第五章 二次型

主讲人： 柳顺义

长安大学理学院

引例

将二次曲面方程

$$5x^2+5y^2+8z^2-10xy-4xz+4yz-3\sqrt{2}x-3\sqrt{2}y=0$$

化为标准方程并指出它表示什么曲面.

解 作线性变换
$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x'-\dfrac{1}{\sqrt{6}}y'-\dfrac{1}{\sqrt{3}}z', \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x'+\dfrac{1}{\sqrt{6}}y'+\dfrac{1}{\sqrt{3}}z', \\ z=\qquad\qquad -\dfrac{2}{\sqrt{6}}y'+\dfrac{1}{\sqrt{3}}z', \end{cases}$$

原方程化为 $6y'^2+12z'^2-6x'=0$，即 $x'=y'^2+2z'^2$.(椭圆抛物面)

引例

问题1　线性变换

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x' - \dfrac{1}{\sqrt{6}}y' - \dfrac{1}{\sqrt{3}}z', \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x' + \dfrac{1}{\sqrt{6}}y' + \dfrac{1}{\sqrt{3}}z', \\ z = \qquad\quad - \dfrac{2}{\sqrt{6}}y' + \dfrac{1}{\sqrt{3}}z', \end{cases}$$

是如何求出的？有没有一般的方法？

问题2　上述线性变换能否保证图形的形状不改变？

二次型　$\boxed{5x^2 + 5y^2 + 8z^2 - 10xy - 4xz + 4yz} - 3\sqrt{2}x - 3\sqrt{2}y = 0$

本章概要

二次型理论起源于解析几何中二次曲线和二次曲面的化简和分类问题.

5.1 二次型及其标准形

5.2 化二次型为标准形 (二次型的化简)

5.3 正定二次型 (二次型的分类)

第5.1节 二次型及其标准形

柳顺义| 长安大学理学院

liu@chd.edu.cn

本节概要

一、什么是二次型？
- 1. 二次型的定义及其表示
- 2. 二次型的矩阵

二、二次型的标准形
- 1. 标准形的定义
- 2. 矩阵的合同

本节概要

一、什么是二次型?
- 1. 二次型的定义及其表示
- 2. 二次型的矩阵

二、二次型的标准形
- 1. 标准形的定义
- 2. 矩阵的合同

一、什么是二次型?

1. 二次型的定义及其表示

【定义】含有 n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2$$
$$+2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

称为 n **元二次型**.

例 (1) $f(x, y) = x^2 + 4xy - 5y^2$ 是 (2) $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + xz + yz$ 是

(3) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 5$ 不是 (4) $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2x$ 不是

注：本章只考虑实二次型（即系数全为实数的二次型）.

一、什么是二次型?

令 $a_{ij}=a_{ji}$，则 $2a_{ij}x_ix_j=a_{ij}x_ix_j+a_{ji}x_jx_i$，于是

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boxed{a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2}$$

平方项

$$\boxed{+2a_{12}x_1x_2}+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

交叉项

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

和式表示

一、什么是二次型?

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

$$=x_1(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n)$$

$$+x_2(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n)$$

$$+\cdots$$

$$+x_n(a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n)$$

$$=(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n \end{pmatrix}$$

实对称矩阵

$$=(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$=x^{\mathrm{T}}Ax$$

矩阵表示

一、什么是二次型?

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2$$

$$+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

$$=(x_1\quad x_2\quad\cdots\quad x_n)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=x^{\mathrm{T}}Ax$$

实对称阵

a_{ii} 为二次型 f 中平方项 x_i^2 的系数;

a_{ij} 为二次型 f 中交叉项 x_ix_j 的系数的一半.

一、什么是二次型?

2. 二次型的矩阵

例1 求4元二次型 $f = x_1^2 + 2x_2^2 + 7x_4^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + 4x_3x_4$ 的矩阵表示.

例2 求对称矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 所对应的二次型.

二次型与对称矩阵之间存在一一对应关系

【定义】若二次型 $f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, 其中 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为二次型 f **的矩阵**, 称 f 为矩阵 A **的二次型**, 称 $R(A)$ 为 f **的秩**.

