化参数  $\delta_0 = \delta_0(\alpha_0, \beta_0)$ (参见图 5-9)。当给定

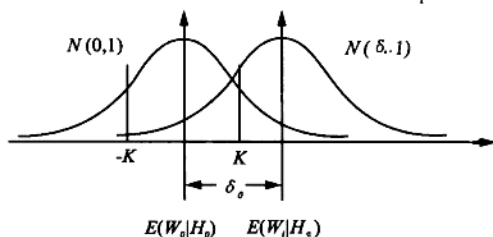


图 5-9 统计量  $\omega_i$  的检验

$\delta_0$  后,利用式(5-17)便可求出观测值  $L_i$  可发现粗差的下界值为:

$$\nabla l_{0i} = \delta_i \frac{\delta_0}{\sqrt{r_i}} \quad (5-18)$$

令  $\delta_{0i}' = \delta_0 / \sqrt{r_i}$ ,  $\delta_{0i}'$  可称为可控性数,则上式可写为:

$$\nabla l_{0i} = \delta_{0i}' \delta_i$$

$\delta_{0i}'$  是一个倍数值,它表示观测值  $l_i$  的粗差至少为其中误差的多少倍时,该粗差才能在显著水

平为  $\alpha_0$  的检验中,以检验功效为  $\beta_0$  的概率被发现。可发现粗差的下界(最小值)  $\nabla l_0$ ,即为观测值的内部可靠性。由式(5-17)知观测值的多余观测分量愈小,则所能发现观测值粗差的下界值愈大,即粗差愈难发现,内可靠性愈差。因此,通常把多余观测分量  $r_i$  (或  $\delta_{0i}$ ) 作为判断内部可靠性的指标。

由式(5-11a)知  $r_i$  的大小取决于  $P$  和  $A$ ,即观测值的权和控制网设计矩阵。因此,可以在测量控制网优化设计过程中计算出,作为评定可靠性的依据。

在传统控制网中,有两种评定标准。当控制网  $r_i$  分布比较均匀,则可采用平均可靠率  $r_A$ 。

$$r_A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i = \frac{r}{n} \quad (5-19)$$

$r_A$  从平均意义上反映网中全部观测值的可靠率。如果网中有可靠率很小的观测值,说明存在薄弱环节,这是控制网设计中应予避免的,因此,用显著可靠率  $r_s$ :

$$r_s = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i}} \quad (5-20)$$

$r_s$  使网中存在的可靠率大小悬殊的情况得到反映。

而网的外部可靠性,即不可发现的粗差对平差结果的影响,由式(5-10)知:

$$\nabla_0 X = (A^T P A)^{-1} A^T P \nabla l_0 = Q_x A^T P \nabla l_0 \quad (5-21)$$

由于  $\nabla_0 X$  与所取坐标系有关,并非不变量,而观测值作为参数的函数却与所取坐标无关。因而,取标准化长度变量  $\bar{\delta}_0$  来表示外可靠性。

$$\bar{\delta}_0 = \sqrt{\frac{1}{\sigma_0^2} \nabla_0 X^T Q_x \nabla_0 X} \quad (5-22)$$

顾及(5-11a)和(5-18)式不难导出,第  $i$  个观测值不可发现的粗差对平差未知数的影响为:

$$\bar{\delta}_{0i} = \delta_0 \sqrt{\frac{1-r_i}{r_i}} \quad (5-23)$$

综上所述可以看出,控制网的内、外可靠性是一致的。 $r_i$  愈小,内、外可靠性愈差。

### 5.3.3 GPS 控制网可靠性设计标准

#### 5.3.3.1 GPS 基线向量的多余观测分量

由(5-11)式知  $R = QvvP$ , 即  $r_i = (QvvP)_{ii} = R_{ii}$  为第  $i$  个观测值的多余观测分量,它反映了观测值的误差作用于观测值改正数的程度。而且它直接影响着控制网的内可靠性及外可靠性。

由于 GPS 观测值是基线向量,每条基线包含了三个坐标差向量,该三个向量之间是相关的。那么 GPS 控制网中的多余观测分量,应以观测基线向量为基础。假定各 GPS 基线之间是相互独立,则有:

$$R = Q_{vv}P = \begin{bmatrix} Q_{v_{11}} & Q_{v_{12}} & \cdots & Q_{v_{1n}} \\ Q_{v_{21}} & Q_{v_{22}} & \cdots & Q_{v_{2n}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Q_{v_{n1}} & Q_{v_{n2}} & \cdots & Q_{v_{nn}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & & & 0 \\ & P_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & P_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{v_{11}}P_1 & Q_{v_{12}}P_2 & \cdots & Q_{v_{1n}}P_n \\ Q_{v_{21}}P_1 & Q_{v_{22}}P_2 & \cdots & Q_{v_{2n}}P_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Q_{v_{n1}}P_1 & Q_{v_{n2}}P_2 & \cdots & Q_{v_{nn}}P_n \end{bmatrix} \quad (5-24)$$

其中  $Q_{v_{ij}}, P_i (i, j=1, 2, \dots, n)$  为  $3 \times 3$  阶的子矩阵块。因此, 可定义第  $i$  条基线的多余观测分量为  $3 \times 3$  阶矩阵。其形式为:

$$R_i = (Q_{v_{ii}}P_i) = \begin{bmatrix} R_{\Delta x, \Delta x_i} & R_{\Delta x, \Delta y_i} & R_{\Delta x, \Delta z_i} \\ R_{\Delta y, \Delta x_i} & R_{\Delta y, \Delta y_i} & R_{\Delta y, \Delta z_i} \\ R_{\Delta z, \Delta x_i} & R_{\Delta z, \Delta y_i} & R_{\Delta z, \Delta z_i} \end{bmatrix} \quad (5-25)$$

若基线向量  $L_i = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)^T$  有误差向量  $(\epsilon_{\Delta x}, \epsilon_{\Delta y}, \epsilon_{\Delta z})^T$ , 则该误差向量作用于基线的改正数大小为:

$$V_i^* = (V_{\Delta x}^* \quad V_{\Delta y}^* \quad V_{\Delta z}^*)^T = R_i \cdot (\epsilon_{\Delta x}, \epsilon_{\Delta y}, \epsilon_{\Delta z})^T \quad (5-26)$$

由(5-25)和(5-26)式可看出,  $R_i$  的三个主对角线上元素的大小分别反映了基线  $i$  的三个坐标差分量的误差或粗差作用于各自的坐标差改正数的程度, 其值愈大则粗差愈容易被发现。而  $R_i$  中的非主对角元素的大小则反映基线之中的某一坐标差分量的粗差对该基线另一坐标分量改正数的影响大小。其值的大小仍然反映了基线粗差作用于该基线观测值改正数自身的程度。依据 GPS 基线多余观测分量的这一特性, 同时考虑到多余观测分量在内、外可靠性中将起到的作用, 也为了研究问题的方便, 取  $R_i$  阵的三个行向量的二范数取平均后定义一条基线的多余观测分量值:

$$r_{L_i} = \frac{1}{3} \left( \left( \sum_{K=\Delta X}^{\Delta Z} R_{\Delta X K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \sum_{K=\Delta X}^{\Delta Z} R_{\Delta Y K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \sum_{K=\Delta X}^{\Delta Z} R_{\Delta Z K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (5-27)$$

### 5.3.3.2 GPS 控制网的内可靠性指标

由前所述, 给出了控制网内可靠性和外可靠性设计标准:

$$\nabla_0 l_i = \sigma_{l_i} \cdot \frac{\delta_0}{\sqrt{r_i}}, \quad \delta_0 = \delta_0 \sqrt{\frac{1-r_i}{r_i}}$$

这些标准仅适用于单个粗差且观测值之间不相关的情况, 即是单个一维备选假设下的可靠性。由于 GPS 控制网中的观测值是基线向量, 即由三个相关的坐标差组成的向量  $(\Delta X, \Delta Y, \Delta Z)$ 。所以, GPS 控制网内、外可靠性的讨论必须考虑单个多维备选假设下的情况。那么对于不含有粗差的观测值, 有零假设:

$$H_0: E(l/H_0) = A\bar{X}$$

而当观测值中含有粗差, 则有备选假设:

$$H_a; E(l/H_a) = A\tilde{X} + H\nabla\tilde{S}$$

其中  $H\nabla\tilde{S}$  表示由  $p \times 1$  阶参数向量  $\nabla\tilde{S}$  所决定的粗差,  $H$  为已知的  $n \times p$  阶系数阵, 其秩  $R(H) = p$ 。

令 
$$\nabla\tilde{S} = \|\nabla\tilde{S}\| \cdot S \tag{5-28}$$

式中:  $\|\nabla\tilde{S}\|$  为  $\nabla\tilde{S}$  的模,  $S$  为  $\nabla\tilde{S}$  的单位向量。

由文献[11]可知, 在有多个粗差的情况下, 能以一定的检验功效  $\beta_0(S)$ , 通过显著水平为  $\alpha$  的统计检验发现的  $S$  方向的多个粗差的下界域是:

$$\nabla_0 S = S \cdot \delta_0(S) / \sqrt{S^T P_{SS} S} \tag{5-29}$$

式中:  $P_{SS} = H^T P Q_{vv} P H$ ,  $\delta_0(S)$  是  $\beta_0(S)$  和  $\alpha$  的函数。若设  $\delta_0(S) = \delta_0$  与方向无关, 则对于二维向量  $\nabla_0 S$  为一个下界值椭圆, 三维向量为下界值椭球, 而三维以上向量为下界值超椭球。当粗差向量  $\nabla S$  落入此区域内, 即小于下界值  $\nabla_0 S$ , 则不能用统计检验的方法发现。

对于 GPS 基线向量, 设基线  $L_i$  的粗差向量为  $\Delta S_i$ , 其单位向量部分为:

$$\left. \begin{aligned} S_{\Delta x} &= (1 \ 0 \ 0)^T \\ S_{\Delta y} &= (0 \ 1 \ 0)^T \\ S_{\Delta z} &= (0 \ 0 \ 1)^T \end{aligned} \right\} \tag{5-30}$$

这时对应的  $H = (0 \dots 0 \ E \ 0 \ 0 \ \dots 0)_{3 \times 3n}$

$$P_{SS} = H^T P Q_{vv} P H = P_i Q_{v_i v_i} P_i \tag{5-31}$$

代入(5-25)式可求得基线向量的三个坐标分量方向上的下界值为:

$$\left. \begin{aligned} \nabla_0 l_{\Delta x} &= \sigma_0 \cdot \delta_0 / \sqrt{S_{\Delta x}^T P_{SS} S_{\Delta x}} \\ \nabla_0 l_{\Delta y} &= \sigma_0 \cdot \delta_0 / \sqrt{S_{\Delta y}^T P_{SS} S_{\Delta y}} \\ \nabla_0 l_{\Delta z} &= \sigma_0 \cdot \delta_0 / \sqrt{S_{\Delta z}^T P_{SS} S_{\Delta z}} \end{aligned} \right\} \tag{5-32}$$

将(5-30)和(5-31)代入上式, 同时又已知  $Q_{v_i v_i} = R_i P_i$ , 则各分量粗差下界值为:

$$\left. \begin{aligned} \nabla_0 l_{\Delta x} &= \sigma_0 \cdot \delta_0 / \sqrt{r_{\Delta x}'} \\ \nabla_0 l_{\Delta y} &= \sigma_0 \cdot \delta_0 / \sqrt{r_{\Delta y}'} \\ \nabla_0 l_{\Delta z} &= \sigma_0 \cdot \delta_0 / \sqrt{r_{\Delta z}'} \end{aligned} \right\} \tag{5-33}$$

式中 
$$r_{\Delta x}' = S_{\Delta x}^T P_{SS} S_{\Delta x} = [1 \ 0 \ 0] P_i Q_{v_i v_i} P_i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \sum_{R=\Delta x}^{\Delta z} (P_{\Delta x k})_i (R_{k \Delta x})_i$$

同理有 
$$\begin{cases} r_{\Delta y}' = S_{\Delta y}^T P_{SS} S_{\Delta y} = \sum_{K=\Delta x}^{\Delta z} (P_{\Delta y k})_i (R_{k \Delta y})_i \\ r_{\Delta z}' = S_{\Delta z}^T P_{SS} S_{\Delta z} = \sum_{K=\Delta x}^{\Delta z} (P_{\Delta z k})_i (R_{k \Delta z})_i \end{cases} \tag{5-34}$$

由于我们研究内可靠性的主要目的是为了研究网中各基线可发现粗差的数值大小, 而不在于各基线可发现粗差的最大或最小方向。因此, 在不顾及方向的前提下, 取由三个坐标分量

可发现粗差下界值的二范数来定义单个基线向量的内可靠性指标：

$$\nabla_0 l_L = \sqrt{\nabla_0^2 l_{\Delta x} + \nabla_0^2 l_{\Delta y} + \nabla_0^2 l_{\Delta z}} \quad (5-35)$$

该定义式是一种平均意义上的定义，它假设某一基线向量在空间各个方向上可发现的粗差下界值都相等。在此假定下，单个基线向量可发现的粗差下界域为一球形域，其半径为  $\nabla_0 l_L$ 。

### 5.3.3.3 GPS 控制网的外可靠性指标

由文献[11]可知，对于相关多维观测值，外可靠性指标可用如下公式：

$$\bar{\delta}_0(S) = \delta_0(S) \cdot \sqrt{\frac{S^T(H^T P H - P_{SS})S}{S^T P_{SS} S}} \quad (5-36)$$

同内可靠性一样，对于 GPS 基线向量取：

$$S_{\Delta x} = (1 \ 0 \ 0)^T \quad S_{\Delta y} = (0 \ 1 \ 0)^T \quad S_{\Delta z} = (0 \ 0 \ 1)^T$$

表示基线向量  $L$  的粗差向量  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  方向的单位向量。

$$\text{则} \quad H^T P H = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & E & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & P_i & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & P_m & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ E \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = P_i$$

$$\text{而} \quad (S_{\Delta x}^T P_i S_{\Delta x}) = (1 \ 0 \ 0) P_i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = (P_{\Delta x \Delta x})_i \quad (S_{\Delta y}^T P_i S_{\Delta y}) = (P_{\Delta y \Delta y})_i \quad (S_{\Delta z}^T P_i S_{\Delta z}) = (P_{\Delta z \Delta z})_i$$

因此，由上式及(5-34)，可得：

$$\left. \begin{aligned} \bar{\delta}_0(x) &= \delta_0 \cdot \sqrt{\frac{S_{\Delta x}^T (H^T P H - P_{SS}) S_{\Delta x}}{S_{\Delta x}^T P_{SS} S_{\Delta x}}} = \delta_0 \cdot \sqrt{\frac{S_{\Delta x}^T H^T P H S_{\Delta x}}{S_{\Delta x}^T P_{SS} S_{\Delta x}} - 1} = \delta_0 \cdot \sqrt{\frac{P_{\Delta x \Delta x}}{r_{\Delta x}'} - 1} \\ \bar{\delta}_0(y) &= \delta_0 \cdot \sqrt{\frac{P_{\Delta y \Delta y}}{r_{\Delta y}'} - 1} \\ \bar{\delta}_0(z) &= \delta_0 \cdot \sqrt{\frac{P_{\Delta z \Delta z}}{r_{\Delta z}'} - 1} \end{aligned} \right\}$$

(5-37)

同理，可定义一条基线向量的外可靠性指标为：

$$\bar{\delta}_0(L) = \sqrt{\bar{\delta}_0^2(x) + \bar{\delta}_0^2(y) + \bar{\delta}_0^2(z)} \quad (5-38)$$

它同内可靠性一样,也是平均意义下的指标。

### 5.3.4 顾及可靠性标准的 GPS 网的设计

由前讨论给出了 GPS 网的内、外可靠性指标。在网的优化设计中不但应考虑网应达到的精度指标,还应考虑网的可靠性指标,即在给定一些质量指标的条件下,对网进行结构设计,使其达到所需的指标要求。

在网的设计中,可以根据建立的目标函数(质量指标),借助于计算机,对 GPS 网进行解析——模拟计算,使网的结构最终满足于设计指标的要求。对于一个顾及精度和可靠性要求的 GPS 网,可给出其精度指标—— $tr(Q_x)$ 和基线观测向量的内可靠性和外可靠性指标,即:

$$\left. \begin{aligned} tr(Q_x) &\leq C \\ s.t \quad \nabla_{0L} l_L &\leq R\sigma_0 = C_1 \\ s.t \quad \delta_{0L} &\leq C \end{aligned} \right\} \quad (5-39)$$

在实用中,往往难以给出每一个网的具体内、外可靠性指标,由前面的内、外可靠性讨论以及研究表明,网中基线的多余观测分量与内、外可靠性有着密切的联系,一般多余观测分量愈大,则网的可靠性愈高。所以,为了便于实用计算,通常可取网基线的平均多余观测分量为可靠性指标,即目标函数为:

$$\left. \begin{aligned} tr(Q_x) &< C \\ s.t \quad \bar{r} &\geq C_1 \end{aligned} \right\} \quad (5-40)$$

例 5.2 对例 5.1 中图 5-6 的 GPS 模拟网按设计指标:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{n} tr(Q_x) &\leq 2.2 \quad (\text{网的平均点位误差小于 } 2.2 \text{ cm}) \\ s.t \quad \bar{r}_L &\geq 0.5 \quad (\text{网中基线的平均多余观测分量大于 } 0.5) \end{aligned} \right.$$

经设计后,满足要求的 GPS 网由 15 条独立基线构成(如图 5-7),表 5-3 中给出了设计网中各点的椭球坐标和点位中误差。

5-3 GPS 模拟网的坐标及点位误差

点号	纬度 $B$	经度 $L$	大地高 $H/m$	点位中误差/cm
1	36°16'00"	112°30'00"	100	—
2	36°11'00"	112°30'00"	80	2.22
3	36°16'00"	112°34'00"	120	1.84
4	36°14'00"	112°32'00"	150	1.63
5	36°14'00"	112°36'00"	120	2.20
6	36°11'00"	112°34'00"	100	2.37
7	36°16'00"	112°38'00"	200	2.59
8	36°11'00"	112°38'00"	110	2.81



表5-4给出设计网中各基线的长度、多余观测分量以及在99.0%的置信度和80%的检

5-4 各基线的边长多余观测分量的内外可靠性

基线	边长 $S/m$	多余观测分量 $r$	内可靠性( $\nabla l$ )	外可靠性( $\delta_{OL}$ )
1~2	9247.24	0.63	17.40	6.63
1~3	5990.85	0.53	14.44	9.11
1~4	4760.34	0.56	11.74	8.92
2~4	6306.73	0.58	14.02	7.99
2~6	5997.19	0.53	15.88	11.51
3~4	4760.18	0.59	12.15	9.53
3~7	5991.40	0.54	14.34	9.15
5~6	6306.36	0.60	14.46	8.65
5~7	4760.78	0.54	11.76	9.04
5~8	6306.35	0.59	12.86	8.32
6~8	5997.18	0.53	15.91	11.34
7~8	9247.75	0.63	17.39	6.62
4~5	6306.55	0.62	13.46	9.10
3~5	4760.80	0.60	11.97	9.51
4~5	5993.46	0.62	12.76	7.12

验功效下的内、外可靠性指标。

由表 5-3 和表 5-4 可以看出,所设计的网无论在精度指标和可靠性指标上均达到了设计要求,可以利用实际布网。

## \* 5.4 GPS 网的应变强度设计

### 5.4.1 位移与应变的关系

控制网的设计中,除了应考虑网的精度指标(即网的结构对测量误差的传播以及成果精度的影响)及网的可靠性指标(即网抵抗及发现测量粗差的能力)外,还必须考虑网抵抗系统误差的能力。这项工作对于GPS控制网的设计显得更为重要,因为在GPS测量中存在着卫星轨道误差、大气传播误差等一系列难以完全消除的系统误差。网的抗系统误差的能力,可以借助弹性力学中应变强度分析方法分析系统误差对成果的总体影响,进行网的强度设计。

80年代初,K. Thapa、P. Vanicek 首先提出了应变强度分析法并用于常规网。测量控制网中,如有一个或部分测量元素产生系统误差,对网的结构将产生变形,网的变形可用平移和旋转、坐标方向线上的线应变和剪切应变来描述。这一过程,Thapa 提出根据弹性力学强度的概念,将网受到测量系统误差视为一种“外力”,在其作用下,网将产生变形(应变)响应,并以这种

响应程度来衡量网的强度。这就是控制网的应变强度分析,其主要理论和计算方法在文献[12]中已有叙述。

GPS网的质量分析,也可用应变强度分析法来评估网抵抗系统误差的能力,对GPS网进行强度设计,考虑到GPS测量的特性,应建立相应的“位移——应变”数学模型。

假设基线向量的变化引起GPS网的变化数量是微小的,GPS具有均匀连续和各向同性,符合弹性力学中位移——应变基本模式原则,可利用该模型导出GPS网的应变模型。

设GPS网无系统误差影响时的坐标和受到系统误差影响产生变化后的坐标分别为:

$$\bar{X}_1 = [x_1, y_1, z_1]^T \quad \bar{X}_2 = [x_2, y_2, z_2]^T$$

两坐标之差(位移)为:

$$\bar{W} = \bar{X}_2 - \bar{X}_1$$

或 
$$\bar{W} = [u \quad v \quad \omega]^T \tag{5-41}$$

则网中第*j*点位移 $\bar{W}_j$ 相对第*i*计算点位移 $\bar{W}_i$ 有如下展开式(略去二次以上项):

$$\bar{W}_j = \bar{W}_{oi} + \left( \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{X}_1} \right)_i \cdot \Delta \bar{X}_{ij} \tag{5-42}$$

式中: $\bar{W}_{oi} = [u_0 \quad v_0 \quad \omega_0]^T$ 为第*i*点的平移量, $\Delta \bar{X}_{ij} = \bar{X}_j - \bar{X}_i = [\Delta x_{ij} \quad \Delta y_{ij} \quad \Delta z_{ij}]^T$ 为第*i*点至*j*点的坐标差向量。

对位移向量作 Jacob 分解:

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{X}_1} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{X}_1} \right) + \left( \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{X}_1} \right)^T + \left( \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{X}_1} \right) - \left( \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{X}_1} \right)^T \right] = E + R \tag{5-43}$$

其中 
$$E = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{X}_1} \right) + \left( \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{X}_1} \right)^T \right] = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_y & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_z \end{bmatrix} \tag{5-44}$$

$$R = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{X}_1} \right) - \left( \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{X}_1} \right)^T \right] = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix} \tag{5-45}$$

那么将(5-43)、(5-44)、(5-45)代入(5-42)式,便可获得GPS网在空间直角坐标系下的应变模型:

$$\bar{W}_j = \bar{W}_{oi} + (E + R)\Delta X_{ij}$$

或 
$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \omega_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_y & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_{ij} \\ \Delta y_{ij} \\ \Delta z_{ij} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_{ij} \\ \Delta y_{ij} \\ \Delta z_{ij} \end{bmatrix} \tag{5-46}$$

该模型表述了位移与应变的几何关系。在(5-44)式中的  $E$  称为应变张量,  $E$  中的各项元素是与网的变形有关的量, 主对角线上的  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$  称为  $X, Y, Z$  轴上的线应变, 分别反映在该轴方向上网的相对伸缩, 其定义式为:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (5-47)$$

$E$  中非对角线上的  $\epsilon_{xy}, \epsilon_{xz}, \epsilon_{yz}$  称为剪应变, 分别反映  $XY$  轴、 $XZ$  轴、 $YZ$  轴之间直角的变化, 其定义式为:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{xy} \\ \epsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \epsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{yz} \end{aligned} \right\} \quad (5-48)$$

(5-45)式中的  $R$  称为旋转张量, 其中的  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  称为旋转参数, 反映了网绕  $X, Y, Z$  轴的局部平均旋转状况, 其定义式为:

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \omega_y &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \omega_z &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (5-49)$$

在(5-46)式中的  $u_0, v_0, w_0$  称为平移参数。

旋转参数和平移参数不会引起网的变形, 它们和形变参数一起构成应变分析的基本参数。为了便于进行应变分析, 由这些基本参数导出其他一些常用应变参数。

形变参数构成三维应变椭球, 椭球的三轴方向上的线应变称为主应变  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ , 它们包括最大最小线应变, 其值为应变张量矩阵的三个特征值:

$$\begin{vmatrix} \epsilon - \epsilon_x & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon - \epsilon_y & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon - \epsilon_z \end{vmatrix} = 0 \quad (5-50)$$

最大与最小剪应变, 包含在下式中:

$$\gamma_1 = \pm \frac{1}{2}(\epsilon_2 - \epsilon_3) \quad \gamma_2 = \pm \frac{1}{2}(\epsilon_3 - \epsilon_1) \quad \gamma_3 = \pm \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2) \quad (5-51)$$

$$\text{令} \quad \left. \begin{aligned} \lambda &= \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2} \\ \gamma &= \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2} \\ \omega &= \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} \end{aligned} \right\} \quad (5-52)$$

$\lambda, \gamma, \omega$  分别称为总应变、总剪切、总旋转变量, 用以从总体上衡量刚体的伸缩、扭曲和旋转。

式(5-46)就是在空间直角坐标系中位移与应变之间的基本关系式, 即应变模型。式中左端的位移量是已知的, 即有无系统差影响之间的坐标差  $\Delta x(u), \Delta y(v), \Delta z(w)$  已知, 通过列出

的计算区域中所有方程(5-46)(计算点数 $\geq 3$ ),可解出全部的应变参数,对方程重新排列,则有:

$$\begin{bmatrix} \Delta x_{ij} & 0 & 0 & \Delta y_{ij} & \Delta z_{ij} & 0 & 0 & -\Delta x_{ij} & \Delta y_{ij} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta y_{ij} & 0 & \Delta x_{ij} & 0 & \Delta z_{ij} & \Delta x_{ij} & 0 & -\Delta x_{ij} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta z_{ij} & 0 & \Delta x_{ij} & \Delta y_{ij} & -\Delta y_{ij} & \Delta x_{ij} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ \omega \end{bmatrix}$$