本节概要

一、什么是二次型？

1. 二次型的定义及其表示
2. 二次型的矩阵

二、二次型的标准形

1. 标准形的定义
2. 矩阵的合同

二、二次型的标准形

1. 标准形的定义

【定义】 只含平方项的二次型称为二次型的标准形.

对于二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，主要问题之一是寻找可逆的线性变换

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n. \end{cases}$$

使二次型只含平方项，即化为标准形

$$k_1 y_1{}^2 + k_2 y_2{}^2 + \ldots + k_n y_n{}^2$$

二、二次型的标准形

对于二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，寻找可逆的线性变换

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n, \\ \cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n. \end{cases}$$

使二次型只含平方项，即化为标准形

$$k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \ldots + k_n y_n^2$$

记线性变换为 $x = Cy$，则

$$f = x^{\mathrm{T}}Ax = (Cy)^{\mathrm{T}} A (Cy) = y^{\mathrm{T}} \boxed{(C^{\mathrm{T}}AC)} y$$

2. 矩阵的合同

【定义】设 A, B 为 n 阶方阵，若存在可逆矩阵 C，使得：

$$C^{\mathrm{T}}AC = B$$

则称矩阵 A **与** B **合同**.

- 若 A 为对称矩阵，且 A 和 B 合同，则

$$B^{\mathrm{T}} = (C^{\mathrm{T}}AC)^{\mathrm{T}} = C^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = C^{\mathrm{T}}AC = B$$

  即若 A 为对称矩阵，则 B 也为对称矩阵.

- $R(B) = R(A)$.

二、二次型的标准形

2. 矩阵的合同

- 若 A 为对称矩阵，且 A 和 B 合同，则

$$B^{\mathrm{T}} = (C^{\mathrm{T}}AC)^{\mathrm{T}} = C^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = C^{\mathrm{T}}AC = B$$

即若 A 为对称矩阵，则 B 也为对称矩阵.

- $R(B) = R(A)$.

记线性变换为 $x = Cy$，则

$$f = x^{\mathrm{T}}\boxed{A}x = (Cy)^{\mathrm{T}}A(Cy) = y^{\mathrm{T}}\boxed{(C^{\mathrm{T}}AC)}y$$

经过可逆变换后，二次型 f 的矩阵由 A 变为与 A 合同的矩阵 $C^{\mathrm{T}}AC$，且二次型的秩不变.

二、二次型的标准形

《线性代数》中三种矩阵关系总览表

前提	关系	定义	相互关系	秩的关系
A、B为同型矩阵	A与B**等价**	存在可逆阵P, Q, 使得: $PAQ=B$	P, Q互逆时, 相似 P, Q互为转置时, 合同	$R(A)=R(B)$
A、B为同阶方阵	A与B**相似**	存在可逆阵P, 使得: $P^{-1}AP=B$	必等价 P为正交阵时, 合同	
	A与B**合同**	存在可逆阵P, 使得: $P^{T}AP=B$	必等价 P为正交阵时, 相似	

谢 谢！

第5.2节 化二次型为标准形

柳顺义| 长安大学理学院
liu@chd.edu.cn

本节概要

本节主要考虑如下问题：

- 是否每个二次型都能通过可逆线性变换化为标准形？
- 若一个二次型可通过可逆线性变换化为标准形，请给出所用的可逆线性变换及所得到的标准形.

一、正交变换法

二、配方法

本节概要

一、正交变换法

二、配方法

一、正交变换法

若二次型 f 经过可逆变换 $x=Cy$ 变为标准形，即

$$f=x^{\mathrm{T}}Ax\overset{x=Cy}{=}(Cy)^{\mathrm{T}}A(Cy)=y^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}}AC)y$$

$$=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ny_n^2$$

$$=(y_1\quad y_2\quad\cdots\quad y_n)\begin{pmatrix}k_1&&&\\&k_2&&\\&&\ddots&\\&&&k_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$$

化二次型为标准形转化为：对实对称阵 A，寻找可逆矩阵 C，使 $C^{\mathrm{T}}AC$ 为对角矩阵（实对称阵合同对角化）．

一、正交变换法

对实对称矩阵 A，如何寻找可逆矩阵 C，使得 $C^{T}AC=\Lambda$?