或 
$$\bar{C} \cdot \bar{E} = \bar{W} \tag{5-53}$$

式中: $\bar{C}$ 为由计算点*i*到*j*点之间坐标增量组成的系数矩阵, $\bar{W}$ 为*j*点有无系统差求得的坐标之差,即位移量矩阵, $\bar{E}$ 为待定的应变参数矩阵。

### 5.4.2 GPS 基线向量的应变分析

设 GPS 网中存在一个三维位移场  $W(x, y, z)$ , 在“外力”作用下(即 GPS 网存在系统误差使观测值发生变化),引起网中点位的平差值发生“位移”。

已知 GPS 基线向量是由三个相关的坐标增量构成,即: $\bar{l}_2 = [\Delta x_{\alpha\beta} \quad \Delta y_{\alpha\beta} \quad \Delta z_{\alpha\beta}]^T$ ,其协方差阵为:

$$\sigma_{\alpha\beta}^2 = \begin{bmatrix} \sigma_{\Delta x}^2 & \sigma_{\Delta x \Delta y} & \sigma_{\Delta x \Delta z} \\ \sigma_{\Delta x \Delta y} & \sigma_{\Delta y}^2 & \sigma_{\Delta y \Delta z} \\ \sigma_{\Delta x \Delta z} & \sigma_{\Delta y \Delta z} & \sigma_{\Delta z}^2 \end{bmatrix}$$

则对第*i*条基线有观测方程:

$$V_i = d \bar{x}_\alpha - d \bar{x}_\beta - \bar{l}_i \tag{5-54}$$

将区域中所有基线的观测方程写成矩阵形式,则有:

$$V = A dx_s - l \tag{5-55}$$

按最小二乘法,可得:

$$dx_s = (A^T P A)^{-1} A^T P l \tag{5-56}$$

当第*i*条基线向量  $l_i$  改变发生变化  $\Delta l_i$  时,相应误差方程常数项发生  $\Delta l$  的变化,即:

$$\Delta l = [0 \dots \Delta l_i \dots 0]^T$$

由此引起  $\Delta dx_s$  的变化,简记为  $\Delta dx_{s_i}$ ,则有:

$$\Delta d x_i = (A^T P A)^{-1} A^T P \Delta l \quad (5-57)$$

令  $T = (A^T P A)^{-1} A^T P \quad (5-58)$

上式可简写成  $\Delta d x_i = T \cdot \Delta l \quad (5-59)$

这就是基线向量的变化引起 GPS 网的坐标位移计算式。将此位移量代入(5-53)式右端中的  $\bar{w}$ , 则可解出应变参数。

### 5.4.3 GPS 网的应变强度设计

应变参数的计算, 可由基线向量按(5-55)式列出观测基线的误差方程, 再由(5-57)式求出点的坐标位移量, 然后代入(5-53)式求得应变参数。

为了全面考察网的应变强度, 要计算网中各个点上的应变参数, 为此可分别取网中各点为中心, 只取点发出的全部  $k$  条基线向量的另一端点构成计算单元, 此时该单元共有  $(k+1)$  个点。由式(5-57)得到  $(k+1)$  个点上的位移量, 按(5-53)式可组成  $(k+1)$  个应变参数方程:

$$\bar{C}_i E_i = \Delta d x_i$$

按最小二乘法可得应变参数:

$$\hat{E}_i = (\bar{C}_i^T \bar{C}_i)^{-1} \bar{C}_i^T \Delta d x_i \quad (5-59)$$

令  $F_i = (\bar{C}_i^T \bar{C}_i)^{-1} \bar{C}_i^T \quad (5-60)$

并将(5-58)式代入(5-59), 则可得:

$$\hat{E}_i = F_i \cdot T_i \cdot \Delta l = R_i \cdot \Delta l \quad (5-61)$$

其中:  $R_i = F_i \cdot T_i$ , 它反映了基线向量改变后相应引起多大变形响应, 故称  $R$  为响应矩阵。

为了便于分析网的应变强度, 即网抵御各种系统误差的能力, 进而进行 GPS 网的强度设计, 可以把应变参数  $\hat{E}_i$  代入(5-50)、(5-51)和(5-52)式中, 求出  $\lambda$ 、 $\gamma$ 、 $\omega$  作为该点的总应变变量。

在网的应变设计中, 可分别给出总应变量的指标量, 使设计后的网中各点的总应变变量均满足设计指标要求。应变指标为:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_i &\leq C_1 \\ \gamma_i &\leq C_2 \\ \omega_i &\leq C_3 \end{aligned} \right\} \quad (5-62)$$

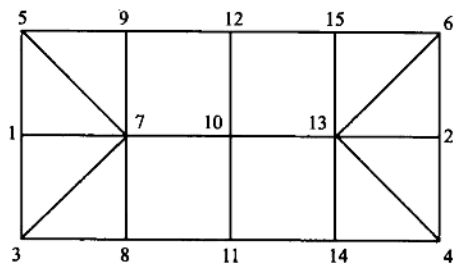


图 5-10 GPS 模拟网

采用上述 GPS 应变强度设计公式, 以图 5-10 所示的 GPS 模拟网为例, 计算和分析该网的应变强度。模拟网由 15 个 GPS 点、26 条基线向量构成, 其中 1 号点为固定点。

由 GPS 应变强度计算公式, 分别求出了网中各点的应变参数及点的线应变、总剪切和旋转量, 其结果绘制成各自的等值线分布图。图 5-11 是该网的总线应变图, 等值线取  $0.2 \times 10^{-6}$  为间隔。由于总剪切分布和旋转量分布趋势与总线应变图基本相似, 故不再专门绘制总剪切和

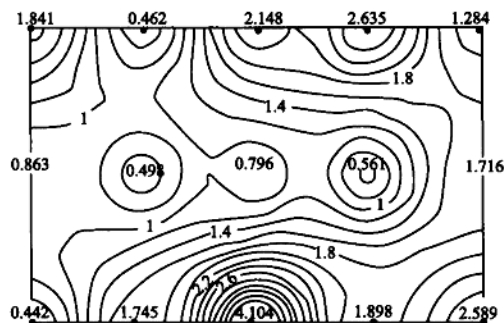


图 5-11 以 1 号点为固定点的网的总线应变等值线图

旋转量的等值线图。

由图 5-11 看出,靠近固定点(1 号点)的应变强度高,中间部位的强度高于边缘部位,特别是中心部位的 7、13 号点处强度最高,这是由于中间部位的点发出的基线数较多,因此,此处的强度比较好。

图 5-12 是以 1、2 号两点为固定基准时网的应变分布,与图 5-11 对比,整网的强度均有提高,特别是网的右部强度有明显提高,强度最高的是中心部位。

此时如果网的强度仍达不到要求,则可按解析法,通过增加基线向量来改变网的强度。图 5-13 为以 1、2 号点为固定点,在原 26 条基线基础上增加 11~15 和 8~12 两条基线后的应变强度。与图 5-12 对照,网的强度有明显提高,并且强度分布均匀,达到强度指标的要求。由此可以看出,增加基线向量观测量,改变网的结构对网的强度的提高有着举足轻重的影响。有关 GPS 应变强度设计的详细内容可参见文献[18,26]等。

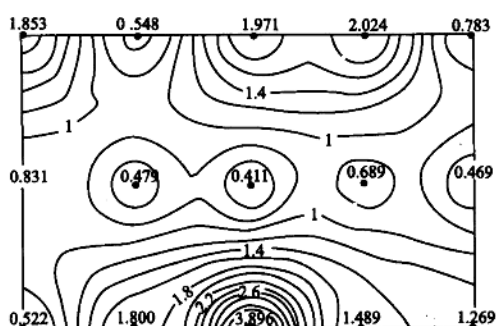


图 5-12 以 1、2 号点为基准的应变强度分布

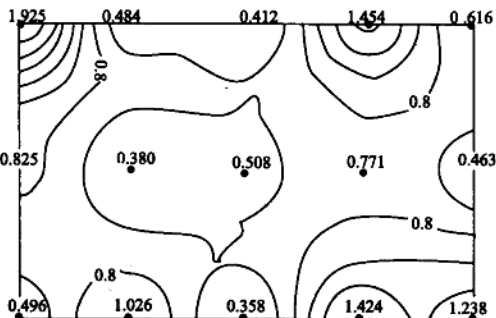


图 5-13 以 1、2 号点为基准,增加 11~15、3~12 两条基线后网的应变强度分布

## 5.5 GPS 测量的外业工作

### 5.5.1 选点与埋设标志

进行 GPS 控制测量,首先应在野外进行控制点的选设,即选点与埋设。由于 GPS 观测是通过接收天空卫星信号实现定位测量,一般不要求观测站之间相互通视。而且,由于 GPS 观测精度主要受天空的观测卫星的几何状况的影响,与地面点构成的几何状况无关。因此,网的图形选择也较灵活。所以,选点工作较常规控制测量简单方便。但由于 GPS 点位的适当选择,对保证整个测绘工作的顺利进行具有重要的影响。所以,应根据本次控制测量服务的目的、精度、密度要求,在充分收集和了解测区范围、地理情况以及原有控制点的精度、分布和保存情况的基础上,进行 GPS 点位的选定与布设。在 GPS 点位的选点工作中,一般应注意:

(1) 点位应紧扣测量目的布设。例如：测绘地形图，点位应尽量较均匀；道路测量点位应为带状对点；隧道控制点应主要分布在洞口；滑坡监测控制点应沿滑坡主滑线布设。

(2) 应考虑便于其他测量手段联测和扩展，通常最好能与相邻一至二个点通视。

(3) 点应选在交通方便、便于到达的地方，便于安置接收设备。视野开阔，视场内周围障碍物的高度角一般应小于  $15^\circ$ 。

(4) 点位应远离大功率无线电发射源和高压输电线，以避免周围磁场对 GPS 信号的干扰。

(5) 点位附近不应有对电磁波反射强烈的物体，例如：大面积水域、镜面建筑物等，以减弱多路径效应的影响。

表 5-5 GPS 标石类型

类别	形式	适用级别
基岩标石	基岩天线墩 基岩标石	A
基本标石	一般基本标石 土层天线墩 岩层天线墩 岩层基本标石 冻土基本标石	A 或 B
普通标石	沙丘基本标石 一般标石 岩层标石 建筑物上标石	B~E

(6) 点位应选在地面基础坚固的地方，以便于保存。

(7) 点位选定后，均应按规定绘制点之记，其主要内容应包括：点位及点位略图，点位交通情况以及选点情况等。

全部选点工作结束后，还应绘制 GPS 网选点图，并编写选点工作总结。

为了 GPS 控制测量成果的长期利用，GPS 控制点一般应设置具有中心标志的标石，以精确标示点位，点位标石和标志必须稳定、坚固，以便点位的长期保存。而对于各种变形监测网，则更应该建立便于长期保存的标志。为了提高

GPS 测量的精度，可埋设带有强制归心装置的观测墩。GPS 网点的标石类型及其适用范围，如表 5-5 所示，关于各种标石的构造可参见有关文献和规范。

## 5.5.2 GPS 接收机的检验

为了保证观测的成果正确可靠，每次观测前应对 GPS 接收机进行一定的检验。而且每隔一段时间，特别是新购置的 GPS 接收机，均应对 GPS 接收机进行全面检定。接收机全面检定的内容主要包括以下内容。

### 5.5.2.1 一般性检视

一般性检视主要检查接收机主机和天线外观是否良好，主机和附件是否齐全、完好，紧固部件有否松动与脱落。

### 5.5.2.2 通电检视

通电检视主要检查 GPS 接收机与电源正确连通后，信号灯、按键、显示系统和仪器工作是否正常，开机后自检系统工作是否正常。自检完成后，按操作步骤进行卫星的捕获与跟踪，以检

验卫星的捕获锁定卫星时间的快慢、接收信号的信噪比及信号失锁情况等。

### 5.5.2.3 GPS接收机内部噪声水平测试

接收机的内部噪声,主要是由于接收机硬件不完善(如钟差、信号通道时延、延迟锁相环误差及机内噪声)所引起,测试方法有零基线测试和超短基线测试两种。

(1) 零基线测试法。采用如图 5-14 所示的功率分配器,将同一天线接收的 GPS 卫星信号,分成功率、相位相同的两路或多路信号,分别送到不同的 GPS 接收机中,然后利用相对定位原理,根据接收机的观测数据解算相应的基线向量,即三维坐标差。

因为这种方法可以消除卫星几何图形、卫星转动偏差、大气折射误差、天线相位中心偏差、信号多路径效应误差及仪器对中误差等多项影响。所以是检验接收机内部噪声的一种可靠方法。

在理论上,所解算的基线向量的三维坐标差应为零,故称为零基线测试法。

测试时要求两台接收机同步接收 4 颗以上的卫

星信号 1.5 h,然后交换接收机天线,再观测一个时段。三维坐标差及其误差应小于 1 mm。在这项检验中,功率分配器的质量,对保障接收机内部噪声水平检验的可靠性是极其重要的。

(2) 超短基线检验法。在地势平坦,对空视野开阔,无强电磁波干扰及地面反射较小的地区,布设长度为 5~10 m 的基线,将其长度用其他测量仪器精确测得。检验时,两台接收机天线分别安置在此基线的两端,天线应严格对中、整平,天线定向标志指北,同步观测 1.5 h,解算求得的基线值与已知基线长度之差应小于仪器的固定误差。

由于检验基线很短,所以观测数据通过差分处理后,可有效消除各项外界因素影响,因而测量基线与已知基线之差主要反应了接收机的内部噪声水平。

### 5.5.2.4 天线相位中心稳定性检验

天线相位中心稳定性,是指天线在不同方位下的实际相位中心位置与厂家提供的天线几何中心位置的一致性。通常采用“相对定位法”,在超短基线上进行测试。

这一方法的基本步骤为:将 GPS 接收机天线分别安置在超短基线端点上,天线定向指北,经精确对中、整平后,观测 1.5 h。然后固定一个天线不动,将其他天线依次旋转 90°、180°、270°,再测三个时段。最后,再将固定不动的天线,相对其他任意一天线,依次旋转 90°、180°、270°,再测三个时段。利用相对定位原理,分别求出各时段基线值,其互差值一般不应超过厂家给出的固定误差的两倍。

### 5.5.2.5 GPS接收机精度指标测试

在精确已知边长的标准检定场上进行此项检验,将需要检定的仪器天线精确安置在已知基线端点,天线对中误差小于 1 mm,天线指向北,天线高量至 1 mm。进行观测后测得的基线

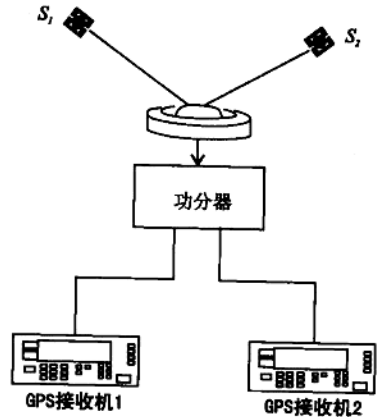


图 5-14 零基线检验



值与已知标准基线之较差应小于仪器标称中误差  $\sigma$ , 即:

$$\sigma = \pm (a + b \cdot d) \quad (5-63)$$

式中:  $a$  为固定误差,  $b$  为比例误差系数 ( $\times 10^{-6}$ ),  $d$  为两点间距离 (km)。

另外, 接收机有关附件也应进行检验, 如气象仪表 (气压表, 通风干湿表) 的检验, 天线底座水准器和光学对中器的检验与校正, 电池电容量, 电缆及接头是否完好配套, 充电器功能的检验, 天线高量尺是否完好及尺长精度检验等。

GPS 接收机是精密的电子仪器, 就要根据有关规定定期对一些主要项目进行检验, 确保能获取可靠高精度的观测数据。

### 5.5.3 GPS 卫星预报与观测调度计划

GPS 野外观测工作主要是接收 GPS 卫星信号数据, 由于 GPS 观测精度与所接收信号的卫星的几何分布及所观测的卫星数目密切相关。而作业的效率与所选用的接收机的数目、观测的时间、观测的顺序密切相关。因此在进行 GPS 外业观测之前要拟定观测调度计划, 这对于保证观测工作的顺利完成、保障观测成果的精度及提高作业效率是极其重要的。

制定观测计划前, 首先进行可见 GPS 卫星预报, 该预报可利用厂家提供的商用软件, 输入近期的概略星历 (不超过 30 天) 和测区的概略坐标及其观测时间, 则可获得如图 5-15 所示的可见 GPS 卫星数和 PDOP 变化图。

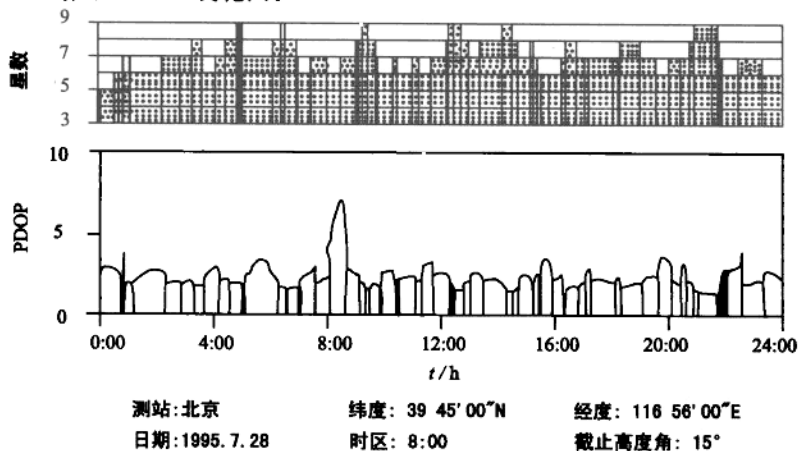


图 5-15 可见卫星数和 PDOP 变化图

由图 5-15 可见, 全天任何时候, 均可至少同时观测到 5 颗卫星, 并且高度角均大于 15°。而卫星的几何图形强度 PDOP (空间位置精度因子) 随时间不同而变化, 其中在 8:00~9:00 期间, PDOP 值接近 8, 由于其大小直接影响到观测精度, 因此无论是绝对定位或相对定位, 其值

表 5-6 PDOP 的限值

网的精度级别	A	B	C	D	E
PDOP 限值	≤4	≤6	≤8	≤10	≤10

均不应超过一定要求。表 5-6 列出不同精度等级的网观测时 PDOP 值的限值。由表中可以看出, 当进行 A、B、C 等级网观测时, 对应图 5-15 例子而言, 应避开 8:00~9:00 这一时间段。可根据卫

星预报,选择最佳观测时段。

最佳观测时间确定后,还应在观测之前根据 GPS 网的点位、交通条件编制观测调度计划,按计划对各作业组进行调度。

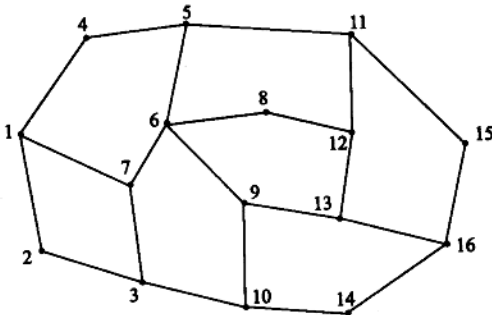


图 5-16 某市 GPS 网设计图

采用三台 GPS 接收机按静态相对定位模式作业,每天观测 3 个时段,每个时段观测 1.5 h。按此计划共观测 4 天,11 个时段,共设测站 33 个,除 6 号是设站 3 次外,其余各点都设站 2 次。在作业中,还可根据实际情况适当调整调度计划。

例如:对图 5-16 中某 GPS 网进行观测。

表 5-7 某 GPS 网测站作业调度计划

日期	时间及时段	接收机号		
		1	2	3
9月1日	8:30~10:00 A时段	4	1	2
	10:30~12:00 B时段	7	3	2
	2:00~3:30 C时段	7	6	1
9月2日	8:30~10:00 A时段	5	6	4
	11:00~12:30 B时段	9	6	8
	2:30~4:00 C时段	9	10	13
9月3日	9:00~10:30 A时段	3	10	14
	1:30~3:00 B时段	16	15	14
	4:00~5:30 C时段	16	12	13
9月4日	8:30~10:00 A时段	11	12	8
	1:00~2:30 B时段	11	15	5
	3:30~5:00 C时段			

### 5.5.4 GPS 外业观测工作

外业观测工作包括天线安置、观测作业、观测记录和观测数据检查等。

#### 5.5.4.1 天线安置

天线精确安置是实现精确定位的重要条件之一,因此要求天线应尽量利用三脚架安置在标志中心的垂线方向上直接对中观测。一般最好不要进行偏心观测。对于有观测墩的强制对中点,应将天线直接强制对中到中心。

对天线进行整平,使基座上的圆水准气泡居中。天线定向标志线指向正北。定向误差不大于 $\pm 5^\circ$ 。

天线安置后,应在各观测时段前后,各量测天线高一次。两次测量结果之差不应超过 3mm,并取其平均值。

天线高指的是天线相位中心至地面标志中心之间的垂直距离。而天线相中心至天线底面之间的距离在天线内部无法直接测定,由于其是一个固定常数,通常是由厂家直接给出,天线底面至地面标志中心的高度可直接测定,两部分之和为天线高。

对于有觇标、钢标的标志点,安置天线时应将觇标顶部拆除,以防止对 GPS 信号的遮挡,也可采用偏心观测,归心元素应精确测定。

#### 5.5.4.2 观测作业

GPS 定位观测主要是利用接收机跟踪接收卫星信号,储存信号数据,并通过对信号数据的处理获得定位信息。

利用 GPS 接收机作业的具体操作步骤和方法,随接收机的类型和作业模式不同而有所差异。总体而言,GPS 接收机作业的自动化程度很高,随着其设备软硬件的不断改善发展,性能和自动化程度将进一步提高,需要人工干预的地方愈来愈少,作业将变得愈来愈简单,尽管如此,作业时仍需注意:

(1) 首次使用某种接收机前,应认真阅读操作手册,作业时应严格按操作要求进行。

(2) 在启动接收机之前,首先应通过电缆将外接电源和天线连接到接收机专门接口上,并确认各项连接准确无误。

(3) 为确保在同一时间段内获取相同卫星的信号数据,各接收机应按观测计划规定的时间作业,且各接收机应具有相同获取信号数据的时间间隔(采样间隔)。

(4) 接收机跟踪锁住卫星,开始记录数据后,如果能够查看,作业员应注意查看有关观测卫星数量、相位测量残差、实时定位结果及其变化和存储介质的记录情况。

(5) 在一个观测时段中,一般不得关闭并重新启动接收机;不准改变卫星高度角限值,数据采集间隔及天线高的参数值。

(6) 在出测前应认真检查电源电量是否饱满,作业时,应注意供电情况,一旦听到低电压报警要及时更换电池,否则可能会造成观测数据被破坏或丢失。

(7) 在进行长距离或高精度 GPS 测量时,应在观测前后测量气象元素,如观测时间长,还应在观测中间加测气象元素。

(8) 每日观测结束后,应及时将接收机内存中的数据传输到计算机中,并保存在软、硬盘中,同时还需检查数据是否正确完整,当确保数据正确无误地记录保存后,应及时清除接收机内存中的数据以确保下次观测数据的记录有足够的存储空间。

#### 5.5.4.3 观测记录

GPS 接收机获取的卫星信号由接收机内置的存储介质记录,其中包括:载波相位观测值及相应的观测历元,伪距观测值,相应的 GPS 时间、GPS 卫星星历及卫星钟差参数,测站信息及单点定位近似坐标值。

在观测现场,观测者还应填写观测手簿,其记录格式和内容见表 5-8。对于测站间距离小于 10 km 的边长,可不必记录气象元素。为保证记录的准确性,必须在作业过程中随时填写,不得测后补记。

#### 5.5.5 GPS 相对定位作业模式

由 GPS 误差分析可知,在 GPS 定位测量中有多种误差均具有相关性,因此,为提高 GPS 定位测量的精度,通常采用相对定位的作业模式,即采用二台或二台以上的接收机分别置于不

表 5-8 GPS 测量记录格式

点号		点名		图幅	
观测员		记录员		观测月日/年积日	
接收设备		天气状况		近似位置	
接收机类型及号码		天气		纬度	
天线号码		风向		经度	
存储介质编号		风力		高程	
天线高/m	测前		观测时间	开始记录	
	测后			结束记录	
	平均值		总时段序号		
			日时段序号		
气象元素			观测记事		
时间	气压/mbar	干温/℃	湿温/℃		

同点位,测定点之间的相对位置的定位方法。根据定位时采用的接收机硬件和软件及作业的时间等不同,相对定位被分为:静态相对定位、快速静态相对定位、准动态相对定位、动态相对定位等模式。

### 5.5.5.1 静态相对定位

将两台或两台以上的 GPS 接收设备分别安置在两个或数个点上,同步观测 4 颗及 4 颗以上相同的卫星,对卫星的观测应为连续的,且必须持续一个时间段,从而实现相对定位。连续观测卫星的时间长短,即一个时段持续的时间,决定于测站间的距离和测量需达到的精度。一般观测时间为 1~2 h。当测站间距离不超过 5 km,相对定位精度为  $10\text{ mm} + 2 \times 10^{-6} \cdot d$ ,观测时间可缩短到 45 min 左右。当测站间距离超过 30 km,或精度要求为  $5\text{ mm} + 1 \times 10^{-6} \cdot d$  或更高时,通常需观测 3 h 以上。单频 GPS 接收机测量的精度一般较双频接收机低,特别是长距离相对定位时。

### 5.5.5.2 快速静态相对定位

这种定位方法与静态相对定位方法基本相同,仅仅是同步观测时间缩短,采用双频接收机只需同步观测 5~10 min,单频接收机则需观测 15 min 左右。作业时,将一台接收机相对固定在一个基准站,连续跟踪所有可见卫星,其他接收机依次在各待定点上观测数分钟,然后利用特制的快速进行相对定位的软件计算基线向量。