定理4.4.3 设 A 为 n 阶实对称矩阵，则必有正交矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP=P^{T}AP=\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n),$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ 是 A 的 n 个特征值.

$$f=x^{T}Ax\overset{x=Py}{=}(Py)^{T}A(Py)=y^{T}(P^{T}AP)y$$

$$=(y_1\quad y_2\quad\cdots\quad y_n)\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2.$$

一、正交变换法

对实对称矩阵 A，如何寻找可逆矩阵 C，使得 $C^{\mathrm{T}}AC = \Lambda$?

定理4.4.3 设 A 为 n 阶实对称矩阵，则必有正交矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP = P^{\mathrm{T}}AP = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n),$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 是 A 的 n 个特征值.

【定理】任给二次型 $f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}$，总有正交变换 $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$，

使 f 化为标准形: $f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$

这里 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是二次型 f 的矩阵 A 的全部特征值.

一、正交变换法

例 将二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$$

通过正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 化成标准形.

解

二次型 $\boldsymbol{f}$ 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&-2&-4\\-2&4&-2\\-4&-2&1\end{pmatrix}$

$\boldsymbol{A}$的特征多项式为 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&-4\\-2&4-\lambda&-2\\-4&-2&1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-5)^2(\lambda+4)$

则$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=5,\lambda_3=-4$.

一、正交变换法

当 $\lambda_1=\lambda_2=5$ 时，$A-5E=\begin{pmatrix}-4&-2&-4\\-2&-1&-2\\-4&-2&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1/2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

得 $(A-5E)x=0$ 的基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1/2\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

对其进行 **Schmidt 正交化**，再**单位化**，得

$$\boldsymbol{p}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{p}_2=\frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-4\\-2\\5\end{pmatrix}$$

一、正交变换法

当 $\lambda_3=-4$ 时，$A+4E=\begin{pmatrix}5 & -2 & -4\\ -2 & 8 & -2\\ -4 & -2 & 5\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

得 $(A+4E)x=0$ 的基础解系 $\xi_3=(1,1/2,1)^T$，单位化得 .

$$p_3=\frac{1}{3}(2,1,2)^T$$

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1\quad \boldsymbol{p}_2\quad \boldsymbol{p}_3)$，则经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 可将 f 化为标准形

$$f=5y_1^2+5y_2^2-4y_3^2.$$

一、正交变换法

正交变换法化二次型为标准形可保持图形的几何形状不变.

引例

将二次曲面方程

$$\boxed{5x^2+5y^2+8z^2-10xy-4xz+4yz}-3\sqrt{2}x-3\sqrt{2}y=0$$

化为标准方程并指出它表示什么曲面.

解 作线性变换 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x'-\dfrac{1}{\sqrt{6}}y'-\dfrac{1}{\sqrt{3}}z', \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x'+\dfrac{1}{\sqrt{6}}y'+\dfrac{1}{\sqrt{3}}z', \\ z=\qquad\quad -\dfrac{2}{\sqrt{6}}y'+\dfrac{1}{\sqrt{3}}z', \end{cases}$

原方程化为 $6y'^2+12z'^2-6x'=0$，即 $x'=y'^2+2z'^2$.(椭圆抛物面)

本节概要

一、正交变换法

二、配方法

二、配方法(拉格朗日法)

(1) 平方项系数不全为0

例 用配方法将下列二次型化为标准形.

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+5x_2^2+10x_3^2-4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$$

解 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+5x_2^2+10x_3^2-4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$

$$=[(x_1-2x_2+x_3)^2-4x_2^2-x_3^2+4x_2x_3]+5x_2^2+10x_3^2+2x_2x_3$$

$$=(x_1-2x_2+x_3)^2+x_2^2+9x_3^2+6x_2x_3=(x_1-2x_2+x_3)^2+(x_2+3x_3)^2$$

令 $\begin{cases} y_1=x_1-2x_2+x_3, \\ y_2=x_2+3x_3, \\ y_3=x_3. \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x_1=y_1+2y_2-7y_3 \\ x_2=y_2-3y_3 \\ x_3=y_3 \end{cases}$ $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

因为 $|C|\neq 0$, 该变换为可逆线性变换. 则标准形为 $f=y_1^2+y_2^2$.

二、配方法(拉格朗日法)

(2) 平方项系数全为0　　f中不含平方项，需先构造平方项

例 用配方法化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+4x_1x_3$ 为标准形，并求出所作的可逆线性变换.

解 令 $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = \quad\quad y_3 \end{cases}$

$$f(x_1,x_2,x_3)=2y_1^2-2y_2^2+4y_1y_3+4y_2y_3$$
$$=2(y_1^2+2y_1y_3+y_3^2)-2y_2^2+4y_2y_3-2y_3^2$$
$$=2(y_1+y_3)^2-2(y_2-y_3)^2$$

令 $\begin{cases} z_1 = y_1 + y_3 \\ z_2 = y_2 - y_3 \\ z_3 = \quad\quad y_3 \end{cases}$

则二次型的标准形为 $f=2z_1^2-2z_2^2$.

二、配方法(拉格朗日法)

(2) 平方项系数全为0

例 用配方法化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+4x_1x_3$ 为标准形，并求出所作的可逆线性变换.

解

令 $\begin{cases} x_1=y_1+y_2 \\ x_2=y_1-y_2 \\ x_3=\qquad y_3 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3 \end{pmatrix}$

令 $\begin{cases} z_1=y_1+y_3 \\ z_2=y_2-y_3 \\ z_3=\qquad y_3 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\\ z_3 \end{pmatrix}$

则所作的可逆线性变换为

$$\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\\ z_3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\\ z_3 \end{pmatrix}$$

二、配方法(拉格朗日法)

拉格朗日配方法的步骤

1. 若 f 含有 x_i^2，则先把含有 x_i 的项集中，然后配方，再对其余的变量同样进行，直到都配成完全平方项为止，经过可逆线性变换，就得到标准形.

2. 若 f 中不含有 x_i^2，但是 $a_{ij} \neq 0 \ (i \neq j)$,

则先作可逆线性变换 $\begin{cases} x_i = y_i + y_j \\ x_j = y_i - y_j \\ x_k = y_k \end{cases} \quad \begin{pmatrix} k = 1,2,\cdots,n \\ \text{且 } k \neq i, j \end{pmatrix}$

化 f 为含有平方项的二次型，然后再按1中方法配方.

二、配方法(拉格朗日法)

注意：一般地，配方法所得到的可逆线性变换 $y = Cx$ 中的矩阵 C 不是正交矩阵，由此得到 f 的标准形的系数不再是二次型矩阵的特征值.

二、配方法(拉格朗日法)

例 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+8x_3^2+4x_1x_3+4x_2x_3$，

1. 求一可逆变换将该二次型化为标准形;

2. $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 是什么曲面?

解 1. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+8x_3^2+4x_1x_3+4x_2x_3$

$$=(x_1+2x_3)^2+(x_2+2x_3)^2$$

$$=y_1^2+y_2^2.$$

$$\begin{cases} y_1=x_1+2x_3, \\ y_2=x_2+2x_3, \\ y_3=x_3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=y_1-2y_3, \\ x_2=y_2-2y_3, \\ x_3=y_3. \end{cases} \quad \boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}, \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

二、配方法(拉格朗日法)

例 设二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2+x_2^2+8x_3^2+4x_1x_3+4x_2x_3$，

1. 求一可逆变换将该二次型化为标准形；

2. $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 是什么曲面？

解 2. 由 $|A-\lambda E|=0$，特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=9$.

在正交变换下，可将 $f=1$ 化为 $y_2^2+9y_3^2=1$.

椭圆柱面

谢 谢!

第5.3节 正定二次型

柳顺义| 长安大学理学院

liu@chd.edu.cn

本节概要

本节主要考虑二次型的分类问题.

一、正定二次型

1. 正定二次型的定义
2. 正定二次型的判定定理

二、二次型的其它问题

本节概要

本节主要考虑二次型的分类问题.