采用这种方法,测站间的距离一般应小于 15 km,定位精度通常为  $5 \sim 10\text{ mm} + 1 \times 10^{-6} \cdot d$ 。观测值中易包含粗差,因此,必须加强对观测值的粗差检验。

### 5.5.5.3 准动态相对定位

采用此作业方式时,应选择一基准站安置一台 GPS 接收机,该接收机连续跟踪所有可见卫星,将另一台接收机置初始点上,观测数分钟,以求出整周末知数,然后在保持对所有卫星连续跟踪的条件下,将该接收机搬迁至下一待定点,观测 1~2 min 后,再在保持对卫星的连续跟踪的条件下迁至另一待定点,重复这种操作直至测完所有待定点。

采用此种作业模式的关键,是流动的接收机在迁移的过程中保持对卫星的连续跟踪,即搬站时不能关机。同时流动站与基准站之间的距离一般不能超过 15 km。如果在观测过程中,卫星信号中断,应在该站再停留数分钟,重新确定整周末知数。由于该方法作业不够方便,随着 GPS 定位技术和接收机制造技术的发展,目前已较少采用此种作业模式。

### 5.5.5.4 动态相对定位(差分相对定位)

在一个已知的点位上安置接收机作为基准站,连续跟踪可见卫星,另一台接收机置于运动载体(如汽车、火车、飞机、船只等),在初始点上让运动接收机保持静止状态在该点数分钟,以进行初始化,在运动过程中按规定的的时间间隔自动观测,或运动至待定点时稍作停留,并通过通讯设备(数据链)将基准站的数据实时传送给运动站,与运动站上的数据一并求解实现定位。运动站与基准站的距离一般应小于 15 km,此方法的定位精度为厘米级。

以上各种作业模式有一个共同特点,均需要至少两台接收机联合作业,求解时需有公共时间段的观测数据。静态相对定位时,公共观测时间至少应大于 40 min,这种方法所需的作业时间较长,但是由于有较多的有效观测数据,所以基线解的精度和可靠性最强,通常 GPS 控制网以及高精度的定位、变形监测常采用静态相对定位的方法。差分动态定位由于作业迅速方便,效率高,具有广阔的应用前景,但由于目前仪器设备费用较高,还没有得到广泛的应用。随着 GPS 技术的发展、仪器设备费用的降低,必将成为定位的主要方法之一。快速静态相对定位,由于在定位作业时,通常测站间距离较长,且交通条件较差,而成果的可靠性不够高,因此提高工效不明显,仅在小区域范围、较低精度的工程控制测量中应用。

## 5.6 GPS 基线向量解算与网平差概述

### 5.6.1 GPS 基线向量解算

对两台及两台以上接收机同步观测的数据,需根据双差模型(3-108),三差模型(3-113),对每一个观测值建立相应的观测方程,双差模型共应建立 $(n_i-1)(n_j-1)n_l$ 个方程,三差模型共应建立 $(n_i-1)(n_j-1)(n_l-1)$ 个方程( $n_i$ 为测站数, $n_j$ 为观测的卫星数, $n_l$ 为观测历元数),无论采用哪种模型,均应按最小二乘原理对其进行求解,从而求出方程中的未知参数。

$$X = (A^T P A)^{-1} A^T P l \quad (5-64)$$

从而获得基线向量解。同时还可求出未知参数的精度:

$$D_x = \sigma_0^2 (A^T P A)^{-1} \quad (5-65)$$

$$\sigma_0^2 = \frac{V^T P V}{r} \quad (5-66)$$

(5-66)式中  $\sigma_0^2$  是验后方差因子,  $r$  为多余观测数,  $r$  等于模型总的观测方程数与待定未知参数之差。

由于通常一个时段接收的卫星数据量非常大,所列的方程数也很多,所以,相对定位的基线向量一般均采用仪器厂家提供的专门软件来求解。不同厂家的软件功能和使用上均可能有所不同,但大体上均包括如下基本处理过程:

### 5.6.1.1 数据传输

将 GPS 接收机记录的观测数据传输到计算机内存或存储介质上。

### 5.6.1.2 数据分流

从原始数据中,剔除无效观测值和冗余信息,形成各种数据文件,如星历文件、载波相位和伪距观测文件、测站信息文件。

### 5.6.1.3 GPS 数据的预处理

对数据进行平滑滤波检验,剔除粗差;统一数据文件格式,将不同类型接收机的数据记录格式统一为标准化的文件格式,探测周跳,修复观测值。

### 5.6.1.4 基线向量解算

一般先采用三差模型法对基线向量进行预求解,然后再采用双差模型对基线向量进行精确求解。对于 20 km 以下的基线,常采用所谓的固定双差解,即整周未知数取为整数后的基线平差解。而对于 30 km 以上的基线,一般采用浮点双差解,即整周未知数不取整,以实数作为整周值,所以也可称为实数解。

## 5.6.2 GPS 网平差与坐标转换概述

由同步观测和异步观测的基线向量互相联结构成 GPS 网,称为 GPS 基线向量网。由于存在观测误差,网中由不同时段观测的基线向量组成的闭合图形存在不符值(闭合差)。因此,应在 WGS-84 坐标系统下,以 GPS 基线向量及其相应的方差阵作为观测信息,对 GPS 网进行平差计算,消除不符值,获得网中点的平差后的三维坐标、基线边长的平差值、基线向量观测值改正数及其对观测值、点位坐标的精度评定。

GPS 网平差可采用多种平差方法进行。为检验基线向量观测值的网内部符合精度以及观测值是否存在系统误差和粗差,一般常采用无约束平差法,即以 WGS-84 坐标下一个点的三维坐标作为位置基准的平差,该平差避免了基准信息误差,因此,平差后的结果,可以准确地反映观测值的精度。并可通过单位权方差检验,观测值改正数的分布及其粗差检验,发现网中可能存在的系统误差及粗差。

常用的GPS网平差,还有约束平差和联合平差。约束平差是以国家大地坐标或地方坐标系下的某些点的坐标、边长、方位角作为网平差的基准信息,也就是作为平差的约束条件,在顾及GPS网的WGS-84坐标系与国家或地方坐标系之间的转换参数进行平差计算。平差后不但可获得GPS网的坐标平差值及精度评定,而且还实现了将WGS-84坐标系成果向国家或地方坐标系统的转换。联合平差是GPS基线向量观测值与地方常规观测值的联合平差,平差计算中除包含基线观测值和基准约束数据外,还包含边长、方位、高差等一些常规观测值。由于联合平差仍带有约束条件,所以,平差后也可将GPS成果转换到国家或地方坐标系。

众所周知,GPS定位成果是属于WGS-84坐标系,而在我国,实用的测量成果往往是属于国家坐标系或地方坐标系。因此,需要进行GPS测量成果的坐标转换。

坐标系统之间的转换包括不同参心坐标系之间的转换、不同地心坐标系之间的转换、参心坐标系与地心坐标系之间的转换。如果已知两坐标系之间的转换参数,则可代入有关的坐标转换模型,直接实现两坐标系之间的坐标转换。但是,往往并不精确知道两坐标系间的转换参数,而只是已知若干点在两个坐标系中的坐标,这些点通常称为公共点。那么可以利用这些已知的公共点,将它们在两坐标系中的坐标代入到转换模型中,求定相应的转换参数,然后再利用所求的转换参数实现坐标转换。另外,还可以采用前面所述的约束平差和联合平差的方法实现坐标系之间的坐标转换,在顾及两坐标系之间转换参数条件下进行平差,目前是解决GPS成果坐标转换的有效手段之一。

## 5.7 GPS观测成果检验与技术总结

### 5.7.1 GPS观测成果的检验

对于由野外测量获得的GPS观测成果还应进行全面检查,发现和删除不合格成果,通过进行重测、补测,确保观测成果的质量。外业成果的检验主要内容有:

#### 5.7.1.1 基线长度的中误差

基线处理后基线长度中误差应在标称精度值内。对于20 km以内的短基线,双差求解模型可有效地消除电离层的影响,其相应的中误差小于0.01~0.02 m。若超过此项限差,基线解算成果的可信性就较差。

同时基线的单位权方差主要反映偶然误差,一般也应小于0.01 m。

#### 5.7.1.2 基线求解的整周参数的整数性

对于20 km以内的短基线,其求解的整周模糊度应具有良好的整数特性,若在基线平差解算中,有一两个模糊度与相近整数相差到0.15~0.20,则该成果较好,当差值超过0.30时,所求的结果往往不太可靠。此时,可采用换基准参考卫星,以及去掉周跳出现较多的某颗卫星或截去信号条件较差的一段时间的信号等措施,重新再求解基线。

### 5.7.1.3 基线观测值残差分析

一些基线解算的软件中,通常都具有以图或表的形式给出一个测段中每颗卫星与基准参考卫星之间观测值残差的功能。若每颗卫星的残差图形均在纵坐标零周附近,则该基解算较好。若某颗星的残差起伏较大,则表明该星的单差可能有问题,可考虑删去该星;若残差图中出现突然的跳跃或尖峰时,表明周跳未完全消除;若所有星的残差图形都不好,很可能是基准参考星的问题,可改用另一颗卫星作为基准参考星。

### 5.7.1.4 基线浮点解与固定解之差

以平差解算的实数作为整周未知参数获得的解为浮点解(实数解),而将实数取整后的整数作为整周未知参数获得的解为固定解,两者之间的基线向量坐标应符合良好,在短基线情况下,两者的基线向量坐标差达分米级时,则处理结果可能有问题。

### 5.7.1.5 同步多边形闭合差检查

采用单基线处理模式,对于采用同一种数学模型获得的基线解,由其同步时段若干基线组成的同步多边形环的坐标分量相对闭合差和全长闭合差应满足:

$$\left. \begin{aligned} W_x &= \sum_{i=1}^n \Delta x_i \leq \frac{1}{5} \sqrt{n} \sigma \\ W_y &= \sum_{i=1}^n \Delta y_i \leq \frac{1}{5} \sqrt{n} \sigma \\ W_z &= \sum_{i=1}^n \Delta z_i \leq \frac{1}{5} \sqrt{n} \sigma \end{aligned} \right\} \quad (5-67)$$

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2} \leq \frac{\sqrt{3n}}{5} \sigma \quad (5-68)$$

式中  $n$  为多边形的边数,  $\sigma$  为 GPS 网相应级别规定的观测精度。

### 5.7.1.6 异步环多边形闭合差检查

由若干条独立基线边构成的异步闭合环,其闭合差应符合下式规定:

$$\left. \begin{aligned} W_x &\leq 3 \sqrt{n} \sigma \\ W_y &\leq 3 \sqrt{n} \sigma \\ W_z &\leq 3 \sqrt{n} \sigma \end{aligned} \right\} \quad (5-69)$$

异步环多边形闭合差的大小,是基线向量质量检核的主要指标。如果闭合差超限,应及时分析原因,对其中部分成果进行重测。

### 5.7.1.7 重复基线边较差检查

同一条 GPS 基线边若观测了多个时段,可得多次基线边观测结果,同一条基线边任意两个时段结果的互差不宜超过下式的规定:



$$ds \leq 2 \sqrt{2} \sigma \quad (5-70)$$

### 5.7.2 GPS 测量的技术总结与上交资料

GPS 控制网外业工作和数据处理工作全部结束后,应及时编写技术总结,其内容一般应包括:

- (1) 测区范围与位置,自然地理条件,气候特点,交通及经济等情况。
- (2) 任务来源,测区已有测量成果的情况,施测目的和基本精度要求。
- (3) 施测单位,施测起止时间,技术依据,作业人员情况,使用接收机类型和数量以及检验情况,观测方法,重测、补测情况,作业环境,重合点情况,工作量与工作日情况。
- (4) 野外数据检核情况和分析,起算数据和坐标系统,数据后处理内容、方法及软件情况,精度分析。
- (5) 外业观测数据质量分析与野外检核情况。
- (6) 方案实施与规范执行情况。
- (7) 工作量与定额计算。
- (8) 提交成果中尚存在的问题和需要说明的其他问题。
- (9) 上交资料清单。
- (10) 各种附表与附图。

GPS 测量任务完成后,应提交下列资料;

- (1) 测量任务书。
- (2) 技术设计书。
- (3) 新设或重建的 GPS 点的点之记和测量标志委托保管书。
- (4) 外业观测记录(含软盘)、测量手簿及其他记录资料。
- (5) GPS 控制点网图。
- (6) 数据处理中生成的文件、资料和成果表。
- (7) GPS 接收机设备的检验资料。
- (8) 技术总结报告。
- (9) 成果验收报告。

### 思 考 题

- [1] 名词解释:同步环;异步环;重复基线;同步图形闭合差;异步图形闭合差;重复基线坐标闭合差。
- [2] GPS 测量分哪些等级? 各级精度怎样衡量?
- [3] 简述 GPS 网的点连式、边连式和网连式设计?
- [4] 简述 GPS 网设计的一般原则?
- [5] 简述 GPS 网选点的一般原则?
- [6] GPS 测量技术总结报告的内容及提交的成果资料有哪些?

# 第 6 章

## GPS 定位测量数据处理

### 6.1 概述

与所有测量任务相同,由 GPS 定位技术所获得的测量数据,同样需要经过数据处理,方能成为合理而实用的成果。

常规测量通常将某点在空间的位置分解为平面位置和高程位置表示,即分别用两个相对独立的坐标系统——平面坐标系统(经纬度、平面直角坐标)和高程坐标系统(正常高或正高)迭加表述,这种表达在理论上不够严密,不能构成一个完整的空间三维坐标体,但却能满足大多数测量定位的需要,因此,成为长期以来几乎所有测量定位的主要表述方法。常规测量中,点的平面位置一般是用国家坐标系或地方独立坐标系表示,而高程则是用相对某一大地水准面的高程系来表示。

GPS 卫星定位测量是用三维地心坐标系(WGS-84 坐标系)为依据来测定和表示点的空间位置,它既可用地心空间坐标系表示,也可用椭球大地坐标系的大地纬度、大地经度、大地高表示。

在已有常规测量成果的区域进行 GPS 测量时,往往需要将由 GPS 测量获得的成果纳入到国家坐标系或地方独立坐标系,以保证已有测绘成果的充分利用,因此,GPS 定位测量数据处理中,需要考虑如何将 GPS 测量成果由 WGS-84 世界地心坐标系转换至国家或地方独立坐标系。

本章在随后的 2.3 节中,着重讨论了与坐标转换有关的问题。在介绍国家坐标系和地方独立坐标系的基础上,讨论几种常见的坐标系转换的数学模型以及转换参数的计算方法。

同其它测量数据处理一样,平差计算仍是 GPS 测量数据处理的主要任务之一。由于 GPS 测量数据是空间三维坐标系下的成果,所以对其进行的平差应是三维平差。另外,为了能和已有常规测量数据联合使用或处理,还需考虑 GPS 测量数据的二维平差。本章着重讨论 GPS 网的三维平差和二维平差计算方法。

GPS 定位获得的大地高是空间点至椭球面的高,即大地高是以椭球面为基准的高程系统。由于椭球面是一个用于计算的几何面,所以,大地高是一个几何量,不具有物理意义。高程测量一般采用以似大地水准面为依据的水准测量来确定点的高程,称为正常高。所以,实用上一般不采用大地高系统。因此,还必须研究如何由 GPS 大地高求得实用的正常高,本章最后将

讨论此问题。

## 6.2 国家坐标系与地方独立坐标系

在考虑坐标转换之前,首先应认识几种相关的坐标系,1.2 中已讨论了地球地心坐标系、WGS-84 世界大地坐标系,本节对国家坐标系和地方独立坐标系的定义与建立进行讨论。

### 6.2.1 旋转椭球与参心坐标系

在地球重力场中,当水处于静止时的表面必定与重力方向(即铅垂线方向)处处正交。我们称这个与铅垂线正交的静止水平面为水准面。假设海水面处于静止平衡状况,并将它一直沿伸到地球陆地内部形成一个闭合的水准面,用来表示地球的形状,我们将这个水准面称为大地水准面。大地水准面是对地球的物理逼近,它可以较真实地反映地球的形状,但是地壳内部物质密度分布的不均匀,造成地面各点重力大小和方向不同,因此,与铅垂线处处正交的大地水准面是起伏不平的,因而它也难以用简单的数学模型描述。要用它作为各种地面测量数据的计算基准面比较困难,必须寻找一个简单的适合测量计算的基准面。

大地水准面相当接近于一个规则的具有微小扁率的数学曲面——旋转椭球。旋转椭球可用两个几何参数确定,即为椭球的长半径  $a$  和扁率  $f$ 。这两个参数解决了椭球的形状和大小。为了将地面测量数据归算到椭球面上,仅仅知道它的形状和大小是不够的,还必须确定它与大地水准面的相关位置,也就是所谓的椭球定位和定向。另外,为了从几何特性和物理特性两个方面来研究全球的形状,则还要使椭球与全球大地水准面结合最为密切。现代大地测量中,采用四个参数来描述椭球的几何和物理特性。这四个参数是:

- (1) 椭球的长半径  $a$ 。
- (2) 地球重力场二阶带谐系数  $J_2$  ( $J_2$  与扁率存在一定解析关系)。
- (3) 地心引力常数与地球质量的乘积  $GM$ 。
- (4) 地球自转角速度  $\omega$ 。

地心坐标系,就是一个将椭球中心与地球质心重合,且与全球大地水准面最为密合的旋转椭球。

为了研究局部球面的形状,且使地面测量数据归算至椭球的各项改正数最小,各个国家和地区分别选择和某一局部区域的大地水准面最为密合的椭球建立坐标系。这样选定和建立的椭球称为参考椭球,对应的坐标系称为参心坐标系。显然,该坐标系的中心一般和地球质心不一致,所以参心坐标系又称为非地心坐标系、局部坐标系或相对坐标系,由于参心坐标系处理局部区域数据带来的变形较小,所以,参心坐标系至今对大地测量仍有重要作用。

同样,参心坐标系可分为参心空间直角坐标系和参心大地坐标系。

参心空间直角坐标系是以参心  $O$  为坐标原点, $Z$  轴与参考椭球的短轴(旋转轴)相重合, $X$  轴与起始子午面和赤道的交线重合, $Y$  轴在赤道面上与  $X$  轴垂直,构成右手直角坐标系

$O-XYZ$ (如图 6-1)。地面点  $P$  的点位用  $(X, Y, Z)$  表示。

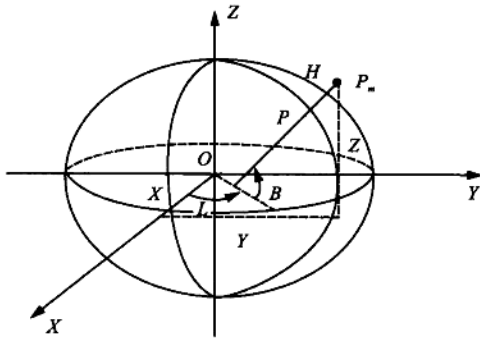


图 6-1 参心空间直角坐标和参心大地坐标

参心大地坐标系是以参考椭球的中心为坐标原点,椭球的短轴与参考椭球旋转轴重合,以过地面点的椭球法线与椭球赤道面的夹角为大地纬度  $B$ ,以过地面点的椭球子午面与起始子午面之间的夹角为大地经度  $L$ ,地面点沿椭球法线至椭球面的距离为大地高  $H$ (如图 6-1)。地面点的点位用  $(B, L, H)$  表示。

在同一参心坐标系中,地面点的参心空间直角坐标与相应的参心大地坐标之间存在同(1-18)和(1-21)式的互换关系。

确定参考椭球是建立参心坐标系的主要依据。通常包括确定参考椭球的形状和大小,确定它的空间位置(参考椭球的定位与定向),以及确定大地原点  $T$  的大地纬度  $B_T$ 、大地经度  $L_T$  及它至一相邻点的大地方位角  $A_T$ 。

参考椭球的定位和定向是通过确定大地原点的大地经纬度、大地高和大地方位角来实现的,参考椭球一般采用“双平行”定向条件,即要求椭球的短轴与地球某一历元的自转轴平行,起始大地子午面与起始天文子午面平行。即参心大地坐标系与天文坐标系存在关系:

$$\left. \begin{aligned} B &= \varphi - \zeta \\ L &= \lambda - \eta \sec \varphi \\ H &= H' + N \\ A &= \alpha - \eta \tan \varphi \end{aligned} \right\} \quad (6-1)$$

式中:  $\varphi, \lambda$  是天文纬度和经度;  $\zeta, \eta$  是垂线偏差分量,  $N$  为大地水准差距,  $A$  和  $\alpha$  为大地方位角和天文方位角。

一个国家或地区由于缺乏必要的资料来确定  $\zeta, \eta$  和  $N$  值,往往只能简单地选取大地原点  $T$  处有:

$$\zeta_T = 0 \quad \eta_T = 0 \quad N_T = 0 \quad (6-2)$$

上式表明,在大地原点  $T$  处,椭球的法线方向与垂线方向重合,椭球面和大地水准面相切,这时由(6-1)式有:

$$B_T = \varphi_T, L_T = \lambda_T, A_T = \alpha_T, H_T = H'_T$$

这就是所谓的“一点定位”。

“一点定位”的结果,往往难以使椭球面和大地水准面在较大区域范围内有较好的密合。所以,在国家天文大地测量工作基本完成后,利用已有的测量成果,按“ $\sum N^2 = \text{最小}$ ”进行重新定位和定向,称为“多点定位”。

### 6.2.2 54 北京和 80 西安国家坐标系

目前我国常用的两个国家坐标系——1954 年北京坐标系和 1980 年西安坐标系,均是参

心坐标系。

### 6.2.2.1 1954 年北京坐标系

解放前,我国一直没有统一的坐标系统。解放初期,为适应迅速开展的测绘工作,根据当时的具体情况,将我国一等锁与苏联一等锁相连接,经东北的呼玛、吉拉林、东宁基线网扩大边端点的苏联 1942 年普尔科沃坐标系的坐标为起算数据,平差我国新测一等锁,这样传算过来的坐标系在我国称为 1954 年北京坐标系。

1954 年北京坐标系采用了前苏联的克拉索夫斯基椭球体,其椭球参数是:长半轴  $a$  为 6 378 245 m,扁率  $f$  为 1/298.3,其原点位于原苏联的普尔科沃。1954 年北京坐标系虽然是苏联 1942 年坐标系的延伸,但也还不能说它们完全相同。因为该椭球的高程异常是以苏联 1955 年大地水准面重新平差结果为起算数据,按我国天文水准路线推算而得。而高程又是以 1956 年青岛验潮站的黄海平均海面为基准。

1954 年北京坐标系建立之后,在这个系统上,30 多年来,我国用该坐标系统完成了大量的测绘工作,获得了许多的测绘成果,在国家经济建设和国防建设的各个领域发挥了巨大作用。但是,随着科学技术的发展,这个坐标系的先天弱点也显得越来越突出,难以适应现代科学研究、经济建设和国防尖端技术的需要,它的缺点主要表现在:

(1) 克拉索夫斯基椭球参数同现代精确的椭球参数相比,误差较大,长半径约大 105~109 m,这不仅对研究地球几何形状有影响,特别是该椭球参数只有两个几何参数,不包含表示物理特性的参数,不能满足现今理论研究和实际工作的需要,对于发展空间技术也带来诸多不便。

(2) 椭球定向不明确,即不指向国际通用的 CIO 极,也不指向目前我国使用的 JYD 极,椭球定位实际上采用了前苏联的普尔科沃定位,该定位椭球面与我国的大地水准面呈西高东低的系统性倾斜。东部高程异常达 60 余米。而我国东部地势平坦、经济发达,要求椭球面与大地水准面有较好的密合,但实际情况与此相反。

(3) 该坐标系统的大地点坐标是经局部平差逐次得到的,全国天文大地控制点坐标值实际上连不成一个统一的整体。不同区域的接合部之间存在较大隙距,同一点在不同区的坐标值相差 1~2 m,不同区域的尺度差异也很大。而且坐标传递是从东北至西北西南,前一区的最弱点即为后一区的坐标起算点,因而坐标积累误差明显,这对于发展我国空间技术、国防建设和国家大规模经济建设不利,因此有必要建立新的大地坐标系统。

### 6.2.2.2 1980 年西安坐标系

1978 年,我国决定建立新的国家大地坐标系统,并且在新的国家大地坐标系统中进行全国天文大地网的整体平差,这个坐标系统定名为 1980 年西安大地坐标系统。

1980 年西安坐标系的大地原点设在我国的中部,处于陕西泾阳永乐镇,椭球参数采用 1975 年国际大地测量与地球物理联合会推荐值,它们为:椭球长半径  $a=6\,378\,140\text{ m}$ ;重力场二阶带球谐系数  $J_2=1.082\,63\times 10^{-3}$ ;地心引力常数  $GM=3.986\,005\times 10^{14}\text{ m}^3/\text{s}^2$ ;地球自转角速度  $\omega=7.292\,115\times 10^{-5}\text{ rad/s}$ 。

因而可得 80 椭球两个最常用几何参数为  $a=6\,378\,140\text{ m}$ ;  $f=1/298.257$ 。

椭球定位按我国范围高程异常值平方和最小为原则求解参数。椭球的短轴平行于由地球质心指向 1968.0 地极原点(JYD)的方向,起始大地子午面平行于格林尼治天文台子午面。长度基准与国际统一长度基准一致。高程基准以青岛验潮站 1956 年黄海平均海水面为高程起算基准,水准原点高出黄海平均海水面 72.289 m。

1980 年西安大地坐标系建立后,利用该坐标进行了全国天文大地网平差,提供全国统一的、精度较高的 1980 年国家大地点坐标,据分析,它完全可以满足 1/5 000 测图的需要。

### 6.2.2.3 新 1954 年北京坐标系

由于 1980 年西安坐标系与 1954 年北京坐标系的椭球参数和定位均不同,因而大地控制点在两坐标系中的坐标存在较大差异,最大的达 100 m 以上,这将引起成果换算的不便和地形图图廓和方格线位置的变化,且已有的测绘成果大部分是 1954 年北京坐标系下的。所以,作为过渡,产生了所谓的新 1954 年北京坐标系。

新 1954 年北京坐标系是通过将 1980 年西安坐标系的三个定位参数平移至克拉索夫斯基椭球中心,长半径与扁率仍取克拉索夫斯基椭球几何参数。而定位与 1980 年大地坐标系相同(即大地原点相同),定向也与 1980 椭球相同。因此,新 1954 年北京坐标系的精度和 1980 年坐标系精度相同,而坐标值与旧 1954 年北京坐标系的坐标接近。

### 6.2.3 站心坐标系

如果测量工作以测站为原点,则所构成的坐标系称为测站中心坐标系(简称站心坐标系)。站心坐标系分为站心地平直角坐标系和站心极坐标系。

站心地平直角坐标系是以测站的椭球法线方向为 Z 轴,以测站大地子午线北端与大地地平面的交线为 X 轴,大地平行圈(东方向)与大地地平面的交线为 Y 轴,构成左手坐标系(如图 6-2)。

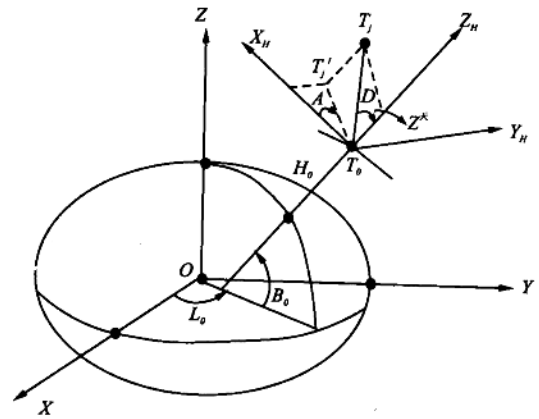


图 6-2 站心坐标系

GPS 相对定位确定的是点之间的相对位置,一般用空间直角坐标差( $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ ),或用大地坐标差( $\Delta B, \Delta L, \Delta H$ )表示。如果建立以已知点( $x_0, y_0, z_0$ )为原点的站心地平直角坐标系,则其他点在该坐标系内的坐标  $x, y, z$  与基线向量的关系为:

$$\begin{bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{bmatrix}_{站} = \begin{bmatrix} -\sin B_0 \cos L_0 & -\sin B_0 \sin L_0 & \cos B_0 \\ -\sin L_0 & \cos L_0 & 0 \\ \cos B_0 \cos L_0 & \cos B_0 \sin L_0 & \sin B_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix}_{0j} \quad (6-3)$$

站心极坐标系以测站的铅垂线为准,以测站点到某点 j 的空间距离  $D$ ,天顶距  $Z^k$  和大地方位角  $A$  表示 j 点的位置(见图 6-2)。

j 点的站心地平直角坐标与站心极坐标之间的关系为:

$$\begin{bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{bmatrix}_{地} = \begin{bmatrix} D_{oj} \sin Z_{oj} \cos A_{oj} \\ D_{oj} \sin Z_{oj} \sin A_{oj} \\ D_{oj} \cos Z_{oj} \end{bmatrix} \quad (6-4)$$

$$\left. \begin{aligned} & D_{oj}^2 = x_j^2 + y_j^2 + z_j^2 \\ & \operatorname{tg} Z_{oj} = \sqrt{(x_j^2 + y_j^2)} / z_j \\ & \operatorname{tg} A_{oj} = y_j / x_j \end{aligned} \right\} \quad (6-5)$$

#### 6.2.4 地方独立坐标系

在我国许多城市测量与工程测量中,若直接采用国家坐标系,则可能会由于远离中央子午线,或由于测区平均高程较大,而导致长度投影变形较大,难以满足工程上或实用上的精度要求。另一方面,对于一些特殊的测量,如大桥施工测量、水利水坝测量、滑坡变形监测等,采用国家坐标系在实用中也会很不方便。因此,基于限制变形,以及方便实用、科学的目的,在许多城市和工程测量中,常常会建立适合本地区的地方独立坐标系。

建立地方独立坐标系,实际上就是通过一些元素的确定来决定地方参考椭球与投影面。

地方参考椭球一般选择与当地平均高程相对应的参考椭球,该椭球的中心、轴向和扁率与国家参考椭球相同,其椭球半径  $\alpha_1$  增大为:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha + \Delta\alpha_1 \\ \Delta\alpha_1 &= H_m + \zeta_0 \end{aligned} \right\} \quad (6-6)$$

式中:  $H$  为当地平均海拔高程,  $\zeta_0$  为该地区的平均高程异常。

而地方投影面的确定中,选取过测区中心的经线或某个起算点的经线作为独立中央子午线。以某个特定方便使用的点和方位为地方独立坐标系的起算原点和方位,并选取当地平均高程面  $H_m$  为投影面。

#### 6.2.5 高斯平面直角坐标系和 UTM 坐标系

大地测量建立的大地坐标的重要作用之一是为测图服务,传统地图均为平面图,作为测图控制的大地点的坐标也必须是平面坐标。因此,需要将椭球面上各点的大地坐标,按照一定的数学规律投影到平面上成为平面直角坐标。

由于地球椭球面是不可展的曲面,无论采用什么数学规律投影都会产生变形。因此,只能按照满足某种特定需要与用途,对一些变形加以限制,使其减小到适当程度,甚至为零。按变形性质,我们可以将投影分为等角投影、等面积投影、等距离投影以及任意投影。

等角投影也叫正形投影、相似投影。即该投影在小区域范围内使平面图形与椭球面上的图形保持相似。目前世界各国采用最广泛的高斯投影和 UTM 投影均是正形投影。这两种投影具有如下特征:

- (1) 椭球面上任一角度,投影到平面上后保持不变。

(2) 中央子午线投影为纵坐标轴。

(3) 高斯投影的中央子午线长度比  $m_0=1$ , 而 *UTM* 投影的  $m_0=0.999 6$ 。

在上述条件下, 可以推出椭球面投影到高斯平面的数学模型。即为高斯投影正算公式:

$$\left. \begin{aligned} x &= X^0 + \frac{1}{2}N \cdot t \cdot \cos^2 B \cdot l^2 + \frac{1}{24}N \cdot t(5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4)\cos^4 B \cdot l^4 + \\ &\quad \frac{1}{720}N \cdot t(61 - 58t^2 + t^4 + 270\eta^2 - 330\eta^2 t^2)\cos^6 B \cdot l^6 \\ y &= N \cdot \cos B \cdot l + \frac{1}{6}N(1 - t^2 + \eta^2)\cos^3 B \cdot l^3 + \frac{1}{120}N(5 - 18t^2 + \\ &\quad t^4 + 14\eta^2 - 58\eta^2 t^2)\cos^5 B \cdot l^5 \end{aligned} \right\} (6-7)$$

式中:  $B$  为投影点的大地纬度;  $l=L-L_0$ ,  $L$  为投影点的大地经度,  $L_0$  为轴子午线的大地经度;  $N$  为投影点的卯酉圈曲率半径;  $t=\tan B$ ,  $\eta=e'\cos B$ ;  $e'$ ——椭球第二偏心率。

$X^0$  为当  $l=0$  时, 从赤道起算的子午线弧长, 其计算公式为:

$$X^0 = a(1 - e^2)(A_0 B + A_2 \sin 2B + A_4 \sin 4B + A_6 \sin 6B + A_8 \sin 8B) \quad (6-8)$$

其中系数

$$\begin{aligned} A_0 &= 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{350}{512}e^6 + \frac{11\ 025}{16\ 384}e^8 \\ A_2 &= -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}e^2 + \frac{60}{64}e^4 + \frac{525}{512}e^6 + \frac{17\ 640}{16\ 384}e^8\right) \\ A_4 &= \frac{1}{4}\left(\frac{15}{64}e^4 + \frac{210}{512}e^6 + \frac{8\ 820}{16\ 384}e^8\right) \\ A_6 &= \frac{1}{6}\left(\frac{35}{512}e^6 + \frac{2\ 520}{16\ 384}e^8\right) \\ A_8 &= \frac{1}{8}\left(\frac{315}{16\ 384}e^8\right) \end{aligned}$$

$e$  为椭球第一偏心率。

如果顾及 *UTM* 中央子午线投影长度比等于 0.999 6, 令  $m_0=0.999 6$ , 则 *UTM* 投影正算公式为:

$$\begin{aligned} x_n &= m_0 x_G = 0.999 6 x_G \\ y_n &= m_0 y_G = 0.999 6 y_G \end{aligned} \quad (6-9)$$

由高斯平面直角坐标  $x, y$  反求椭球经、纬度  $L, B$ , 称为高斯投影反算公式, 其形式为:

$$\left. \begin{aligned} B &= B_f - \frac{t_f}{2M_f N_f} y^2 + \frac{t_f}{24M_f N_f^3} (5 + 3t_f^2 + \eta_f^2 - 9\eta_f^2 t_f^2) y^4 - \\ &\quad \frac{t_f}{720M_f N_f^5} (61 + 90t_f^2 + 45t_f^4) y^6 \\ L &= \frac{1}{N_f \cos B_f} y - \frac{1}{6N_f^3 \cos B_f} (1 + 2t_f^2 + \eta_f^2) y^3 + \\ &\quad \frac{1}{120N_f^5 \cos B_f} (5 + 28t_f^2 + 24t_f^4 + 6\eta_f^2 + 8\eta_f^2 t_f^2) y^5 \end{aligned} \right\} (6-10)$$

其中:  $B_f$  为投影点的纬度, 下标“ $f$ ”表示与该点有关的量。投影点也称为底点, 其纬度计算公式为:

$$B_f = B_0 + \sin 2B_0 \{K_0 + \sin^2 B_0 [K_2 + \sin^2 B_0 (K_4 + K_6 \sin^2 B_0)]\} \quad (6-11)$$



其中 
$$B_0 = \frac{X}{a(1-e^2)A_0}$$

$X$  为  $y=0$  时,  $x$  值对应的子午线弧长。

$$\begin{aligned} K_0 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{350}{512}e^6 + \frac{1\ 1025}{16\ 384}e^8 \right] \\ K_2 &= -\frac{1}{3} \left[ \frac{63}{64}e^4 + \frac{1\ 108}{512}e^6 + \frac{58\ 239}{16\ 384}e^8 \right] \\ K_4 &= \frac{1}{3} \left[ \frac{604}{512}e^6 + \frac{68\ 484}{16\ 384}e^8 \right] \\ K_6 &= -\frac{1}{3} \left[ \frac{26\ 328}{16\ 384}e^8 \right] \end{aligned}$$

高斯投影和 UTM 投影是正形投影,其角度没有变形,而高斯投影中长度除中央子午线外均存在变形,距中央子午线越远,长度变形越大。为了限制长度变形,根据国际测量协会规定,将全球按一定经差分带若干带。我国采用 6 度带或 3 度带。6 度带是自零度子午线起每隔经度差 6 度自西向东分带,带号  $n$  与相应的中央子午线经度  $L_0$  的关系为:

$$\left. \begin{aligned} L_0 &= 6^\circ n - 3^\circ \\ n &= \frac{1}{6}(L_0 + 3^\circ) \end{aligned} \right\} \quad (6-12)$$

3 度带是在 6 度带的基础上分带,其带号  $n'$  与相应的中央子午线经度  $L_0'$  的关系为:

$$\left. \begin{aligned} L_0' &= 3n' \\ n' &= \frac{1}{3}L_0' = 2n - 1 \end{aligned} \right\} \quad (6-13)$$

高斯投影的长度变形比公式为:

$$m = 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{l''}{\rho''} \right)^2 \cos^2 B (1 + \eta^2) + \frac{1}{24} \left( \frac{l''}{\rho''} \right)^4 \cos^4 B (5 - 4tg^2 B) \quad (6-14)$$

或

$$m = 1 + \frac{y^2}{2R_m^2} + \frac{y^4}{24R_m^4} \quad (6-15)$$

由以上两式可以看到,长度变形  $(m-1)$  与离中央子午线的经差的平方  $\left(\frac{l''}{\rho''}\right)^2$  或与横坐标的平方  $y^2$  成正比。计算表明,在纬度  $30^\circ$  以下的 6 度带边缘地区,长度变形大于千分之一,3 度带边缘长度变形大于万分之二。

为了避免在平面直角坐标系中出现负值,给横坐标  $y$  值加入 500 km 常数。

UTM 投影中央子午线投影长度比为  $1:0.999\ 6$ ,即存在变形。在我国一般采用的是高斯投影。

### 6.3 GPS 定位测量中的坐标转换

我们知道,不同测量成果均对应于各自的坐标系。GPS 定位结果属协议地球地心坐标系,即 WGS-84 坐标系,且通常以空间直角坐标  $(X, Y, Z)$ , 或以椭球大地坐标  $(B, L, H)$ , 的形式

给出。而常规地面测量成果或是属于国家的参心大地坐标系,或是属于地方独立坐标系。因此必须实现 GPS 成果的坐标系的转换。另外,GPS 相对定位所求得的 GPS 基线向量通常是以 WGS-84 坐标差的形式表示,对于这种特殊的坐标表示形式,应考虑其相应的转换模型。

为了与传统测量成果一致,常将 GPS 成果投影到平面,形成 GPS 二维坐标系成果,因此还应考虑二维坐标转换。

### 6.3.1 空间直角坐标系与椭球大地坐标系的关系

无论是地心坐标系还是参心坐标系,测量成果均可以空间直角坐标 $(X, Y, Z)$ 或以大地坐标 $(B, L, H)$ 的形式表示。

首先推导给出两者之间的关系。设在椭球面上  $P$  点(大地经度  $L$ )的子午面上,以子午椭圆的中心  $O$  为原点,建立  $X^*, Z$  平面直角坐标系。过  $P$  点作子午圈的切线  $TP$ ,它与  $X^*$  轴的夹角为  $90^\circ + B$ (见图 6-3)。

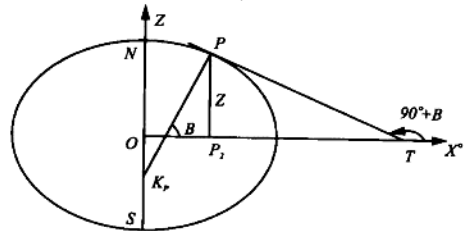


图 6-3 空间直角坐标系与椭球大地坐标系的关系

$P$  点的斜率为:

$$\frac{dZ}{dX^*} = \operatorname{tg}(90^\circ + B) = -\frac{\cos B}{\sin B} \quad (6-16)$$

由子午线椭圆的方程

$$\frac{X^{*2}}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} = 1 \quad (6-17)$$

对  $x^*$  求导得

$$\frac{dZ}{dX^*} = -\frac{b^2 X^*}{a^2 Z} \quad (6-18)$$

将(6-16)式代入后有

$$\frac{b^2 X^*}{a^2 Z} = \frac{\cos B}{\sin B} \quad (6-19)$$

平方后得:

$$b^4 X^{*2} \sin^2 B - a^4 Z^2 \cos^2 B = 0 \quad (6-20)$$

而由(6-17)可得

$$b^2 X^{*2} + a^2 Z^2 = a^2 b^2 \quad (6-21)$$

将(6-20)与(6-21)式用矩阵表示为:

$$\begin{bmatrix} b^4 \sin^2 B & -a^4 \cos^2 B \\ b^2 & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^{*2} \\ Z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a^2 b^2 \end{bmatrix} \quad (6-22)$$

由上式可得:

$$\begin{bmatrix} X^* \\ Z \end{bmatrix} = \frac{1}{(a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)^{\frac{1}{2}}} \begin{bmatrix} a^2 \cos B \\ b^2 \sin B \end{bmatrix} \quad (6-23)$$

设  $PK_p = N$  ( $N$  为卯酉圈曲率半径),那么由图 6-3 可直接写出:

$$X^* = N \cos B \quad (6-24)$$

将(6-23)式中的  $X^*$  代入(6-24)式,有:

$$N = \frac{a^2}{(a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)^{\frac{1}{2}}} \quad (6-25)$$

为此有：

$$\begin{bmatrix} X^* \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \cos B \\ N(1 - e^2) \sin B \end{bmatrix} \quad (6-26)$$

那么对于空间直角坐标系：

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X^* \cos L \\ X^* \sin L \\ Z \end{bmatrix} \quad (6-27)$$

将(6-26)式代入有：

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \cos B \cos L \\ N \cos B \sin L \\ N(1 - e^2) \sin B \end{bmatrix} \quad (6-28)$$

当点不在椭球面上而位于空间某点  $P_{\text{星}}$  时，则有：

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N + H) \cos B \cos L \\ (N + H) \cos B \sin L \\ [N(1 - e^2) + H] \sin B \end{bmatrix} \quad (6-29)$$

(6-29)是已知椭球大地坐标  $(B, L, H)$  求空间直角坐标  $(X, Y, Z)$ ，称为正解。而由  $(X, Y, Z)$  求  $(B, L, H)$  称为反解，是一种迭代求解关系。

$$\left. \begin{aligned} B &= \text{tg}^{-1} \left[ \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \left( 1 - \frac{e^2 N}{(N + H)} \right)^{-1} \right] \\ L &= \text{tg}^{-1} Y/X \\ H &= \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\cos B} - N \end{aligned} \right\} \quad (6-30)$$

其中： $N = a / \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}$ 。

由(6-29)可求出空间直角坐标与椭球坐标之间的微分变换关系。不顾及椭球元素的变化，对  $X, Y, Z$  和  $B, L, H$  进行全微分，可得：

$$\begin{bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho}(M + H) \sin B \cos L & -\frac{1}{\rho}(N + H) \cos B \sin L & \cos B \cos L \\ -\frac{1}{\rho}(M + H) \sin B \sin L & \frac{1}{\rho}(N + H) \cos B \cos L & \cos B \sin L \\ \frac{1}{\rho}(M + H) \cos B & 0 & \sin B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dB \\ dL \\ dH \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} dB \\ dL \\ dH \end{bmatrix} \quad (6-31)$$

$$\begin{bmatrix} dB \\ dL \\ dH \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{bmatrix} \quad (6-32)$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-\sin B \cos L}{M + H} \cdot \rho & \frac{-\sin B \sin L}{M + H} \cdot \rho & \frac{\cos B}{M + H} \cdot \rho \\ \frac{-\sin L}{(N + H) \cos B} \cdot \rho & \frac{\cos L}{(N + H) \cos B} \cdot \rho & 0 \\ \cos B \cos L & \cos B \sin L & \sin B \end{bmatrix}$$

### 6.3.2 三维坐标转换模型

设有两三维空间直角坐标系  $O_T-X_T Y_T Z_T$  和  $O_S-X_S Y_S Z_S$  有图 6-4 所示的关系,其坐标系原点不一致,存在三个平移量  $\Delta X_0, \Delta Y_0, \Delta Z_0$ 。且通常各坐标轴之间相互不平行,对应的坐标轴之间存在三个微小的旋转角  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ ; 两个坐标系的尺度也不一致,设  $O_T-X_T Y_T Z_T$  的尺度为 1, 而  $O_S-X_S Y_S Z_S$  的尺度为  $1+m$ 。

坐标转换模型有多种,应用最广的是 7 参数转换模型,主要有布尔沙模型和莫洛斯基模型。

#### 6.3.2.1 布尔沙(Bursa)模型

由图 6-4 知,任意点  $P_i$  在两坐标系中的坐标之间有如下关系:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{i_t} = \begin{bmatrix} \Delta x_0^B \\ \Delta y_0^B \\ \Delta z_0^B \end{bmatrix} + (1+m^B)R_1(\epsilon_x^B)R_2(\epsilon_y^B)R_3(\epsilon_z^B) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{i_s} \quad (6-33)$$

考虑到两坐标轴定向的差别一般很小,因此欧拉角  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$  通常都是微小量,有:

$$R(\epsilon) = R_1(\epsilon_x^B)R_2(\epsilon_y^B)R_3(\epsilon_z^B) = \begin{bmatrix} 1 & \epsilon_z & -\epsilon_y \\ -\epsilon_z & 1 & \epsilon_x \\ \epsilon_y & -\epsilon_x & 1 \end{bmatrix} \quad (6-34)$$

$$\text{令 } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q(\epsilon) = \begin{bmatrix} 0 & \epsilon_z & -\epsilon_y \\ -\epsilon_z & 0 & \epsilon_x \\ \epsilon_y & -\epsilon_x & 0 \end{bmatrix}$$

有  $R(\epsilon) = I + Q(\epsilon)$  将其代入到 (6-33) 式则有:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{i_t} = \begin{bmatrix} \Delta x_0^B \\ \Delta y_0^B \\ \Delta z_0^B \end{bmatrix} + (1+m^B)R(\epsilon^B) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{i_s} \quad (6-35)$$

舍去  $m^B Q(\epsilon)$  项,可得:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{i_t} = \begin{bmatrix} \Delta x_0^B \\ \Delta y_0^B \\ \Delta z_0^B \end{bmatrix} + (1+m^B) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{i_s} + \begin{bmatrix} 0 & \epsilon_z & -\epsilon_y \\ -\epsilon_z & 0 & \epsilon_x \\ \epsilon_y & -\epsilon_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{i_s} \quad (6-36)$$

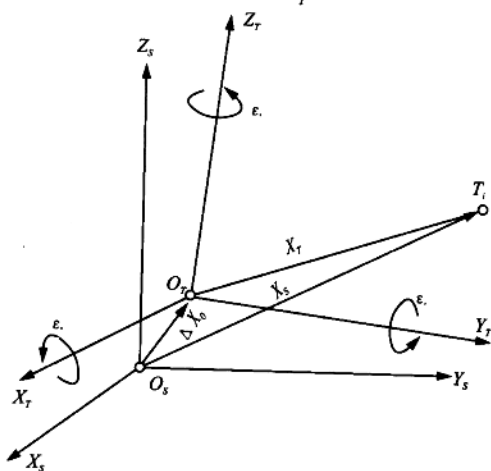


图 6-4 两空间直角坐标系的关系

上式即为含有 7 个转换参数  $\Delta x_0^B, \Delta y_0^B, \Delta z_0^B, \epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, m$  的著名的布尔莎 7 参数转换模型。

### 6.3.2.2 莫洛金斯基(МОЛОДЕНСКИЙ)模型

在两个坐标系中,如果认为,受尺度和旋转影响的只是任意点  $P_i$  与某一参考点  $P_k$  的坐标差,则有关系:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{i_T} = \begin{bmatrix} \Delta x_0^M \\ \Delta y_0^M \\ \Delta z_0^M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{i_T} + (1 + m^M)R(\epsilon^m) \begin{bmatrix} x_i - x_k \\ y_i - y_k \\ z_i - z_k \end{bmatrix}_T \quad (6-37)$$

或写为

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{i_T} = \begin{bmatrix} \Delta x_0^M \\ \Delta y_0^M \\ \Delta z_0^M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{i_T} + m \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}_{k_i T} + \begin{bmatrix} 0 & \epsilon_z & -\epsilon_y \\ -\epsilon_z & 0 & \epsilon_x \\ \epsilon_y & -\epsilon_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}_{k_i T} \quad (6-38)$$

在莫洛金斯基模型中,认为受旋转和尺度影响的只是  $P_i$  点和某参考点  $P_k$  的坐标差。

7 参数坐标转换模型,除了布尔莎模型、莫洛金斯基模型外,还有维斯模型、范氏模型、武测模型,这些模型在表达形式上虽不尽相同,但参数间存在着明确的解析关系,可以相互进行转换,用它们分别换算其他点的坐标时,结果完全相同。因此,这几种转换模型是等价的。

此外,为了克服 7 参数模型的不完善,产生了多于 7 参数、在转换参数中考虑坐标系可能存在系统性误差影响的坐标转换模型,如霍丁公式(9 参数),公式中除了欧拉角  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$  外,还有  $d\alpha$ (方位变化)和  $d\beta$ (天顶距变化);以及克拉克威斯基本—汤姆森模型(10 参数)等。它们也可以通过一定的方法转换成布尔莎模型。因此,坐标转换中的布尔莎模型是一个重要的基础模型。

### 6.3.3 三维坐标差转换模型

GPS 相对定位的基线向量通常是以三维坐标差的形式表示,按照上述布尔莎模型(或其他模型)列出两个点的坐标转换方程,将两式相减,就得到两点间的三维坐标差的转换模型为:

$$\begin{bmatrix} x_j - x_i \\ y_j - y_i \\ z_j - z_i \end{bmatrix}_S = (1 + m) \begin{bmatrix} x_j - x_i \\ y_j - y_i \\ z_j - z_i \end{bmatrix}_T + \begin{bmatrix} 0 & \epsilon_z & -\epsilon_y \\ -\epsilon_z & 0 & \epsilon_x \\ \epsilon_y & -\epsilon_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_j - x_i \\ y_j - y_i \\ z_j - z_i \end{bmatrix}_T \quad (6-39)$$

记  $\Delta x_{ij} = x_j - x_i, \Delta y_{ij} = y_j - y_i, \Delta z_{ij} = z_j - z_i$ , (6-39) 式也可写为:

$$\begin{bmatrix} \Delta x_{ij} \\ \Delta y_{ij} \\ \Delta z_{ij} \end{bmatrix}_S = \begin{bmatrix} \Delta x_{ij} \\ \Delta y_{ij} \\ \Delta z_{ij} \end{bmatrix}_T + m \begin{bmatrix} \Delta x_{ij} \\ \Delta y_{ij} \\ \Delta z_{ij} \end{bmatrix}_T + \begin{bmatrix} 0 & -\Delta z_{ij} & \Delta y_{ij} \\ \Delta z_{ij} & 0 & -\Delta x_{ij} \\ -\Delta y_{ij} & \Delta x_{ij} & 0 \end{bmatrix}_T \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \end{bmatrix} \quad (6-40)$$

由于坐标差与平移参数无关,所以,三维坐标差中仅包含三个旋转参数和一个平移参数,且由以上任何一个 7 参数转换模型得到的坐标差转换模型完全相同。此外,对于以  $i$  点为原点的站心坐标系,设任意点  $j$  的坐标为  $(x_j, y_j, z_j)$ ,则其与空间直角坐标  $(X_i, Y_i, Z_i)$  和  $(x_j, y_j, z_j)$  有关系式:

$$\begin{bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin B_i \cos L_i & -\sin B_i \sin L_i & \cos B_i \\ -\sin L_i & \cos L_i & 0 \\ \cos B_i \cos L_i & \cos B_i \sin L_i & \sin B_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_j - X_i \\ Y_j - Y_i \\ Z_j - Z_i \end{bmatrix} = R_{ij} \begin{bmatrix} \Delta X_{ij} \\ \Delta Y_{ij} \\ \Delta Z_{ij} \end{bmatrix} \quad (6-41)$$

由以上站心坐标与空间直角坐标系的关系,可以导出基于站心坐标系的三维坐标转换模型

$$\begin{bmatrix} \Delta X_{ij} \\ \Delta Y_{ij} \\ \Delta Z_{ij} \end{bmatrix}_S = \begin{bmatrix} \Delta X_{ij} \\ \Delta Y_{ij} \\ \Delta Z_{ij} \end{bmatrix}_T + \begin{bmatrix} \Delta X_{ij} \\ \Delta Y_{ij} \\ \Delta Z_{ij} \end{bmatrix}_T m + \bar{R}_{ij} \begin{bmatrix} \epsilon_\eta \\ \epsilon_\zeta \\ \epsilon_A \end{bmatrix} \quad (6-42)$$

式中:  $\epsilon_\eta, \epsilon_\zeta, \epsilon_A$  分别为绕站心坐标系的三个坐标轴的旋转角,其中  $\epsilon_A$  为绕天顶(法线)的旋转角,而

$$\bar{R}_{ij} = R_{ij} \begin{bmatrix} 0 & -\Delta Z_{ij} & \Delta Y_{ij} \\ \Delta Z_{ij} & 0 & -\Delta X_{ij} \\ -\Delta Y_{ij} & \Delta X_{ij} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Delta Y_{ij} \cos B_i - \Delta Z_{ij} \sin B_i \sin L_i & \Delta Z_{ij} \cos L_i & -\Delta Y_{ij} \sin B_i + \Delta Z_{ij} \cos B_i \sin L_i \\ \Delta X_{ij} \cos B_i + \Delta Z_{ij} \sin B_i \cos L_i & \Delta Z_{ij} \sin L_i & \Delta X_{ij} \sin B_i - \Delta Z_{ij} \cos B_i \cos L_i \\ -\Delta X_{ij} \sin B_i \sin L_i + \Delta Y_{ij} \sin B_i \cos L_i & -\Delta X_{ij} \cos L_i - \Delta Y_{ij} \sin L_i & -\Delta X_{ij} \cos B_i \sin L_i + \Delta Y_{ij} \cos B_i \cos L_i \end{bmatrix}^T \quad (6-43)$$

### 6.3.4 联合平差确定转换参数

无论利用哪种坐标转换模型,均必须已知相应的转换参数。如果不知道两个坐标间的转换参数,则需根据两坐标系在共同点(公共点)的坐标  $(X, Y, Z)_{iS}$  和  $(X, Y, Z)_{iT}$  ( $i=1, 2, 3, \dots$ ), 代入转换模型反求两个坐标系间的转换参数,然后利用所求得的转换参数再回代到模型中对另一部分点进行坐标转换。一般常用联合平差的方法求转换参数。

可以将(6-36)式的布尔莎转换模型写成如下形式:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{iS} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & X_{iT} & 0 & -Z_{iT} & Y_{iT} \\ 0 & 1 & 0 & Y_{iT} & Z_{iT} & 0 & -X_{iT} \\ 0 & 0 & 1 & Z_{iT} & -Y_{iT} & X_{iT} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \\ \Delta z_0 \\ m \\ \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{iT}$$

或 
$$\bar{X}_i = C_i T + \bar{X}_{iT} \quad (6-44)$$

式中  $\bar{X}_i = [X \ Y \ Z]_{iS}^T$   $\bar{X}_{iT} = [X \ Y \ Z]_{iT}^T$

$T = [\Delta x_0 \ \Delta y_0 \ \Delta z_0 \ m \ \epsilon_x \ \epsilon_y \ \epsilon_z]^T$  是要确定的 7 个转换参数组成的向量。

要确定 7 个参数,至少需要同时知道三个公共点在两坐标系的坐标值,利用最小二乘法对参数  $T$  进行求解。由于这两个坐标系分别属于卫星网的地心坐标系(S)和地面网的参心坐标

系( $T$ ), 所以将这个求解过程称为卫星网与地面网的联合平差。

在联合平差时, 首先以 7 个转换参数和公共点的地面网坐标为未知数, 以公共点卫星网坐标为观测值, 则有误差方程如下:

$$\left. \begin{aligned} V_{i_T} &= dX_{i_T} && \text{权 } P_{i_T} \\ V_{i_S} &= dX_{i_S} + C_i T + L_i && P_{i_S} \end{aligned} \right\} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6-45)$$

$n$  为公共点的个数。并设地面网和卫星网联合平差后的坐标为:

$$\left. \begin{aligned} \hat{X}_{i_T} &= X_{i_T} + dX_{i_T} = X_{i_T} + V_{i_T} \\ \hat{X}_{i_S} &= X_{i_S} + V_{i_S} \end{aligned} \right\} \quad (6-46)$$

$$C_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & X_{i_T} & 0 & -Z_{i_T} & Y_{i_T} \\ 0 & 1 & 0 & Y_{i_T} & Z_{i_T} & 0 & -X_{i_T} \\ 0 & 0 & 1 & Z_{i_T} & -Y_{i_T} & X_{i_T} & 0 \end{bmatrix} \quad (6-47)$$

$$L_i = \begin{bmatrix} X_{i_T} - X_{i_S} \\ Y_{i_T} - Y_{i_S} \\ Z_{i_T} - Z_{i_S} \end{bmatrix} \quad (6-48)$$

由(6-45)可组成法方程:

$$\begin{bmatrix} P_T + P_S & P_S C \\ C^T P_S & C^T P_S C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dX_T \\ T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_S L \\ C^T P_S L \end{bmatrix} = 0 \quad (6-49)$$

式中  $P_S = \begin{bmatrix} P_{1_S} & & & \\ & P_{2_S} & & \\ & & \ddots & \\ & & & P_{n_S} \end{bmatrix}$        $P_T = \begin{bmatrix} P_{1_T} & & & \\ & P_{2_T} & & \\ & & \ddots & \\ & & & P_{n_T} \end{bmatrix}$

$C = [C_1 \ C_2 \ \dots \ C_n]^T$        $L = [L_1 \ L_2 \ \dots \ L_n]^T$

$dX_T = [dX_{1_T} \ dX_{2_T} \ \dots \ dX_{n_T}]^T$

对(6-49)求解, 可得:

$$\begin{bmatrix} d\hat{X}_T \\ \hat{T} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} P_T + P_S & P_S C \\ C^T P_S & C^T P_S C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} P_S L \\ C^T P_S L \end{bmatrix} \quad (6-50)$$

转换参数解的精度

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{V^T P V}{3n - m}} \quad (6-51)$$

$m$  为转换参数个数

$$V^T P V = V_T^T P_T V_T + V_S^T P_S V_S \quad (6-52)$$

转换参数协因数阵  $Q_{\hat{T}}$  为:

$$Q_{\hat{T}} = [C^T (P_S^{-1} + P_T^{-1}) C]^{-1} \quad (6-53)$$

则转换参数解的精度

$$D_{\hat{T}} = \hat{\sigma}_0 Q_{\hat{T}} \quad (6-54)$$

将由(6-50)式求出的转换参数代入(6-36)的布尔莎转换模型中去,就可实现空间直角坐标系间的坐标转换。转换后坐标的精度和准确性,不但取决于需转换的坐标本身的精度,而且更取决于采用的转换参数的精度,以及其能否真正在两坐标系之间实现转换的匹配兼容,不可靠的转换参数将导致原网的极大变形。

影响转换参数的求定精度主要因素之一一是用于联合平差的卫星网和地面网公共点的坐标精度,GPS卫星网绝对定位坐标的精度通常在5~30 m之间。因此,其三维空间坐标精度较低。另一方面,地面网点是由大地坐标( $B, L, H$ )按(6-29)式求出,而其中的大地高 $H$ ,是由正常高加上该点的高程异常值得到的。目前我国高程异常的精度为米级。鉴于以上两个原因,由(6-50)所求得的转换参数的精度不高。

另外,按联合平差的方法用(6-50)求转换参数,还有以下几方面的问题应注意。

(1) 联合平差时,公共点的几何分布情况,也影响到求出的转换参数的精度。原则上说,所求的转换参数确定的是两地球坐标系的几何关系,因此,公共点应全球分布。而对于一个小区域,例如几十平方公里的范围,在此区域中的公共点间的距离相对地球半径来说是非常小的,因而将导致系数矩阵性态很差,求出的转换参数不可靠。

(2) 按最小二乘法采用(6-50)式确定的转换参数,在用其进行坐标转换时,只能保证转换后的坐标与已有坐标在公共点区域内平均差异最小。这说明两坐标系之间有间隙,即转换后公共点上有两套同属一个坐标系统却又有微小差异的坐标。这对使用是不方便的。为了实用方便,希望坐标系统转换后,公共点上的坐标完全重合,目前采用的较为广泛的是约束平差的方法,将在下一节介绍。

## 6.4 GPS网的三维平差

GPS网是由GPS相对定位求得的基线向量构成的空间基线向量网,并在GPS网平差时,将这些基线向量及其协方差作为网平差的基本观测量。

GPS空间三维基线向量网平差常采用以下几种平差类型。

(1) 三维无约束平差。我们知道,GPS基线向量本身已隐含尺度基准和方位基准,因此在三维平差中可只选某一点的固定坐标进行网平差,即所谓的无约束平差。三维无约束平差是GPS网平差中不可缺少的步骤,它可发现基线向量中存在的粗差、系统误差。通过检验发现基线向量随机模型误差,可客观评价GPS网本身的内符合精度。

(2) GPS网三维约束平差。以国家大地坐标系或地方坐标系的某些点的固定坐标、固定边长和方位为网的基准,将其作为平差中的约束条件,并在平差中考虑GPS网与地面网之间的转换系数。因此,这种形式的平差是在地面参考坐标系中进行的,故称为GPS三维约束平差。该平差后获得网的坐标已是国家大地坐标系或地方坐标系的坐标,因而约束平差是目前GPS网成果转换行之有效的办法。

(3) 三维联合平差。平差中除了GPS基线向量观测值和地面基准约束数据外,还包含了地面常规网观测值,如边长、方向、天文方位角、天顶距、水准高差乃至天文经纬度,将这些数据一并进行平差,也就是GPS网和地面观测数据的联合平差,其平差后网中点的坐标仍属地面



坐标系框架下的。

本节除分别对这三种类型的平差进行介绍外,还将讨论平差中涉及的协方差、转换系数以及三维平差中不准确的大地高对平差结果的影响问题。

### 6.4.1 三维无约束平差

三维无约束平差的主要目的是考察 GPS 基线向量网本身的内符合精度以及考察基线向量之间有无明显的系统误差和粗差,其平差应在不引入外部基准,或者虽引入外部基准但并不会由其误差使控制网产生变形和改正。由于 GPS 基线向量本身提供了尺度基准和定向基准,故 GPS 网平差时,只需提供一个位置基准,且由于只引入一个位置基准,因此,网不会因该基准误差产生变形,所以是一种无约束平差。平差中有两种引入基准的方法:一种是取网中任意一点的伪距定位坐标作为网的位置基准;另一种是引入一种合适的近似坐标系统下的秩亏自由网基准。

#### 6.4.1.1 基线向量观测方程

设:  $L_{ij} = [\Delta X_{ij}, \Delta Y_{ij}, \Delta Z_{ij}]^T$  为 GPS 网任一基线向量,则网平差时,其观测方程为:

$$\begin{bmatrix} V_{\Delta X_{ij}} \\ V_{\Delta Y_{ij}} \\ V_{\Delta Z_{ij}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dX_i \\ dY_i \\ dZ_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dX_j \\ dY_j \\ dZ_j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta X_{ij} - X_i + X_j \\ \Delta Y_{ij} - Y_i + Y_j \\ \Delta Z_{ij} - Z_i + Z_j \end{bmatrix} \quad (6-55)$$

写成矩阵形式  $V_{ij} = -E dX_i + E dX_j - L_{ij} \quad (6-56)$

其对应的方差协方差阵和权阵分别为:

$$D_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{\Delta X}^2 & \sigma_{\Delta X \Delta Y} & \sigma_{\Delta X \Delta Z} \\ \sigma_{\Delta X \Delta Y} & \sigma_{\Delta Y}^2 & \sigma_{\Delta Y \Delta Z} \\ \sigma_{\Delta X \Delta Z} & \sigma_{\Delta Y \Delta Z} & \sigma_{\Delta Z}^2 \end{bmatrix} \quad P_{ij} = D_{ij}^{-1} \quad (6-57)$$

#### 6.4.1.2 位置基准方程

当引入一个点的伪距定位值作为固定位置时,设第 k 点为固定点,有基准方程为:

$$\begin{bmatrix} dX_k \\ dY_k \\ dZ_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_k^0 \\ Y_k^0 \\ Z_k^0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_k \\ Y_k \\ Z_k \end{bmatrix} = 0 \quad (6-58)$$

或  $dX_k = 0$ 。

而对秩亏自由网平差位置基准,有基准方程

$$G^T dB = 0 \quad (6-59)$$

其中

$$G^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{[E \ E \ \cdots \ E]}_{n \text{ 个}} \quad (6-60)$$

$$dB = [dX_1, dY_1, dZ_1, \dots, dX_n, dY_n, dZ_n]^T \quad (6-61)$$

### 6.4.1.3 法方程的组成及解算

由于 GPS 网各基线向量观测值之间可认为是相互独立的,且误差方程的坐标未知数的系数均是单位阵,因而其法方程即简单又有规律,可分别对每个基线向量观测值的观测方程组成法方程,由(6-56)有:

$$\begin{bmatrix} P_{ij} & -P_{ij} \\ -P_{ij} & P_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dX_i \\ dX_j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -P_{ij}L_{ij} \\ P_{ij}L_{ij} \end{bmatrix} = 0 \quad (6-62)$$

再将这些单个法方程的系数和常数项,加到总法方程对应的系数项和常数项上去。

$$\begin{bmatrix} \sum P_1 & -\sum P_{12} & \dots & \sum P_{1n} \\ -\sum P_{21} & \sum P_2 & \dots & \sum P_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\sum P_{n1} & -\sum P_{n2} & \dots & \sum P_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ \vdots \\ dX_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sum P_1L_{1k} \\ \sum P_2L_{2k} \\ \vdots \\ \sum P_nL_{nk} \end{bmatrix} = 0 \quad (6-63)$$

或

$$Nd\bar{X} - U = 0$$

其中:  $d\bar{X} = (dX_1^T, dX_2^T, \dots, dX_n^T)^T$ 。

于是可解得坐标未知数

$$d\bar{X} = N^{-1}U \quad (6-64)$$

### 6.4.1.4 精度评定

单位权中误差估值为

$$\sigma_0^2 = \frac{V^T P V}{3m - 3n + 3} \quad (6-65)$$

这里  $n$  为网中的基线向量数,  $\mu$  为网的总点数。坐标未知数  $d\bar{X}$  的方差估值为:

$$D_{\bar{X}} = \sigma_0^2 N^{-1} \quad (6-66)$$

由此我们可以通过改正数检验了解网自身的内符合精度,观察网中是否可能存在粗差和系统误差。

## 6.4.2 GPS 网的三维约束平差

GPS 基线向量网的三维约束平差是在国家大地坐标系中进行的,平差中将地面点中已知国家大地坐标的点的方位、边长作为基准约束条件,由此建立 GPS 三维基线向量的观测方程。

### 6.4.2.1 GPS 基线向量观测方程

观测方程必须顾及 WGS-84 坐标系与国家大地坐标系间的转换参数,即应顾及 7 个转换参数。但由于观测量——基线向量是以三维坐标差的形式表示的,因而转换关系与平移参数无关,7 个参数中只需考虑尺度参数  $m$  和三个旋转参数  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ , 两坐标系的坐标差转换模型

为:

$$\begin{bmatrix} \Delta X_{ij} \\ \Delta Y_{ij} \\ \Delta Z_{ij} \end{bmatrix}_s = (1 + m) \begin{bmatrix} \Delta X_{ij} \\ \Delta Y_{ij} \\ \Delta Z_{ij} \end{bmatrix}_T + R_{ij} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \end{bmatrix} \quad (6-67)$$

其中

$$R_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -\Delta Z_{ij} & \Delta Y_{ij} \\ \Delta Z_{ij} & 0 & -\Delta X_{ij} \\ -\Delta Y_{ij} & \Delta X_{ij} & 0 \end{bmatrix}$$

由(6-67)式可得在考虑转换参数后的 GPS 基线向量观测方程

$$\begin{bmatrix} V_{\Delta X_{ij}} \\ V_{\Delta Y_{ij}} \\ V_{\Delta Z_{ij}} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} dX_i \\ dY_i \\ dZ_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dX_j \\ dY_j \\ dZ_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta X_{ij} \\ \Delta Y_{ij} \\ \Delta Z_{ij} \end{bmatrix} m + R_{ij} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_{\Delta X_{ij}} \\ L_{\Delta Y_{ij}} \\ L_{\Delta Z_{ij}} \end{bmatrix} \quad (6-68)$$

式中

$$\begin{bmatrix} L_{\Delta X_{ij}} \\ L_{\Delta Y_{ij}} \\ L_{\Delta Z_{ij}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_j^0 - X_i^0 - \Delta X_{ij} \\ Y_j^0 - Y_i^0 - \Delta Y_{ij} \\ Z_j^0 - Z_i^0 - \Delta Z_{ij} \end{bmatrix}$$

通常 GPS 基线向量以空间直角坐标  $(\Delta X, \Delta Y, \Delta Z)^T$  表示, 而地面网坐标系统的坐标是以大地坐标  $(B, L, H)^T$  表示, 因此, 应将两坐标系的转换关系式线性化, 将(6-31)给出两者间的微分关系代入(6-68), 则观测值误差方程为:

$$\begin{bmatrix} V_{\Delta X_{ij}} \\ V_{\Delta Y_{ij}} \\ V_{\Delta Z_{ij}} \end{bmatrix} = - A_i \begin{bmatrix} dB_i \\ dL_i \\ dH_i \end{bmatrix} + A_j \begin{bmatrix} dB_j \\ dL_j \\ dH_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta X_{ij}^0 \\ \Delta Y_{ij}^0 \\ \Delta Z_{ij}^0 \end{bmatrix} m + R_{ij} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_{\Delta X_{ij}} \\ L_{\Delta Y_{ij}} \\ L_{\Delta Z_{ij}} \end{bmatrix} \quad (6-69)$$

其中

$$\begin{bmatrix} \Delta X_{ij}^0 \\ \Delta Y_{ij}^0 \\ \Delta Z_{ij}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_j^0 - X_i^0 \\ Y_j^0 - Y_i^0 \\ Z_j^0 - Z_i^0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} X_i^0 \\ Y_i^0 \\ Z_i^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N_i + H_i) \cos B_i^0 \cos L_i^0 \\ (N_i + H_i) \cos B_i^0 \sin L_i^0 \\ [N_i(1 - e^2) + H_i] \sin B_i^0 \end{bmatrix}$$

$B_i^0, L_i^0, H_i^0$  为地面测量系统中 GPS 网控制点的近似大地坐标, 所有系数矩阵  $A_i, A_j, R_{ij}$  等均以此近似值为依据计算。

#### 6.4.2.2 约束条件方程

对于已知点的坐标, 其坐标约束条件为:

$$\begin{bmatrix} dB_k \\ dL_k \\ dH_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (k \text{ 为已知地面坐标点}) \quad (6-70)$$

平差中, 可将其代入(6-69)误差方程中, 取对应点的系数  $A_i$  (或  $A_j$ ) 为零。

对于已知的地面高精度测距值, 可用来作为 GPS 网平差的尺度基准, 其约束条件为:

$$- C_{ij} A_i \begin{bmatrix} dB_i \\ dL_i \\ dH_i \end{bmatrix} + C_{ij} A_j \begin{bmatrix} dB_j \\ dL_j \\ dH_j \end{bmatrix} + W_D = 0 \quad (6-71)$$

式中:  $C_{ij} = (\Delta X_{ij}^0/D_{ij}; \Delta Y_{ij}^0/D_{ij}; \Delta Z_{ij}^0/D_{ij})$ ;  $W_D = (\Delta X_{ij}^0{}^2 + \Delta Y_{ij}^0{}^2 + \Delta Z_{ij}^0{}^2)^{1/2} - D_{ij}$ ;  $D_{ij}$  为已知的距离值。

对于已知的大地方位角, 用其作为网的定向基准, 约束条件方程为:

$$-F_{kj}A_k \begin{bmatrix} dB_k \\ dL_k \\ dH_k \end{bmatrix} + F_{kj}A_j \begin{bmatrix} dB_j \\ dL_j \\ dH_j \end{bmatrix} + W_a = 0 \quad (6-72)$$

式中

$$F_{kj}^T = \begin{bmatrix} \frac{\sin A_k^0 \sin B_k^0 \cos L_k^0 - \cos A_k^0 \sin L_k^0}{D_{kj}^0 \sin Z_{kj}^0} \\ \frac{\sin A_j^0 \sin B_j^0 \sin L_k^0 + \cos A_j^0 \cos L_k^0}{D_{kj}^0 \sin Z_{kj}^0} \\ -\frac{\sin A_k^0 \cos B_k^0}{D_{kj}^0 \sin Z_{kj}^0} \end{bmatrix}^T$$

$$W_a = \arctg \frac{(N_j^0 + H_j^0) \cos B_j^0 \sin(L_j^0 - L_k^0)}{X_{kj}^0} - \alpha_{kj}$$

$X_{kj}^0 = [\cos B_k^0 \cos B_j^0 - \sin B_k^0 \cos B_j^0 \cos(L_j^0 - L_k^0)](N_j^0 + H_j^0) + (N_k^0 \sin B_k^0 - N_j^0 \sin B_j^0)e^2 \cos B_k^0$   
 其中  $D_{ij}^0$  为两点之间的近似弦长,  $Z_{ij}^0$  为  $k$  点至  $j$  点的天顶距近似值。  $\alpha_{kj}$  为地面网已知方位角。

### 6.4.2.3 法方程的组成及解算

GPS 网三维约束平差即为附有条件的相关间接平差, 其误差方程为基线向量的观测方程, 写成矩阵式为:

$$V = Bd\bar{B} - L \quad (6-73)$$

约束条件方程为:

$$Cd\bar{B} + W = 0 \quad (6-74)$$

则可按最小二乘组成法方程

$$\begin{bmatrix} N & C^T \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\bar{B} \\ K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -U \\ W \end{bmatrix} = 0 \quad (6-75)$$

其中  $N = B^T P B, U = B^T P L$ 。

$$d\bar{B} = [dB_1^T \quad dB_2^T \quad \dots \quad dB_n^T, m, \epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z]^T$$

$K$  为联系数。

按矩阵分块求逆, 可解出未知数

$$K = [CN^{-1}C^T]^{-1}[W + CN^{-1}U] \quad (6-76)$$

$$d\bar{B} = N^{-1}(U - C^T K) \quad (6-77)$$

平差后未知数的协因数阵为:

$$\left. \begin{aligned} Q_{kk} &= -(CN^{-1}C^T)^{-1} \\ Q_{\beta\beta} &= N^{-1} + N^{-1}C^T Q_{kk} CN^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (6-78)$$

单位权方差估值为

$$\sigma_0^2 = \frac{V^T P V}{(3m - n + r)} \quad (6-79)$$

$m$  为基线数,  $n$  为未知数个数,  $r$  为条件方程个数, 则平差后未知数的方差估值为:

$$D_{\hat{\beta}} = \sigma_0^2 Q_{\hat{\beta}} \quad (6-80)$$

### 6.4.3 GPS 网的三维联合平差

三维联合平差是指除了顾及上述 GPS 基线向量的观测方程和作为基准的约束条件外, 同时顾及地面测量中的常规观测值如方向、距离、天顶距等的平差。GPS 基线向量观测值误差方程以及约束条件同上, 而地面网观测值的误差方程为:

#### 6.4.3.1 方向观测值 ( $\beta_{ij}$ ) 的误差方程

$$V_{\beta_{ij}} = -d\theta_i - F_{ij}A_i \begin{bmatrix} dB_i \\ dL_i \\ dH_i \end{bmatrix} + F_{ij}A_j \begin{bmatrix} dB_j \\ dL_j \\ dH_j \end{bmatrix} - L_{\beta_{ij}} \quad (6-81)$$

式中:  $L_{\beta_{ij}} = \beta_{ij} + \theta_i^0 - \alpha_{ij}^0$ ,  $\theta_i^0$  和  $d\theta$  表示测站上定向角近似值和改正值。

#### 6.4.3.2 方位观测值 ( $\alpha_{kj}$ ) 的误差方程

$$V_{\alpha_{kj}} = -F_{kj}A_k \begin{bmatrix} dB_k \\ dL_k \\ dH_k \end{bmatrix} + F_{kj}A_j \begin{bmatrix} dB_j \\ dL_j \\ dH_j \end{bmatrix} - L_{\alpha_{kj}} \quad (6-82)$$

$$L_{\alpha_{kj}} = \alpha_{\alpha_{kj}} - \alpha_{\alpha_{kj}}^0$$

#### 6.4.3.3 距离观测值 ( $D_{ij}$ ) 的误差方程

$$V_{D_{ij}} = -C_{ij}A_i \begin{bmatrix} dB_i \\ dL_i \\ dH_i \end{bmatrix} + C_{ij}A_j \begin{bmatrix} dB_j \\ dL_j \\ dH_j \end{bmatrix} - L_{D_{ij}} \quad (6-83)$$

$$L_{D_{ij}} = D_{ij} - D_{ij}^0$$

#### 6.4.3.4 水准测量高差值 ( $h_{ij}$ ) 的误差方程

$$\left. \begin{aligned} V_{h_{ij}} &= -dH_i + dH_j - \Delta N_{ij} - L_{h_{ij}} \\ L_{h_{ij}} &= h_{ij} - h_{ij}^0 \end{aligned} \right\} \quad (6-84)$$

这里  $\Delta N_{ij}$  是  $i, j$  两点大地水准面差距之差。

如果还考虑天顶距和天文经纬度观测值, 在未知数中还要加上各点的垂线偏差及折光系数改正数。

平差中法方程的组成及解算方法均与三维约束平差相同, 就不再赘述。

### 6.4.4 GPS 网的三维平差中若干问题的处理

#### 6.4.4.1 GPS 网三维平差的主要过程

文献[13]给出 GPS 三维平差的主要流程图:

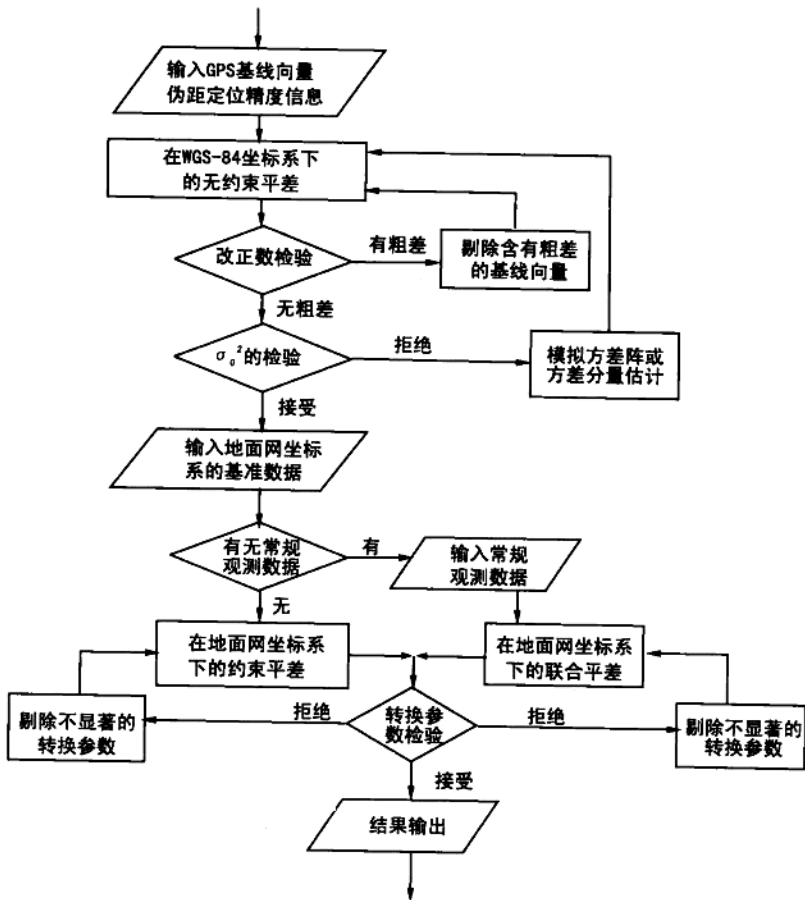


图 6-5 三维平差流程图

GPS 网三维平差中, 首先应进行三维无约束平差, 平差后通过观测值改正数检验发现基线向量中是否存在粗差, 并剔除含有粗差的基线向量, 再重新进行平差, 直至确定网中没有粗差后, 应对单位权方差因子进行  $\chi^2$  检验, 判断平差的基线向量随机模型是否存在误差, 并对随机模型进行改正, 以提供较为合适的平差随机模型。在对 GPS 网进行约束平差或联合平差后, 还应对平差中加入的转换参数进行显著性检验, 对于不显著的参数应剔除, 以免破坏平差方程的性态。

#### 6.4.4.2 GPS 网三维平差中随机模型的确定

(1) GPS 基线向量随机模型的模拟协方差阵。

由 GPS 基线解算输出的方差协方差阵是根据一定的精度估算数学公式计算出的, 由于测量中的许多误差没有估算到, 所以往往过高地估计了测量精度, 与实际误差不相匹配。例如, 会出现长距离的精度高于短距离的精度。因而造成单位权方差  $\hat{\sigma}_0$  的  $\chi^2$  检验不能通过。研究表明, 这时可采用按 GPS 接收机的标称精度来模拟方差协方差阵可获得更接近实际的误差。

一般 GPS 接收机厂商通过检定,出厂时会给出接收机的距离、方位、高差的标称精度公式:

$$\left. \begin{aligned} M_D^2 &= e_D^2 + q_D^2 \cdot D^2 \\ M_A^2 &= e_A^2/D^2 + q_A^2 \\ M_{\Delta H}^2 &= e_{\Delta H}^2 + q_{\Delta H}^2 D^2 \end{aligned} \right\} \quad (6-85)$$

式中:  $D$  是 GPS 基线端点间的距离,  $e_D^2$  和  $q_D^2$  表示基线在距离上的固定误差和比例误差,  $e_{\Delta H}^2$  和  $q_{\Delta H}^2$  表示在高差上的固定误差和比例误差, 而方位误差可写为:

$$M_A^2 \frac{D^2}{\rho^2} = \frac{e_A^2}{\rho^2} + q_A^2 \frac{D^2}{\rho^2} \quad (6-86)$$

由空间地心直角坐标与站心直角坐标, 以及站心直角坐标与站心极坐标之间的关系, 可以将空间地心直角坐标表示的 GPS 基线向量  $(\Delta X, \Delta Y, \Delta Z)^T$  化成以基线起点  $i$  的站心直角坐标表示, 进而可转化为站心极坐标  $(D, A, \Delta H)^T$  表示, 并由它们之间的关系式求得微分关系式为:

$$\begin{bmatrix} d\Delta x_{ij} \\ d\Delta y_{ij} \\ d\Delta z_{ij} \end{bmatrix} = Q_i K_i \begin{bmatrix} dD_{ij} \\ dA_{ij} \\ d\Delta H_{ij} \end{bmatrix} \quad (6-87)$$

那么根据协方差传播律, 可导出由 GPS 基线的距离、方位和高差的标称精度估算其以空间直角坐标差表示的基线向量的模拟协方差公式:

$$\sum_{i,j} = Q_i K_i \text{diag}[M_D^2 \quad M_A^2 \quad M_{\Delta H}^2] K_i^T Q_i^T \quad (6-88)$$

式中

$$Q_i = \begin{bmatrix} -\sin B_i \cos L_i & -\sin L_i & \cos B_i \cos L_i \\ -\sin B_i \sin L_i & \cos L_i & \cos B_i \sin L_i \\ \cos B_i & 0 & \sin B_i \end{bmatrix} \quad (6-89)$$

当基线长数十公里时, 可取:

$$K_i = \begin{bmatrix} \cos A_{ij} \sin Z_i & -D_{ij} \sin A_{ij} \sin Z_i & -\cos A_{ij} \text{ctg} Z_i \\ \sin A_{ij} \sin Z_i & D_{ij} \cos A_{ij} \sin Z_i & -\sin A_{ij} \text{ctg} Z_i \\ \cos Z_i & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6-90)$$

## (2) GPS 网约束、联合平差中的随机模型。

对于 GPS 网约束平差, 其随机模型可采用基线解算得到的协方差阵或模拟协方差阵。由于这时只有一类观测量, 假定各基线对应同一方差因子, 通常取  $\sigma_0^2 = 1 \text{ cm}^2$ , 则任一基线向量的权矩阵为:

$$P_{i,j} = \sigma_0^2 \sum_{i,j}^{-1} = \sum_{i,j} \quad (6-91)$$

这里  $\sum_{i,j}$  为基线解算输出或模拟方差协方差阵。

对于 GPS 基线向量网联合平差, 若平差只有边长和 GPS 两类观测量,  $\sigma_0^2$  仍定为  $1 \text{ cm}^2$ , 边长观测值的权可根据测距仪的标称精度或鉴定实测精度计算:

$$P_{D_{ij}} = \sigma_0^2 / (a^2 + b^2 D_{ij}^2) \quad (6-92)$$

式中:  $a^2, b^2$  为仪器的固定误差和比例误差。GPS 基线向量的权同前, 若平差中含有几类不同的

观测值,则  $\sigma_0^2$  通常由某方向观测值的方差来确定,并由此求得其他观测值的权。这时,还须考虑几类方差的匹配问题,因此,须通过方差分量估计来确定各类观测值的权。

#### 6.4.4.3 GPS 网平差中转换参数的显著性检验

在网平差中转换参数作为附加参数列入,如果由平差所获得的转换参数数值太小,以至可以忽略,或者虽有一定大小,但其误差大的足以证明这一数值不可信。这时,都必须对参数进行统计假设检验,以确定其是否在一定水平下显著存在。如果不显著,则应剔除。检验一般按  $t$  检验进行。统计假设检验的零假设是:  $H_0: k=0, \epsilon_x=0, \epsilon_y=0, \epsilon_z=0$ , 备选假设是:  $H_1: k \neq 0, \epsilon_x \neq 0, \epsilon_y \neq 0, \epsilon_z \neq 0$ , 则可组成四个  $t$  统计量

$$\begin{aligned} T_k &= \frac{m}{\hat{\sigma}_0 \sqrt{Q_k}} \sim t(f) & T_{\epsilon_x} &= \frac{\epsilon_x}{\hat{\sigma}_0 \sqrt{Q_{\epsilon_x}}} \sim t(f) \\ T_{\epsilon_y} &= \frac{\epsilon_y}{\hat{\sigma}_0 \sqrt{Q_{\epsilon_y}}} \sim t(f) & T_{\epsilon_z} &= \frac{\epsilon_z}{\hat{\sigma}_0 \sqrt{Q_{\epsilon_z}}} \sim t(f) \end{aligned} \quad (6-93)$$

这里  $f$  为  $t$  分布的自由度,有  $f=3n+u_i-n-r$ ;  $n$  为 GPS 基线向量数;  $u_i$  为约束条件数;  $t$  为坐标未知参数的个数;  $r$  为转换参数的个数。而  $Q_k, Q_{\epsilon_x}, Q_{\epsilon_y}, Q_{\epsilon_z}$  分别是各转换参数协因数对应的主对角元素。

通常选择显著水平  $\alpha=0.05$ , 若  $T_i (i=k, \epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z)$  大于  $t_{\frac{\alpha}{2}}$ , 则拒绝零假设, 认为该参数显著, 在平差中应予以保留; 否则, 接受零假设, 平差中应舍弃这种参数后重新平差处理。

#### 6.4.4.4 大地高不准确对 GPS 网三维平差的影响

GPS 三维约束平差与联合平差均需若干与 GPS 点重合的点的地面网椭球大地坐标系下的坐标  $(B, L, H)$ , 作为将 GPS 成果转换至地面坐标框架下的基准点, 其中的大地高  $H$  通常是由水准或三角高程测量获得的正常高加上高程异常值而求得的, 即

$$H_{\star} = h_{\star} + \zeta \quad (6-94)$$

其中  $\zeta$  为高程异常值。

显然高程异常的精度将直接影响该点大地高的精度, 而目前我国大部分地区的高程异常的精度为  $\pm 0.5 \sim \pm 1$  m, 西部边缘地区其误差甚至为数米。不难想像, 由这种含有较大误差的大地高作为基准对 GPS 网进行约束平差, 必将导致平差后的 GPS 网产生变形, 使得成果的精度大大降低。为了直接定量地分析 GPS 网变形的程度, 可采用 5.4 节中的应变分析法。

根据弹性力学中位移与应变(变形)之间的关系, 由带有误差的基准约束平差与无误差的基准约束平差结果之间必然存在一个差值, 这种坐标差值可视在误差这种“外力”下引起的一种“位移”, 即:

$$W = \bar{X}_2 - \bar{X}_1 \quad (6-95)$$

而其对网产生的变形可以用弹性力学中的线应变、剪应变来描述, 并将位移与应变数学模型推广到站心大地坐标系, 即为:

$$\begin{bmatrix} u_{dB_i} \\ v_{dL_i} \\ w_{dH_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{dB_0} \\ v_{dL_0} \\ w_{dH_0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_B & \epsilon_{BL} & \epsilon_{BH} \\ \epsilon_{BL} & \epsilon_L & \epsilon_{LH} \\ \epsilon_{BH} & \epsilon_{LH} & \epsilon_H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta B_S \\ \Delta L_S \\ \Delta H_S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \omega_H & -\omega_L \\ -\omega_H & 0 & \omega_B \\ \omega_L & -\omega_B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta B_S \\ \Delta L_S \\ \Delta H_S \end{bmatrix}$$

(6-96)



利用该模型将线应变  $\epsilon_B, \epsilon_L, \epsilon_H$ , 剪应变  $\epsilon_{BL}, \epsilon_{BH}, \epsilon_{LH}$ , 平移量  $u_{dB_0}, v_{dL_0}, w_{dH_0}$  和旋转量  $\omega_B, \omega_L, \omega_H$  等 12 个应变参数作为未知参数, 利用(6-96)式研究讨论大地高程误差对网平差结果产生的影响。

对图 6-6 的 GPS 模拟网, 以 1 号点为基准点, 进行 GPS 网的三维无约束平差, 该平差结果毫无歪曲地反映了 GPS 的实测精度。另外分别以无误差的地面大地坐标系下的 1、2 号点坐标为基准进行约束平差, 给 2 号点高程加 0.2 m, 0.5 m 误差后, 以 1、2 号点为基准再进行约束平差。利用各次平差的坐标值, 分别与无约束平差坐标构成“位移量”(坐标差  $u_{dH_i}, v_{dL_i}, w_{dH_i}$ )代入(6-96), 按最小二乘求出三种基准下网的平均应变值, 列于表 6-1, 其中线应变、剪应变、旋转值均以  $(1 \times 10^{-6})$  为单位。

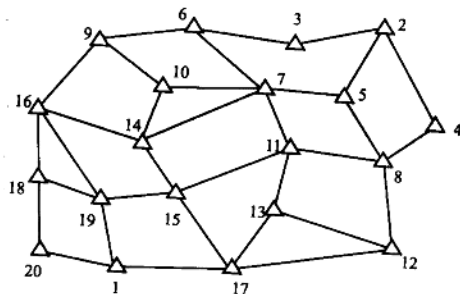


图 6-6 GPS 模拟网

表 6-1 GPS 三维站心大地坐标应变值

2 号点高程 误差/m	$\epsilon_B$	$\epsilon_L$	$\epsilon_H$	$\epsilon_{BL}$	$\epsilon_{BH}$	$\epsilon_{LH}$	$\omega_B$	$\omega_L$	$\omega_H$
0.0	0.07	0.01	-0.27	-0.08	1.29	0.47	0.47	1.21	-0.04
0.2	0.20	-1.71	-3.47	-2.18	-0.94	1.96	-0.32	8.09	-2.02
0.5	0.36	-4.72	-7.54	-5.72	-1.71	4.02	-2.50	19.96	-5.10

由表 6-1 列出的应变参数可以看出, 大地高误差在网的尺度伸缩变形上 ( $\epsilon_B, \epsilon_L, \epsilon_H$ ), 除使高程方向产生的变形最大外, 还使球面经线方向产生较大的变形, 其线应变值大约为纬度方向线应变值的 10 倍, 当大地高存在 0.5 m 的误差时, 经度方向上的线应变为  $-4.72 \times 10^{-6}$ 。并且大地高误差使椭圆面上经纬度之间产生较大的剪切变形, 即扭曲变形, 其值达  $5.72 \times 10^{-6}$ 。而通常 GPS 基线测量的相对精度为  $\pm(1 \sim 3) \times 10^{-6}$ 。由此可知, 当高程基准误差等于 0.5 m, 进行三维约束平差造成 GPS 网的变形已大于网的测量误差。

表 6-2 给出了将三维平差后的 GPS 大地坐标投影至高斯平面后的二维坐标, 求出的大地高误差对高斯平面坐标的变形影响。

表 6-2 二维高斯坐标应变参数

2 号点高程 误差/m	$\epsilon_x$	$\epsilon_y$	$\epsilon_{xy}$	$\epsilon_1$	$\epsilon_2$	$r$	$\omega$
0.0	-0.09	-0.10	-0.00	-0.09	-0.10	-0.00	-0.04
0.2	-0.29	1.75	2.16	2.22	-0.76	2.97	-2.08
0.5	-0.44	4.51	5.41	5.70	-1.63	7.33	-5.12

基准中大地高误差, 对 y 方向产生的变形较大, 且使平面位置发生不可忽视的扭曲变形。从上面的分析, 结合目前由正常高加上高程异常获得的大地高的精度情况, 显然, 不宜采

用三维约束平差法对 GPS 基线向量进行坐标转换,为避免大地高误差的影响,可采用的方法之一是采用所谓的准三维约束平差,即在平差中只取一个已知点的高程作为基准,其余已知点仅取其平面坐标作约束平差,是一种三维平差中的二维平面位置约束。但是,这并非真正意义上的三维约束平差,并且由其求出的三维坐标,投影至高斯平面地面坐标系下,与该坐标系仍存在间隙。考虑到大多数工程和生产实用坐标系均是平面坐标和正常高坐标系,所以方法之二是将 GPS 基线测量成果投影到平面上,再进行二维平面约束平差。

## 6.5 GPS 基线向量网的二维平差

GPS 基线向量网二维平差应在某一参考椭球面上,或是在某一投影平面坐标系上进行。因此,平差前,首先须将 GPS 三维基线向量观测值及其协方差阵转换投影至二维平差计算面。也就是从三维基线向量中提取二维信息,在平差计算面上构成一个二维 GPS 基线向量网。

GPS 基线向量网二维平差也可分为无约束平差、约束平差和联合平差三类,平差原理及方法均与三维平差相同。

由二维约束平差和联合平差获得的 GPS 平面成果,就是国家坐标系下或地方坐标系下具有传统意义的控制成果。在平差中的约束条件往往是由地面网与 GPS 网重合的已知点坐标,这些作为基准的已知点的精度或它们之间的兼容性是必须保证的。否则由于基准本身误差太大互不兼容,将会导致平差后的 GPS 网产生严重变形,精度大大降低。因此,在平差结束前,应通过检验发现并淘汰精度低且不兼容的地面网已知点,再重新平差。

### 6.5.1 GPS 基线向量网的二维投影变换

三维基线向量转换成二维基线向量,应避免地面网不准确的大地高引起尺度误差和网变形,保证 GPS 网转换后整体及相对几何关系不变。因此,可采用在一点上实行位置强制约束,在一条基线的空间方向上实行定向约束的三维转换方法,也可以是在一点上实行位置强制约束,在一条基线的参考椭球面投影的法截弧和大地线方向上实行定向约束的准三维转换方法。转换后的 GPS 网与地面网在一个基准点上和一条基线上的方向完全重合一致,两网之间只存在尺度比差和残余定向差。

#### 6.5.1.1 GPS 基线向量网至地面网的平移

设地面控制位置基准点在国家大地坐标系中的大地坐标为  $(B_T^0, L_T^0, H_T^0)$  ( $H_0 = h_0 + \zeta_0$ ),由大地坐标与空间三维直角坐标关系式(6-29)可得该点在国家空间直角坐标系下的坐标  $(X_T^0, Y_T^0, Z_T^0)$ 。

假定网中基准点的坐标为  $(B^0, L^0, H^0)$ ,不同于基准点的其他点为  $(B_1, L_1, H_1)$ 。

而该基准点在 GPS 网的三维直角坐标为  $(X_S^0, Y_S^0, Z_S^0)$ ,由此可求得 GPS 网平移至地面测量控制网基点的平移参数为:

$$\left. \begin{aligned} \Delta X &= X_T^0 - X_S^0 \\ \Delta Y &= Y_T^0 - Y_S^0 \\ \Delta Z &= Z_T^0 - Z_S^0 \end{aligned} \right\} \quad (6-96)$$

于是,可将 GPS 网中其他各点坐标经下式平移到国家大地坐标系中:

$$\left[ \begin{aligned} X_{T_i} &= X_{S_i} + \Delta X \\ Y_{T_i} &= Y_{S_i} + \Delta Y \\ Z_{T_i} &= Z_{S_i} + \Delta Z \end{aligned} \right] \quad (6-97)$$

利用大地坐标与空间直角坐标的反算公式(6-30)可得各点在国家大地坐标系中的大地坐标  $B_i, L_i, H_i$ 。

### 6.5.1.2 三维 GPS 网至国家大地坐标系的二维投影变换

由平移变换已将 GPS 网与地面控制网在基准点上(见图 6-7,1 号点为基准点)实现了重合,为使 GPS 网与地面控制网在方位上重合一致,可利用椭球大地测量学中的赫里斯托夫第一类微分公式。该公式给出当基准数据发生变化(起始点的大地坐标  $dB, dL$ , 方位  $dA$ , 长度  $dS$ )时,相应的其他大地坐标的变化值,实现两网在同一椭球面上的符合。

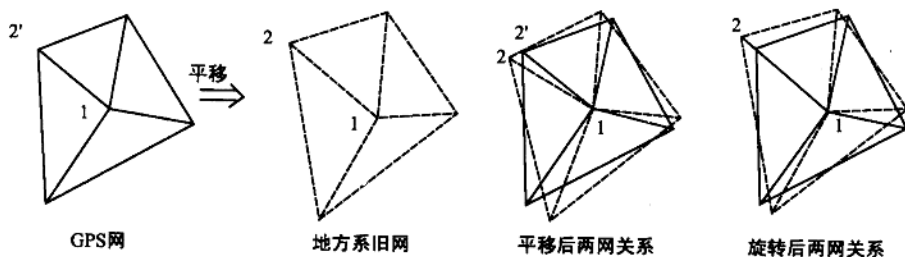


图 6-7 GPS 网的转换过程

设  $B_1 = B^0 + \Delta B, L_1 = L^0 + \Delta L, A_1 = A^0 + \Delta A \pm 180^\circ$ , 则有全微分公式:

$$\left. \begin{aligned} dB_1 &= \left(1 + \frac{\partial \Delta B}{\partial B}\right) dB^0 + \frac{\partial \Delta B}{\partial S} dS^0 + \frac{\partial \Delta B}{\partial A} dA^0 \\ dL_1 &= \frac{\partial \Delta L}{\partial B} dB^0 + \frac{\partial \Delta L}{\partial S} dS^0 + \frac{\partial \Delta L}{\partial A} dA^0 + dL^0 \end{aligned} \right\} \quad (6-98)$$

因为参考椭球是旋转椭球,因而当  $L^0$  有  $dL^0$  变化时,相当于起算子午面有了微小的变化,仅对经度  $dL_1$  有一个平移  $dL^0$  的影响,对  $B_1$  没有影响,为了书写方便,上式可写成:

$$\left[ \begin{aligned} dB_1 &= p_1 dB^0 + p_3 \left(\frac{dS^0}{S}\right) + p_4 dA^0 \\ dL_1 &= q_1 dB^0 + q_3 \left(\frac{dS^0}{S}\right) + q_4 dA^0 + dL^0 \end{aligned} \right] \quad (6-99)$$

式中  $p_1 = \left(1 + \frac{\partial \Delta B}{\partial B}\right)$   $p_3 = S \frac{\partial \Delta B}{\partial S}$   $p_4 = \frac{\partial \Delta B}{\partial A}$   $q_1 = \frac{\partial \Delta L}{\partial B}$   $q_3 = S \frac{\partial \Delta L}{\partial S}$   $q_4 = \frac{\partial \Delta L}{\partial A}$

该式即为赫里斯托夫第一微分式。

在该公式中,对于已经平移变换、两网在基准上重合的网,有  $dB^0=0, dL^0=0$ 。同时由于在

进行三维至二维的投影变换时,往往难以准确确定两网的尺度差异,因此可将此变换留待约束(联合)平差时考虑,因而此时可设  $dS^0=0$ ,那么,此处赫里斯托夫第一类微分式就化简为:

$$dB_1 = p_4 dA^0 \quad dL_1 = q_4 dA^0 \quad (6-100)$$

由椭球大地测量可知:

$$p_4 = -\cos B^0(1 + \eta_0^2)\Delta L + 3\cos B^0 t_0 \eta_0^2 \Delta B \Delta L + \frac{1}{6} \cos^3 B^0 \times (1 + t_0^2) \Delta L^3$$

$$q_4 = \frac{1}{\cos B^0} (1 - \eta_0^2 + \eta_0^4) \Delta B + \frac{1}{\cos B^0 t_0} (1 - \frac{1}{2} \eta_0^2) \Delta B^2 - \frac{1}{2} \cos B^0 t_0 \Delta L^2 +$$

$$\frac{1}{3 \cos B^0} (1 + 3t_0^2) \Delta B^2 - \frac{1}{2} \cos B^0 (1 + t_0^2) \Delta B \Delta L^2$$

式中:  $\eta_0 = e' \cos B, t_0 = \operatorname{tg} B$ 。

根据两网起始坐标方位角之差  $dA = A_1^0 - A_0^0$ 。由(6-100)式就可得 GPS 网各点在国家大地坐标系内与地面网起始基准点一致、起始方位一致(见图 6-7 中 1~2 方位)的坐标。

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= B_0 + dB_1 \\ L_1 &= L_0 + dL_1 \end{aligned} \right\} \quad (6-101)$$

为了平差计算及科研生产实用方便,二维平差通常是在平面上进行。可利用高斯投影正算(6-7)式将 GPS 各点由参心椭球坐标投影到高斯平面坐标系。

### 6.5.1.3 三维基线向量协方差阵至二维高斯平面协方差阵

除了将三维 GPS 网投影到二维平面上外,还应把相应的协方差阵变换到二维高斯平面。

由空间直角坐标与椭球大地坐标的关系可得任一条基线的大地坐标差关系为:

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}_{01} = \begin{bmatrix} (N_1 + H_1) \cos B_1 \cos L_1 \\ (N_1 + H_1) \cos B_1 \sin L_1 \\ (N_1(1 - e^2) + H_1) \sin B_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (N_0 + H_0) \cos B_0 \cos L_0 \\ (N_0 + H_0) \cos B_0 \sin L_0 \\ (N_0(1 - e^2) + H_0) \sin B_0 \end{bmatrix} \quad (6-102)$$

可将上式展开成三级级数式,并通过对其求偏导得到空间直角坐标差与大地坐标差之间的全微分式:

$$\begin{bmatrix} d\Delta x \\ d\Delta y \\ d\Delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_B & a_L & a_H \\ b_B & b_L & b_H \\ c_B & c_L & c_H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\Delta B \\ d\Delta L \\ d\Delta H \end{bmatrix} \quad (6-103)$$

式中:  $a_i, b_i, c_i (i=B, L, H)$  为一阶偏导系数(详见文献[14])。

由于偏导系数矩阵是可逆的,于是可惟一地得到大地坐标差关于直角坐标差的微分关系式:

$$\begin{bmatrix} d\Delta B \\ d\Delta L \\ d\Delta H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_B & a_L & a_H \\ b_B & b_L & b_H \\ c_B & c_L & c_H \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} d\Delta x \\ d\Delta y \\ d\Delta z \end{bmatrix} \quad (6-104)$$

或

$$d\Delta \bar{B} = Bd\Delta \bar{X}$$

其中:  $d\Delta \bar{B} = [d\Delta B, d\Delta L, d\Delta H]^T, d\Delta \bar{X} = [d\Delta x, d\Delta y, d\Delta z]^T$ ,按协方差传播律,可得到大地坐标差与直角坐标差之间的协方差转换公式:

$$D_{\Delta B} = B D_{\Delta X} B^T \quad (6-105)$$

而由高斯正算公式(6-7)可得平面直角坐标差与椭球坐标的全微分式:

$$\begin{bmatrix} d\Delta x \\ d\Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_B & \alpha_L \\ \beta_B & \beta_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\Delta B \\ d\Delta L \end{bmatrix} = \alpha d\bar{B}' \quad (6-106)$$

这里:  $d\bar{B}' = (d\Delta B, d\Delta L)$ , 而  $\alpha_B = N_0(1 - \eta_0^2 + \eta_0^4 - \eta_0^6) + 3N_0t_0(\eta_0^2 - 2\eta_0^4)\Delta B$ ,  $\alpha_L = N_0t_0C_0\Delta L$ ,  $\beta_B = N_0t_0C_0(-1 + \eta_0^2 - \eta_0^4 + \eta_0^6)\Delta L$ ,  $\beta_L = N_0C_0 + N_0t_0C_0(-1 + \eta_0^2 - \eta_0^4 + \eta_0^6)\Delta B$ .

由此,可得三维空间基线向量到二维高斯平面的协方差阵。

$$D'_{\text{高斯}} = \alpha D'_{\Delta B} \alpha^T \quad (6-107)$$

$D'_{\Delta B}$ 是  $D_{\Delta B}$ 中的与  $\Delta B$ 、 $\Delta L$  有关的方差、协方差分量的子矩阵。

## 6.5.2 GPS 基线向量网的二维平差

由上述转换方法可将 GPS 基线向量及其协方差阵转换到二维国家大地平面坐标系下,网的二维平差即可在该平面上进行。

### 6.5.2.1 GPS 二维约束平差的观测方程和约束条件方程。

设二维基线向量观测值为  $\Delta X_{ij} = (\Delta x_{ij}, \Delta y_{ij})^T$ , 而待定坐标改正数  $dX = (dx_i, dy_i)^T$  和尺度差参数  $m$  以及残余定向差参数  $d\alpha$  为平差未知数, 则 GPS 基线向量的观测误差方程为:

$$\begin{bmatrix} V_{\Delta x_{ij}} \\ V_{\Delta y_{ij}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_i \\ dy_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_j \\ dy_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x_{ij} \\ \Delta y_{ij} \end{bmatrix} m + \begin{bmatrix} -\Delta y_{ij}/\rho \\ \Delta x_{ij}/\rho \end{bmatrix} d\alpha - \begin{bmatrix} l_{\Delta x_{ij}} \\ l_{\Delta y_{ij}} \end{bmatrix} \quad (6-108)$$

这里

$$\begin{bmatrix} l_{\Delta x_{ij}} \\ l_{\Delta y_{ij}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x_{ij} \\ \Delta y_{ij} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_j - x_i \\ y_j - y_i \end{bmatrix} \quad (6-109)$$

$$m = (S_G - S_T)/S_T, \quad d\alpha = \alpha_G - \alpha_T$$

当网中有已知点的坐标约束时,则 GPS 网中与该点重合的点的基线向量的坐标改正数为零,即:

$$\begin{bmatrix} dx_i \\ dy_i \end{bmatrix} = 0 \quad (6-110)$$

当网中有边长约束时,则边长约束条件方程为:

$$-\cos\alpha_{ij}^0 dx_i - \sin\alpha_{ij}^0 dy_i + \cos\alpha_{ij}^0 dx_j + \sin\alpha_{ij}^0 dy_j + w_{s_{ij}} = 0 \quad (6-111)$$

此处

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{ij}^0 &= \text{tg}^{-1} \left( \frac{y_j^0 - y_i^0}{x_j^0 - x_i^0} \right) \\ w_{s_{ij}} &= \sqrt{(x_j^0 - x_i^0)^2 + (y_j^0 - y_i^0)^2} - S_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (6-112)$$

这里的  $S_{ij}$ 即为 GPS 网的尺度标准。

当网中有已知方位角约束时,则其约束条件方程为:

$$a_{ij} dx_i + b_{ij} dy_i - a_{ij} dx_j - b_{ij} dy_j + w_{a_{ij}} = 0 \quad (6-113)$$

$$\text{式中} \quad a_{ij} = \frac{\rho'' \sin \alpha_{ij}^0}{S_{ij}^0} \quad b_{ij} = -\frac{\rho'' \cos \alpha_{ij}^0}{S_{ij}^0} \quad (6-114)$$

$$w_{\alpha_{ij}} = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{y_j^0 - y_i^0}{x_j^0 - x_i^0} \right) - \alpha_{ij} \quad (6-115)$$

此处,  $\alpha_{ij}$  是已知方位, 它是 GPS 网的外部定向基准。

### 6.5.2.2 GPS 基线向量网与地面网的二维联合平差

GPS 基线向量网与地面网的二维联合平差是在上述的 GPS 基线观测方程及坐标、边长、方位的约束条件方程的基础上再加上地面网的观测方向和观测边长的观测方程。

方向观测值误差方程:

$$V_{\beta_{ij}} = -dz_i + a_{ij} dx_i + b_{ij} dy_i - a_{ij} dx_j - b_{ij} dy_j - l_{\beta_{ij}} \quad (6-116)$$

这里  $dz_i$  是测站  $i$  上的定向角未知数, 其近似值为  $Z_{ij}^0$ ,

$$l_{\beta_{ij}} = Z_{ij}^0 + \beta_{ij} - \alpha_{ij}^0 \quad (6-117)$$

边长观测值误差方程:

$$V_{S_{ij}} = -\cos \alpha_{ij}^0 dx_i - \sin \alpha_{ij}^0 dy_i + \cos \alpha_{ij}^0 dx_j + \sin \alpha_{ij}^0 dy_j - l_{S_{ij}} \quad (6-118)$$

式中

$$l_{S_{ij}} = S_{ij} - S_{ij}^0 \quad (6-119)$$

GPS 基线向量网的二维平差方法和平差过程均与三维网相同, 这里就不再赘述。

### 6.5.3 GPS 网平差约束基准兼容性检验

在 GPS 网约束平差中, 当采用多个地面网已知点作为基准时, 这些点的精度必须保证, 即各基准信息必须兼容一致。否则, 正如上节大地高基准误差一样, 将导致约束平差后的成果精度大大降低, 使网产生变形。而且, 这种不准确的基准信息, 还会影响平差求出的坐标转换参数的真实可靠性。

事实上, 地面各控制点由于建立时间的先后不同, 测量的单位和仪器不同, 以及地壳的不均匀运动, 它们之间往往难以完全兼容一致。因此, 必须研究讨论基准兼容性的检验问题, 下面提出三种检验方法, 并分别对它们的应用方法及检验中存在的问题逐一进行讨论。

#### 6.5.3.1 $F$ 统计检验方法

方差比  $F$  检验, 可用于检验两正态母体方差是否相等。无约束平差, 即自由网平差, 与基准点的选择无关, 充分反映了控制网的测量精度, 因此其改正数平方和  $V_0^T P V_0$  与固定点无关。而约束平差, 如果作为基准点的若干点之间不兼容, 则平差后会导致整个网的结构发生变形, 使得部分观测值改正数增大, 从而其改正数平方和  $V_1^T P V_1$  增大。设自由网平差的改正数平方和为  $V_0^T P V_0$ , 自由度为  $r_0$ ; 约束网平差改正数平方和为  $V_1^T P V_1$ , 自由度为  $r_1$ , 则有  $F$  统计量:

$$F = \frac{V_1^T P V_1 / r_1}{V_0^T P V_0 / r_0} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} \sim F(r_1, r_0) \quad (6-120)$$

根据问题的性质, 选择显著水平  $\alpha$ , 便可进行  $F$  检验。

用  $F$  来检验来分析基准点的兼容性,首先要获得无约束平差的成果及  $V_0^T PV_0$ ,然后选取不同若干基准点进行约束平差,得  $V_1^T PV_1$ 。若选取的基准点之间是兼容一致,则其平差后改正数无明显增大,相应的  $F$  统计量将小于临界值  $F < F_\alpha(r_1, r_0)$ ;反之,当基准点不兼容性,其平差改正数增大,使得改正数平方和  $V_1^T PV_1$  值偏大,从而导致  $F > F_\alpha(r_1, r_0)$ ,这时,即认为在显著水平  $\alpha$  下,基准点的误差大。

利用  $F$  检验对图 6-8 所示的某城市 D 级 GPS 控制网进行  $F$  检验,该 GPS 控制网共由 21 个点组成,其中 5 个点分别与国家 I 等点、II 等点重合,最长边为 10.5 km,最短边为 2.7 km,平均边长为 7.0 km。

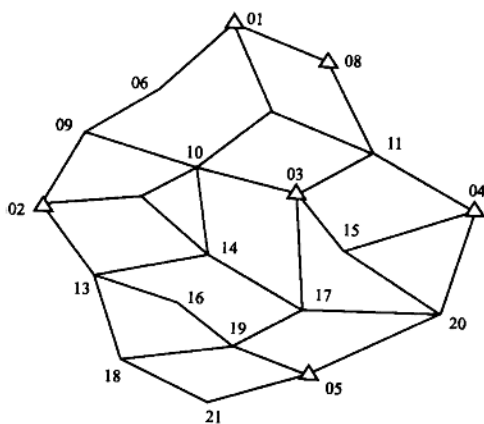


图 6-8 某市 D 级 GPS 控制网图

该网选择 14 组不同基准组合,分别进行了平差,以其中 4 号点为固定基准点,方位角  $T_{4-2}$  为固定方位角作自由网平差,其改正数为  $V_0^T PV_0$ ,方差为  $\sigma_0^2$ ,在显著水平  $\alpha = 0.001$  下,对其他平差结果分别作  $F$  检验,结果列于表 6-3,由表中可以看出哪些基准点是兼容的,哪些是有问题的。当以 4,1,2,3,5 号点为基准时, $F$  值最大,同时以 4,1,2,3 号点为基准,4,1,3 号点为基准,4,1,3,5 号点时  $F$  值也非常大,因此可以判断这些点中不稳定的大误差点,由分析可知不稳定点可能是 1,3 点,而较为稳定的点是 2,4 点。

表 6-3 基准点兼容性的  $F$  检验

平差方案	1	2	3	5	9	10	11	12	13
基准点号	4	2,4	1~5	1,3,4,5	2,4,5	1~4	1,3,4	1,4,5	1,2,4,5
中误差	0.88	0.89	6.19	4.15	2.28	3.72	3.48	2.42	2.47
$F$ 统计值	—	1.01	7.03	4.72	2.59	4.22	3.95	2.75	2.80
临界值	—	2.66	2.57	2.61	2.64	2.61	2.64	2.64	2.61
显著性判断	—	接受显著	拒绝高度显著	拒绝高度显著	接受	拒绝高度显著	拒绝显著	拒绝显著	拒绝显著

方差比  $F$  检验显然可以达到整体检验的目的,但有可能失之过严。在表 6-3 中,几乎所有以 3 个点为基准的网平差均未能通过检验。而 GPS 网约束平差的一种重要的目的是要使网通过平差后,较好地符合于地面坐标系之中,实现网的坐标转换。不难想像,如果选择的地面基准点太少,是难以实现 GPS 网与地面坐标系框架的完全吻合。所以在基准检验中,应同时顾及既不使 GPS 网精度过多地下降,又要保证较好地实现其至地面坐标系的转换这两个方面。

### 6.5.3.2 基线向量改正数的分布检验

若选用的基准点之间是兼容一致的,且基线向量中不存在粗差,则约束平差成果中基线向量改正数的统计特性应服从正态分布,即  $V_i \sim N(0, \sigma)$ 。否则选取的基准点存在不兼容的点,约束平差后必然会造成网扭曲变形,从而使某些基线向量改正数增大,使其正态特性受到破

坏。因此,检验基线向量改正数分布的正态性可以发现基准点中是否存在不稳定的点,检验的方法可采用  $\chi^2$  检验法。

设平差成果中各改正数  $V_i$  服从正态分布  $N(0, \sigma)$ , 可对其进行正态分布标准化  $(V_i - 0)/\sigma$ , 并假定标准化后的改正数相互独立, 则由  $N$  个相互独立的标准化后的改正数构成的统计量为:

$$\chi^2 = \left( \sum_{i=1}^N V_i^2 \right) / \sigma^2 \quad (6-121)$$

服从自由度为  $N$  的  $\chi^2$  分布。

检验时, 选取一定的显著水平  $\alpha$ , 并由  $\chi^2$  分布表中可获得其临界值  $\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2$ , 如果由约束平差后获得的基线向量改正数构成的统计量  $\chi^2$  在  $\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2$  之内, 则接受原假设, 即:

$$H_0: \chi^2 < \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2$$

认为基准点兼容一致, 否则接受备选假设:

$$H_1: \chi^2 > \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2$$

认为基准点存在误差, 不兼容。

表 6-4 列出了对图 6-8 所示的 GPS 网的 14 组基准约束平差的部分基准组获得的基线向量改正数的  $\chi^2$  检验结果。

表 6-4 基线向量改正数的  $\chi^2$  检验

平差方案	3	5	9	10	11	12
统计量值	28.06	16.52	12.59	18.36	18.95	10.94
临界值	18.50	10.61	12.84	16.29	14.47	11.07
$\alpha$	0.001	0.005	0.005	0.01	0.001	0.05
判断显著性	拒绝 高度显著	拒绝 高度显著	接受 显著	拒绝 显著	拒绝 高度显著	接受 高度显著

对照表 6-3 的检验结果, 可知两种检验结果大体相似, 但仍有一些不同, 第 12 组基准(1, 4, 5 号固定点)  $F$  检验是拒绝的, 而  $\chi^2$  检验却接受, 说明这三点仍是基本兼容的, 并未使基线向量改正数的正态性受到破坏, 即改正数值并没明显增大。因此基线向量改正数检验略松于  $F$  检验。

在此种检验中, 当 GPS 网中基线向量较多时, 对于这种大子样,  $\chi^2$  检验的临界值无法从一般的  $\chi^2$  分布表中查得, 可用下式进行换算。

$$\chi_{\alpha}^2 = [u_{\alpha} + (2n - 1)^{1/2}]^2 / 2 \quad (6-122)$$

式中:  $u_{\alpha}$  为  $\alpha$  显著水平下的  $u$  检验临界值,  $n$  为  $\chi^2$  检验自由度。

### 6.5.3.3 基准兼容性的应变分析法

以上两种检验方法, 均是通过构成的统计量 ( $F$  或  $\chi^2$ ) 是否超过临界值作为判断基准点是否兼容的标准, 这种判断标准除了失之过严外, 而且对基准不兼容造成的网的变形没有数量大小的概念和一定的几何解释, 因而难以正确判断某一基准点是否兼容可用。判断一组地面基准是否兼容一致, 一种标准是以基准约束平差后的成果应与原 GPS 网测量精度相一致; 另一种



标准是满足 GPS 网测量规范相应等级网的精度要求。无论何种标准都应尽量使平差后的 GPS 网能较好地转换至地面坐标系框架下。

基准兼容性研究,可采用前面提及的应变分析方法,借用弹性力学中的几何方程,建立不同基准约束平差的坐标之差——“位移”与网形变之间的关系式,获得基准不兼容造成变形大小的数量和几何概念,并通过分析得到满足判断基准点稳定与否标准的判断准则,此方法具有几何意义明确,计算简单,宜于实行的特点。

对于二维平面坐标,假设  $P(x_1, y_1)$  和  $P(x_2, y_2)$  分别表示不同基准下求得的 GPS 网两组坐标,则可得该点“位移”为:

$$\begin{cases} u = x_1 - x_2 \\ v = y_1 - y_2 \end{cases} \quad (6-123)$$

假定控制网具有均匀,各向同性和小变形的性质,按弹性力学中关于平面“位移”与应变关系式,由位移计算 GPS 网的应变

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \\ &\quad \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6-124)$$

式中 
$$\begin{cases} \Delta x = x_i - x_0 \\ \Delta y = y_i - y_0 \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (6-125)$$

令  $\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \epsilon_{xy} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}), \omega = \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x})$ 。 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_{xy}$  为应变参数,其几何意义为:线应变  $\epsilon_x, \epsilon_y$  反映在  $x, y$  轴线方向的伸缩变形,剪应变  $\epsilon_{xy}$  反映网在  $x, y$  轴之间的角度变形,  $\omega$  为刚体旋转参数。

(6-124)式可表达为:

$$\begin{cases} u = u_0 + \Delta x \epsilon_x + \Delta y \epsilon_{xy} - \Delta y \omega \\ v = v_0 + \Delta x \epsilon_{xy} + \Delta y \epsilon_y - \Delta x \omega \end{cases} \quad (6-126)$$

此式是位移与平面应变(变形)的基本关系式,式中  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_{xy}$  与所取坐标轴有关。在众多的任意方向轴的应变值中,存在着一对互相垂直的特殊方向,这对坐标方向存在最大和最小线应变  $\epsilon_1, \epsilon_2$ , 其间的剪应变为零,称为主应变。计算公式为:

$$\begin{cases} \epsilon_1 = \frac{1}{2}(\epsilon_x + \epsilon_y) + \frac{1}{2}\gamma \\ \epsilon_2 = \frac{1}{2}(\epsilon_x + \epsilon_y) - \frac{1}{2}\gamma \end{cases} \quad (6-127)$$

式中 
$$\gamma = \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + 4\epsilon_{xy}^2} = \epsilon_1 - \epsilon_2 \quad (6-128)$$

$\gamma$  称为平面总剪切,其方向与  $\epsilon_1$  成  $45^\circ$  角。

主应变方向  $\theta$  由下式计算:

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\epsilon_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} \quad (6-129)$$

设总应变量为:

$$\lambda = \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2} \quad (6-130)$$

将图 6-6 所示的 GPS 模拟网投影至高斯平面,并用几种不同的基准组进行约束平差,利用(6-126)式分析基准不兼容造成的变形情况,进而得出基准是否兼容的准则。

该模拟网共有 33 个基线观测向量,20 个 GPS 点,其中 1~4 号点与地面已知点重合。对该网以 1 号点为基准进行自由网平差,然后分别给 2 号点的坐标加入  $dx=0.1\text{ m}, dy=0.1\text{ m}$  的误差,给 4 号点坐标加入  $dx=0.01\text{ m}, dy=0.012\text{ m}$  的误差后,以 1 号点与其他已知点组合为一组基准实行约束平差(共选取 8 组基准)。分别计算出这些平差坐标相对自由网坐标的“位移”,代入(6-126)式求出相应情况下 GPS 网产生的平均变形值,表 6-5 列出了几种不同基准约束下, GPS 网相对于自由网的变形值。

表 6-5 几种不同基准约束下 GPS 网相对于自由网的变形值

基准点号	基准点含误差值/cm			线应变			剪应变		主应变		旋转	总应变	总剪切
	点号	$\Delta X$	$\Delta Y$	$\epsilon_x$	$\epsilon_y$	$2\epsilon_{xy}$	$\epsilon_1$	$\epsilon_2$	$\omega$	$\lambda$	$\gamma$		
1,3	3	0.0	0.0	-3.01	-3.09	-0.28	-2.91	-3.19	-1.03	4.32	0.30		
1,4	4	1.0	1.2	-3.80	-3.91	-0.08	-3.79	-3.92	-0.94	5.45	0.14		
1,3,4	4	1.0	1.2	-3.09	-3.18	-0.44	-2.91	-3.36	-0.93	4.44	0.45		
1,2	2	10.0	10.0	-6.66	-6.72	-0.06	-6.65	-6.73	-4.61	9.46	0.09		
1,2,3	2	10.0	10.0	-6.43	-6.39	-4.34	-4.23	-8.58	-1.73	9.57	4.34		
1,2,3,4	4	1.0	1.2	-6.25	-4.13	-4.00	-2.93	-7.45	-2.23	8.01	4.45		
	2	10.0	10.1										
1,2	2	30.0	20.0	-13.80	-13.94	-0.08	-13.79	-13.95	-7.95	19.59	0.16		
1,2,3	2	30.0	20.0	-13.16	-11.91	-9.28	-7.85	-17.22	-2.06	18.92	9.36		

分析表 6-5 可知, GPS 基线向量所在的卫星坐标系与国家或地方坐标系必然存在着系统差,即尺度差和方位差,它们对应着应变参数中的线应变和旋转参数。一组精度良好的地面基准,其相对 GPS 自由网的两个主应变理论值应相等,总剪切应等于零,但是由于基准误差和观测误差的不可避免,故一般  $\epsilon_1 \neq \epsilon_2, \gamma \neq 0$ 。那么,如何判断一组地面基准是否达到精度要求,是否兼容的标准什么?

生产实践与应变分析均证明,其判断的原则应以不降低 GPS 测量精度为前提,同时满足生产需要,将 GPS 网依附于地面坐标系统的要求为基本准则。因此,给出基准兼容准则:

- (1) 最大与最小线应变之差不应超过 GPS 基线测量精度的比例误差,即

$$|\epsilon_1 - \epsilon_2| < b \times 10^{-6} \quad (6-131)$$

- (2) 最大线应变和剪应变也不应超过 GPS 测量精度的比例精度,可取:

$$\lambda < \sqrt{2}b, \gamma < b \quad (6-132)$$

此处  $b$  有两种含意:如果以基准约束平差后的成果应与 GPS 网原测量精度相一致为判断标准,则此处  $b$  为网无约束平差后网中基线向量的最弱边精度;而如果以满足 GPS 网测量规范相应等级网的精度要求为判断标准,则  $b$  为 GPS 规范中基线向量的比例误差允许值;例如:

GPS B 级网  $b=1$ , C 级网  $b=5$ , D 级网  $b=10$  等。

准则(1)是针对 GPS 网与地面网转换时尺度参数的均匀性要求提出的, 准则(2)是对 GPS 网依附于地面基准时变形大小的限制。

如取  $b=5$ , 则表 6-5 中取地面点 1, 3, 4 为控制点是最合理的。

从表 6-5 中第四至六行看出, 若引入具有 10 cm 坐标误差的 2 号点为基准, 如测量精度要求  $b=10$ , 即 1:10 万时, 取 1, 2, 3, 4 为控制基准也是可取的。

用应变分析方法, 并结合两条基准兼容性准则, 对图 6-8 所示的城市 GPS D 级控制网进行基准检验。已知该网由 21 个 GPS 点组成, 有 5 个与 GPS 网重合的地面已知控制点, 网中共有 34 条独立基线, 其最弱边的精度为 1:28 万, 方位误差的最大值为  $0''.89$ 。

以 2 号点为位置基准对该 GPS 网进行无约束平差, 然后, 在 5 个地面点中选取不同点进行约束平差, 其结果分别与无约束网平差进行应变计算, 结果列于表 6-6。

表 6-6 某市 D 级 GPS 控制网在不同约束基准下的平差与约束平差结果的应变计算

固定基准点号	$\epsilon_x$	$\epsilon_y$	$2 \times \epsilon_{xy}$	$\epsilon_1$	$\epsilon_2$	$\lambda$	$\gamma$	$\omega$
2, 4	-3.16	-3.15	0.08	-3.11	-3.20	4.46	0.08	-1.98
2, 5	-5.72	-5.03	-0.20	-5.01	-5.73	7.37	0.72	-1.84
1, 2	-3.21	-3.52	-0.31	-3.15	-3.59	4.77	0.44	-0.12
2, 3	4.30	4.33	0.02	4.34	4.30	6.11	0.04	5.10
1, 2, 4, 5	-0.92	-2.72	1.26	-0.72	-2.92	3.00	2.20	-2.02
1, 2, 3, 4, 5	-4.72	-8.04	-0.87	-4.66	-8.10	9.34	3.43	3.04

此网为 D 级网, 规范规定  $b=10$ , 如取  $b=10$ , 从上述二个基准准则判断, 可知网中 5 个地面控制点均可作为网的控制基准。

如以该 GPS 网原测量精度为标准, 相对应的  $b$  值约为 3.6, 若取  $b=3.6$ , 则表 6-6 中仅第一、三、五行合格, 可取地面点 1, 2, 4 或 1, 2, 4, 5 为基准点, 这样可确保 GPS 网的测量精度不因坐标转换而降低, 同时又能较好地附合于地面坐标系之中。

本节介绍的基准检验的方法具有一般性, 它不仅适用于二维网, 同时也可推广应用于三维网; 不仅适用于 GPS 网, 也适用于常规测量控制网。

## 6.6 GPS 高程

GPS 相对定位高程方面的相对精度一般可达  $(2 \sim 3) \times 10^{-6}$ , 在绝对精度方面, 实验表明, 对于 10 km 以下的基线边长, 可达几个厘米, 如果在观测和计算时采用一些消除误差的措施, 其精度优于 1 cm。本节将介绍如何将 GPS 高程观测成果变为可实用的高程成果。

### 6.6.1 高程系统简介

为了说明 GPS 高程系统与实用高程系统的关系, 首先简单介绍常用高程系统及它们之间

的关系。

### 6.6.1.1 大地高程系统

是以参考椭球面为基准面的高程系统,地面某点的大地高  $H$  定义为由地面点沿通过该点的椭球法线到椭球面的距离,称为以该椭球面为基准面的大地高  $H$ ,如图 6-9 所示地面点  $P$  的大地高为  $PP'$ 。

如前所述, GPS 定位测量获得的是 WGS-84 椭球大地坐标系上的成果,也就是说 GPS 测量求得是点相对于 WGS-84 椭球的大地高  $H$ 。

由大地高的定义可知,它是一个几何量,不具有物理意义,容易理解,对于不同定义的椭球大地坐标系,也构成不同的大地高系统。

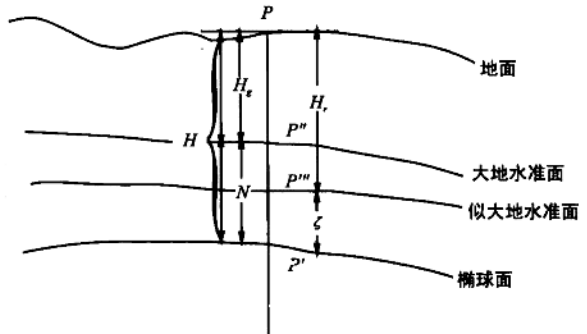


图 6-9 大地高、正高、正常高

### 6.6.1.2 正高系统

是以大地水准面为基准面的高程系统,地面某点的正高  $H_g$  定义为由地面点沿铅垂线至大地水准面的距离。

大地水准面是一族重力等位面(水准面)中的一个,由于水准面之间的不平行,所以,过一点并与水准面相垂直的铅垂线,实际上是一条曲线,正高的计算式为:

$$H_g = \frac{1}{g_m} \int^{H_g} g dH \quad (6-133)$$

其中:  $g_m$  为地面点沿铅垂线至大地水准面的平均重力加速度。由于  $g_m$  无法直接测定,所以严格说来,正高是不能精确确定的。

因为正高是以大地水准面为基准面的高程系统,因而具有明确的物理意义。大地水准面至椭球面的距离  $P'P''$  为大地水准面差距( $N$ )

$$N = H - H_g \quad (6-134)$$

### 6.6.1.3 正常高

由于正高实际上无法精确求定,为了实用上方便,人们建立了正常高系统,其定义为:

$$H_r = \frac{1}{r_m} \int^{H_r} g dH \quad (6-135)$$

其中:  $r_m$  为地面点垂线至似大地水准面之间的平均正常重力值

$$r_m = r - 0.3086 \left( \frac{H_r}{2} \right) \quad (6-136)$$

式中:  $r$  为椭球面上的正常重力,其计算式为:

$$r = r_e (1 + \beta_1 \sin^2 \varphi - \beta_2 \sin^2 2\varphi) \quad (6-137)$$

式中:  $r_e$  为椭球赤道上的正常重力值,  $\beta_1, \beta_2$  为与椭球定义有关的系数,  $\varphi$  为地面点的天文纬

度,我国目前采用的  $r_e, \beta_1, \beta_2$  值为:  $r_e=978.030; \beta_1=0.005302; \beta_2=0.000007$ 。

可见正常高是以似大地水准面为基准面的高程系统,是可以精密确定的,同样具有明显的物理意义,因而在各项工程技术方面有着非常广泛的应用。

任意一点的大地水准面与似大地水准面之间的差值,由(6-133)与(6-135)可得:

$$H_r - H_g = \frac{g_m - r_m}{g_m} H_r \quad (6-138)$$

其中:  $(g_m - r_m)$  为重力异常,在高山和海底重力异常相差较大,可达数米,在平原地区仅为数厘米,而在海平面上两者重合。

似大地水准面与椭球面之间的差距称为高程异常  $\zeta$  (图 6-9 中  $P'P''$ )

$$\zeta = H - H_r \quad (6-139)$$

## 6.6.2 GPS 水准

众所周知,实际应用中的地面点高程是以似大地水准面为起算面的正常高,而 GPS 高程是以 WGS-84 椭球面为基准的大地高。由前所述已知两者之间相差高程异常  $\zeta$  (6-139 式),显然,如果知道了各 GPS 点的高程异常  $\zeta$ ,则可由各 GPS 点的大地高求得各点的正常高。

我国似大地水准面主要是采用天文重力方法测定的,其精度为 1 m 左右,因此很难直接由 GPS 大地高求得正常高。目前在小区域范围内,常采用 GPS 水准的方法较为精确地计算 GPS 点的正常高。

所谓 GPS 水准就是在小区域范围的 GPS 网中,用水准测量的方法联测网中若干 GPS 点的正常高(这些联测点称为公共点),那么根据各 GPS 点的大地高就可按(6-139)式求得各公共点上的高程异常。然后由公共点的平面坐标和高程异常采用数值拟合计算方法,拟合出区域的似大地水准面,即可求出各点高程异常值,并由此求出各 GPS 点的正常高。

目前,国内外 GPS 水准主要是采用纯几何的曲面拟合法,即根据区域内若干公共点上的高程异常值,构造某种曲面逼近似大地水准面,随着所构造的曲面不同,计算方法也不一样。其中,主要的方法有:平面拟合法、曲面拟合法、多面函数拟合法、样条函数法等。下面分别简要介绍。

### 6.6.2.1 平面拟合法

在小区域且较为平坦的范围内,可以考虑用平面逼近局部似大地水准面。

设某公共点的高程异常  $\zeta$  与该点的平面坐标有关系式:

$$\zeta_i = a_1 + a_2 x_i + a_3 y_i \quad (6-140)$$

其中:  $a_1, a_2, a_3$  为模型参数。

如果公共点的数目大于 3 个,则可列出相应的误差方程为:

$$v_i = a_1 + a_2 x_i + a_3 y_i - \zeta_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (6-141)$$

写成矩阵形式有

$$V = Ax - \zeta \quad (6-142)$$

$$\text{其中} \quad V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_3 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & y_n \end{bmatrix} \quad \zeta = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{bmatrix}$$

根据最小二乘原理可求得

$$A = (X^T X)^{-1} X^T \zeta \tag{6-143}$$

根据文献记载,该方法在 120 km<sup>2</sup> 的平原地区,拟合精度可达 3~4 cm。

### 6.6.2.2 二次曲面拟合法

似大地水准面的拟合也可采用二次曲面拟合法,即对于公共点上的高程异常与平面坐标之间,存在如下数学模型:

$$\zeta_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 y_i + a_3 x_i^2 + a_4 y_i^2 + a_5 x_i y_i \tag{6-144}$$

式中:  $a_0, \dots, a_5$  为模型待定参数,因此,区域内至少需有 6 个公共点。当公共点多于 6 个时,仍可组成形如(6-142)的误差方程,此时

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & y_1^2 & x_1 y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & y_2^2 & x_2 y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & y_n & x_n^2 & y_n^2 & x_n y_n \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_5 \end{bmatrix}$$

仍按最小二乘原理求解(6-142)式解出参数  $a_0, a_1, \dots, a_5$ 。

该拟合法适合于平原与丘陵地区,在小区域范围内,拟合精度可优于 3 cm。

二次曲面拟合还可进一步扩展为多项式曲面拟合法,这时数学模型为:

$$\zeta_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 y_i + a_3 x_i^2 + a_4 y_i^2 + a_5 x_i y_i + a_6 x_i^3 + a_7 y_i^3 + \dots \tag{6-145}$$

上式的误差方程矩阵式仍为(6-142)式:

$$V = AX - \zeta$$

### 6.6.2.3 多面函数法

美国 Hardy 在 1971 年提出了多面函数拟合法,并建议将此法用于拟合重力异常、大地水准面差距、垂线偏差等大地测量问题。

多面函数法的基本思想是:任何数学表面和任何不规则的圆滑表面,总可用一系列有规则的数学表面的总和以任意精度逼近。根据这一思想,高程异常函数可表示为:

$$\zeta = \sum_{i=1}^k C_i Q(x, y, x_i, y_i) \tag{6-146}$$

式中:  $C_i$  为待定系数,  $Q(x, y, x_i, y_i)$  是  $x$  和  $y$  的二次核函数,其中核心在  $(x_i, y_i)$  处,  $\zeta$  可由二次式的和确定,故称多面函数。

常用的简单核函数,一般采用具有对称性的距离型,即

$$Q(x, y, x_i, y_i) = [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + \delta^2]^b \tag{6-147}$$

式中:  $\delta$  称为平滑因子,用来对核函数进行调整;  $b$  一般可选某个非零实数,常用  $b=1/2$  或  $-1/2$ 。

式(6-147)可写成误差方程的矩阵形式

$$v = QC - \zeta \quad (6-148)$$

待定系数  $C$  可根据公共点上的已知高程异常值,按最小二乘法计算:

$$C = (Q^T Q)^{-1} Q^T \zeta \quad (6-149)$$

由上式求出多面函数的待定系数,就可按(6-146)式计算各 GPS 点上的高程异常值。

多面函数法拟合高程异常,核函数  $Q$  和光滑因子  $\delta$  的选择对拟合效果有非常重要的影响,对于每个区域都应认真研究和选取,如果核函数和光滑因子选取的合适,其拟合精度与二次曲面拟合相当。

### 6.6.2.4 样条函数法

高程异常曲面也可以通过构造样条曲面拟合,设某点的高程异常值  $\zeta$  与该点的坐标  $x, y$  存在如下关系:

$$\zeta = a_0 + a_1 x + a_2 y + \sum_{i=1}^n F_i r_i^2 / nr_i^2 \quad (6-150)$$

$$\sum_{i=1}^n F_i = \sum_{i=1}^n x_i F_i = \sum_{i=1}^n y_i F_i = 0 \quad (6-151)$$

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \sum_{i=1}^n [A_i + B_i(x_i^2 + y_i^2)] \\ a_1 &= 2 \sum_{i=1}^n B_i y_i \\ F_i &= P_i / (16\pi D) \\ r_i^2 &= (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \end{aligned} \right\} \quad (6-152)$$

式中

$(x_i, y_i)$  为已知高程异常值公共点的坐标,  $(x, y)$  为未知高程异常值的 GPS 点的坐标,  $A_i, B_i$  为待定系数,  $P_i$  为点的负载,  $D$  为刚度。

对于每一个公共点都可以列出一个  $\zeta(x, y)$  方程,对于  $n$  个公共点列出  $n+3$  个方程,求解  $n+3$  个未知系数  $a_0, a_1, a_2, F_1, F_2, \dots, F_n$ 。求解方程组(6-150)时,至少应有三个公共点。

样条曲面拟合解法与多面函数法大致相同。该方法适合于地形比较复杂的地区,拟合精度也可以达 3 cm 左右。

曲面拟合法中还有非参数回归曲面拟合法,有限元拟合法,移动曲面法等,这里不再详述。

当 GPS 点布设成测线时,还可应用曲线内插法,多项式曲线拟合法,样条函数法和 Akima 法等。

## 6.6.3 GPS 重力高程

### 6.6.3.1 地球重力场模型法

地球重力场模型是指用卫星跟踪数据、地面重力数据、卫星测高数据等重力场信息由地球扰动位的球谐函数级数展开式求高程异常。

由物理大地测量学、地面点扰动位  $T$  与该点引力位  $V$  和正常引力位  $U$  之间的关系为:

$$T = V - U \quad (6-153)$$

而高程异常为  $\zeta$

$$= T/\gamma \quad (6-154)$$

式中:  $\gamma$  为地面点  $P$  的正常重力值。正常重力值  $\gamma$  和正常引力位  $U$  可以精确计算,因此只要求出地面点的引力位  $V$ ,就可求出地面点的高程异常  $\zeta$ 。

引力位  $V$  可由球谐函数级数展开式计算:

$$V = \frac{GM}{\rho} \left[ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{a}{\rho} \right)^n (C_{nm} \cos mL + S_{nm} \sin mL) \cdot P_{nm}(\sin B) \right] \quad (6-155)$$

式中:  $\rho, B, L$  为地面点的矢径、纬度、经度;  $C_{nm}, S_{nm}$  为位系数,  $P_{nm}(\sin B)$  为勒让德函数,  $n$  为阶,  $m$  为次。

虽然  $n$  的阶数越大,求得的结果越精确,国内外已推出许多地球重力模型,国外已求到 360 阶次的模型。但是,由于国外的模型均没有利用我国的重力资料,所以用于我国计算精度比国内模型要低。我国的 WDM<sub>89</sub> 模型是一个完全阶次为 180 的模型,除利用国外重力资料外,用了我国 5 万多个重力点的资料,在我国沿海平原地区计算  $\zeta$  可达厘米级精度,山区为 0.2 m 的精度,其他地区为 1.0~1.5 m 左右。

### 6.6.3.2 重力场模型与 GPS 水准相结合法

由于我国幅原辽阔,地形地质结构复杂,因此,无论重力点密度还是精度,都很难达到由重力场模型求出高精度重力异常的要求,通常重力场模型求出的高程异常精度往往低于由水准联测获得公共点上的高程异常的精度,因而一些学者提出采用重力场模型和 GPS 水准相结合的方法。

该方法的基本思路是:在 GPS 水准点上,将由 GPS 大地高和水准正常求得的高程异常  $\zeta$  与由重力场模型求得的高程异常  $\zeta_m$  进行比较,可求出该地面点的两种高程异常的差值:

$$\delta\zeta = \zeta - \zeta_m \quad (6-156)$$

然后再采用曲面拟合方法,由公共点的平面坐标和  $\delta\zeta$  推求其他点的  $\delta\zeta$ ,则可计算 GPS 网中未测水准点的正常高:

$$H_r = H - \zeta_m - \delta\zeta \quad (6-157)$$

实验表明,采用这种重力场模型与 GPS 水准相结合的方法是提高高程精度的一条有效途径。

### 6.6.3.3 地形改正方法

地面点的高程异常可分为高程异常中的长波项(平滑项)和短波项两部分组成,即:

$$\zeta = \zeta_0 + \zeta_T \quad (6-158)$$

高程异常的中长波项  $\zeta_0$  可按前面所述的方法求出,而短波项  $\zeta_T$  是地形起伏对高程异常的影响,称为地形改正项。在平原地区  $\zeta_T$  很小,可以忽略,而在山区  $\zeta_T$  不可忽略。

按莫洛金斯基原理:

$$\zeta_T = T/\gamma \quad (6-159)$$

其中:  $T$  为地形起伏对地面点扰动位的影响,  $\gamma$  为地面正常重力值。



地形起伏对地面点扰动位的影响可表示为积分形式:

$$T = G \cdot \rho \iint_{\pi} [(h - h_r)/r_0] d\pi - \frac{G \cdot \rho}{6} \iint_{\pi} [(h - h_r)^3/r_0^3] d\pi \quad (6-160)$$

其中:  $r_0 = [(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2]^{1/2}$ ;  $G$  为引力常数;  $\rho$  为地球质量密度;  $H_r$  为参考面的高程(平均高程面);  $x, y$  为高程格网点的坐标;  $x_i, y_i$  为待求点的坐标。

计算时,利用测区地形图,用  $1 \text{ km} \times 1 \text{ km}$  格网化,得测区数字地面模型(DTM);或者也可用测区 GPS 点的大地高差来格网化,再用(6-160)式计算扰动位影响  $T$ 。

地形改正方法求高程异常时,可采用“除去—恢复”过程进行,即先由(6-160)及(6-159)式求出 GPS 公共点上的  $T$  和  $\zeta_r$ ,再代入(6-158)式求出中长波项  $\zeta_0$ 。然后以这些公共点上的  $\zeta_0$  为数据点,采用拟合方法推算出所有 GPS 点上的  $\zeta_0$ 。最后再由(6-158)式加上  $\zeta_r$  求出各点的高程异常值。

#### 6.6.4 GPS 高程精度

影响 GPS 高程精度的主要有 GPS 大地高的精度、公共点几何水准的精度、GPS 高程拟合的模型及方法、公共点的密度与分布等几个因素。

具有高精度的 GPS 大地高是获得高精度 GPS 正常高的重要基础之一,因此必须采取措施以获得高精度的大地高,其中包括改善 GPS 星历的精度,提高 GPS 基线解算起算点坐标的精度,减弱对流层、电离层、多路径误差的影响等。

几何水准测量必须认真组织施测,保证提供具有足以满足精度要求的相应等级的水准测量高程值。

应根据不同测区,选用合适的拟合模型,以便使计算既准确又简便。均匀合理且足够地布设公共点,点位的分布和密度影响着 GPS 高程的精度。对于高差大于 100m 的测区,应加地形改正。

对于大区域范围,可采用重力场模型加 GPS 水准的方法,拟合时对于不同趋势的区域,采用分区平差方法。

理论分析和实践检验表明,在平原地区的局部 GPS 网, GPS 水准可代替四等水准测量。在山区只要加地形改正,一般也可达到四等水准的精度。

#### 思 考 题

- [1] 试简要说明 1954 北京坐标系、1980 西安坐标系及新北京 54 坐标系的定义及各自对应的椭球。
- [2] WGS-84 世界大地坐标系是如何定义的?
- [3] 在我国条件下,卫星网与地面网之间的转换意义是什么?
- [4] 试写出 Bursa-Wolf 模型以及变形的 Bursa-Wolf 模型。如何实现 WGS-84 坐标系向国家坐标系的转换?
- [5] 设某网有三个已知点,试用 Bursa-Wolf 模型写出计算过程?
- [6] GPS 基线向量网平差有哪几种类型?

- [7] 试述 GPS 基线向量网平差的目的、意义和作用?
- [8] GPS 基线向量网三维无约束平差的目的是什么?
- [9] GPS 基线向量网二维约束平差的目的是什么?

## 参 考 文 献

- [1] 周忠谟,易杰军,周琪. GPS 卫星测量原理与应用. 北京:测绘出版社,1992.5.
- [2] 刘基余,李征航,王跃虎,桑吉章. 全球定位系统原理及其应用. 北京:测绘出版社,1993.
- [3] 刘大杰,施一民,过静君. 全球定位系统(GPS)的原理与数据处理. 上海:同济大学出版社,1996.
- [4] 王广运,郭秉义,李洪涛. 差分 GPS 定位技术与应用. 北京:电子工业出版社,1996.
- [5] 许其风. GPS 卫星导航与精密定位. 北京:解放军出版社,1989.
- [6] 沈镜祥,施品浩,刘基余,何妙福,钱志瀚. 空间大地测量. 武汉:中国地质大学出版社,1990.
- [7] 杜道生,陈军,李征航. RS、GIS、GPS 的集成与应用. 北京:测绘出版社,1995.
- [8] 刘林. 人造地球卫星轨道力学. 北京:高等教育出版社,1992.
- [9] 李庆海,崔春芳. 卫星大地测量原理. 北京:测绘出版社,1989.
- [10] 王广运,陈增强,陈武,许国昌. GPS 精密测地系统原理. 北京:测绘出版社,1989.
- [11] 李德仁. 误差处理和可靠性理论. 北京:测绘出版社,1988.
- [12] 陶本藻. 测量数据统计分析. 北京:测绘出版社,1992.
- [13] 刘大杰,刘经南. GPS 与地面测量数据的三维联合平差. 测绘学报,1994(1).
- [14] 刘经南. 三维基线向量与大地坐标差间的微分公式及其应用. 武汉测绘科技大学学报,1991(3).
- [15] 熊介. 椭球大地测量学. 北京:解放军出版社,1989.
- [16] 朱华统. 常用大地坐标系及其变换. 北京:解放军出版社,1990.
- [17] 单国政. GPS 网的优化设计[学位论文]. 武汉测绘科技大学,1993.
- [18] 张勤. GPS 网坐标转换中的基准兼容性研究及 GPS 网质量分析[学位论文]. 武汉测绘科技大学,1994.
- [19] 朱华统. 大地坐标系的建立. 北京:测绘出版社,1986.
- [20] 郑祖良. 大地坐标系的建立与统一. 北京:解放军出版社,1993.
- [21] 刘经南,吴素芹. GPS 控制网基准优化设计方案. 大地测量学术年会论文,1991.
- [22] 黄劲松,李征航. GPS 快速静态定位技术. 武测科技,1996(2).
- [23] 王爱朝. GPS 动态定位的理论研究[学位论文]. 武汉测绘科技大学,1995.
- [24] 施品浩. GPS 定位技术的又一里程碑—RTK. 导航,1994(3).
- [25] 梁开龙,暴景阳,刘雁春. GPS 动态测量方法研究. 导航,1994(1).
- [26] 张勤,陶本藻. GPS 网应变强度分析与设计. 测绘通报,1996(1).
- [27] 刘大杰,白征东,施一民,沈云中. 大地坐标转换与 GPS 控制网平差计算及软件系统. 上海:同济大学出版社,1997.
- [28] 刘经南,葛茂荣. 广域差分 GPS 的数据处理方法及结果分析. 测绘工程,1998.
- [29] 谢世富. 差分 GPS 及其扩展. 导航,1991(1).
- [30] 徐绍铨,李征航. GPS 高程. 武汉测绘科技大学地测院,1995.
- [31] 刘大杰,沈云中,方婉如. GPS 水准的重力异常样条逼近解法. 测绘通报,1995(3).
- [32] E. Frei, G. Beutler. Rapid Static Positioning Based on the Fast Ambiguity Resolution Approach "FARA"; Theory and First Result. Manuscripta Geodetica, 1990, 15(6).
- [33] E. Frei, G. Beutler. Rapid Static Positioning Based on FARA; The Alternative to kinematic Positioning. Proceeding of the 2nd Int. Symp. On Precise Positioning with GPS, Canada, 1990.
- [34] B. W. Remondi. Using the Global Positioning System(GPS) Phase Observable for Relative Geodesy; Modeling, Processing and Results. Ph.D. thesis, Uni. of Texas, 1984.
- [35] H. Kahmen, J. Schwarz, T. Wunderlich. GPS—Messungen im Testnetz "Neul Welt". Ozfv, 1987(3).
- [36] B. W. Remondi. Performing Centimeter—level Surveys in seconds with GPS Carrierphase; Initial Results. Journal of the Institute of Navigation, 1985~1986, 32(4).

- [37] G. W. Hein. Integrated Processing of GPS and Gravity Data. *Journal of Surveying Engineering*, 1988, 114(4).
- [38] R. Hatch. Dynamic Differential GPS at Centimeter Level. *Proceedings 4th International Geod. Symp. in Satellite Positioning*, Austin, Texas, 1986; 1287~1298.
- [39] R. Hatch. Ambiguity Resolution in the Fast Lane. *Proceedings ION GPS-89*. Colorado Springs, CO. 1989; 45~50.
- [40] R. Hatch. Instantaneous Ambiguity Resolution. *Proceedings of IAG International Symposium 107 on Kinematic Systems in Geodesy, Surveying and Remote Sensing*, New York, 1990, Springer Verlag; 299~308.
- [41] G. W. Hein. Präzise Kinematische Positionierung durch GPS and Inertiale Navigationssysteme in Sekunden. *zfv*, 1989(7/8).
- [42] G. W. Hein. Bestimmung Orthometrischer Höhen durch GPS und Schweredaten. *Schriftreihe der Ubm H*. 1990, 38(1)
- [43] Peter J. G. Teunissen, Alfred Kleusberg. *GPS for Geodesy*. Springer-Verlag Berlin, 1998.
- [44] B. Hofmann-Wellenhof, H. Lichtenegger, J. Collins. *GPS Theory and Practice*. Springer Wien/New-York, 1994.
- [45] 陈永奇. 一种检验 GPS 整周模糊度解算有效性的方法. *武汉测绘科技大学学报*. 1997, 22(4) 342~345.
- [46] Wang J. Mathematical Model for Combined GPS and GLONASS Positioning. *Proceeding of 11th International Technical Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation*. ION GPS-98, Nashville TN, 1998(15-18); 1333~1344.
- [47] Xiaoli Ding, Yongqi Chen, Jianjun Zhu and Dingfa Huang. Surface Deformation Detection Using GPS Multipath Signals. *Proceeding of 12th International Technical Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation*. ION GPS-99, Nashville TN, 1999(14~17); 53~62.
- [48] Bock Y. The Use of Baseline Measurements and Geophysical Models for the Estimation of Crust Deformations and the Terrestrial Reference System. *Department of Geodetic Science and Surveying Report NO. 337*, The Ohio State University, 1982.
- [49] Heiskanen, W. A., H. Moritz. *Physical Geodesy*. Freeman and Company, San Francisco, 1967.
- [50] Langley, R. B. The GPS Receiver; An Introduction. *GPS World*, 1991, 2(1); 50~53.
- [51] Leick, A. *GPS Satellite Surveying*. John Wiley & Sons, New York, 1990.
- [52] Zumberge J. F., M. B. Hefflin, D. C. Jefferson, M. M. Watkins, and F. H. Webb. Precise Point Positioning for the Efficient and Robust Analysis of GPS Data from Large Network. *Journal Geophysics Res.* 102, 1997(B3); 5005~5018.
- [53] Cross P. Quality Measure for Differential GPS Positioning. *The Hydrographical Journal*, 1994(72); 17~22.
- [54] Jin X. Algorithm for Carrier Adjusted DGPS Positioning and Some Numerical Results. *Journal of Geodesy*. 1997, 71(1); 411~422.
- [55] Teunissen P. J. G. The Least-Square Ambiguity Decorrelation Adjustment: A Method for Fast GPS Integer Ambiguity Estimation. *Delft Geodetic Computing Centre(LGR)*. LGR-Report, 1994(9); 18.
- [56] E. J. Krakiwsky, B. Wanless, B. Buffett, K. P. Schwarz, M. Nakiboglu. GPS 轨道改进和精密定位. *GPS 卫星定位技术(译文专辑)*, 1998.
- [57] 陈俊勇. 世纪之交的全球定位系统及其应用. *测绘学报*. 1999, (29), 4.