一、正定二次型

1. 正定二次型的定义
2. 正定二次型的判定定理

二、二次型的其它问题

一、正定二次型

1. 正定二次型的定义

【定义】设实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，若对任意的非零向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{0}$, 都有:

(1) $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$, 则称 f 为**正定二次型**, $\boldsymbol{A}$ 为**正定矩阵**, 记为 $\boldsymbol{A}>0$;

(2) $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}<0$, 则称 f 为**负定二次型**, $\boldsymbol{A}$ 为**负定矩阵**, 记为 $\boldsymbol{A}<0$;

(3) $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\geq 0$, 则称 f 为**半正定二次型**, $\boldsymbol{A}$ 为**半正定矩阵**, 记 $\boldsymbol{A}\geq 0$;

(4) $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leq 0$, 则称 f 为**半负定二次型**, $\boldsymbol{A}$ 为**半负定矩阵**, 记 $\boldsymbol{A}\leq 0$;

(5) 如果 f 既不是半正定又不是半负定, 则称 f 为**不定的**.

一、正定二次型

【重要结论】 (1) 可逆线性变换不改变二次型的正定性

证明: 设二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 正定, 则对任意 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, 都有: $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$

若 f 经可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 化为 $f=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$, 则: $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$

对任意的 $\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$, 都有 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$, 则:

$f=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$, 故 $f=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$ 正定.

(2) 二次型 f 正定（半正定）$\Leftrightarrow$ $-f$ 负定（半负定）.

证明: $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 正定 $\Leftrightarrow$ 对任意 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, 都有: $f>0$, 即 $-f<0$

$\Leftrightarrow$ $-f$ 负定.

一、正定二次型

2. 正定二次型的判定定理

【判定定理】 设 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为 n 元实二次型, 则下列命题等价:

(1) f 为正定二次型;

(2) f 的正惯性指数为 n;

(3) $\boldsymbol{A}$ 的特征值全大于零;

(4) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{U}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}$;

(5) (Sylvester定理) $\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式全大于零, 即:

$$a_{11}>0,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0,\quad \cdots\quad ,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}|>0.$$

一、正定二次型

定理 二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$正定当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式全大于零.

例5.3.1 判断 $f=5x^2+6y^2+4z^2-4xy-4xz$ 的正定性.

解 f 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

因为 $a_{11}=5>0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}=26>0$, $|A|=80>0$

所以 f 是一个正定二次型.

一、正定二次型

例 问 t 为何值时，下面二次型正定？

$$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+x_2^2+tx_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3.$$

解 f 的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}5 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -1\\ -1 & -1 & t\end{bmatrix}$.

因为 $a_{11}=5>0,\begin{vmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1>0,\ |A|=\begin{vmatrix}5 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -1\\ -1 & -1 & t\end{vmatrix}=t-2>0$ 解得 $t>2$.

练习 若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_2x_3$ 是正定的，求 t 的取值范围.

一、正定二次型

例5.3.2 判断下列二次型的正定性.

$$(1)\quad f=-x^2-y^2-3z^2-2xz-2yz$$

解 f的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -3\end{pmatrix}$

$$a_{11}=-1<0,\qquad \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}=1>0,\qquad |A|=-1<0$$

所以f是一个负定二次型.

【推论】 n阶实对称矩阵A是负定矩阵$\Leftrightarrow$

A的奇数阶顺序主子式全为负，偶数阶顺序主子式全为正.

一、正定二次型

【推论】 n阶实对称矩阵A是负定矩阵 $\Leftrightarrow$

A的奇数阶顺序主子式全为负，偶数阶顺序主子式全为正.

证明

$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_n$负定 $\Leftrightarrow f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$负定 $\Leftrightarrow -f=-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$正定 $\Leftrightarrow -\boldsymbol{A}=(-a_{ij})$正定

$$\Leftrightarrow\quad -a_{11}>0,\quad \begin{vmatrix}-a_{11} & -a_{12}\\ -a_{21} & -a_{22}\end{vmatrix}>0,\quad \begin{vmatrix}-a_{11} & -a_{12} & -a_{13}\\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23}\\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33}\end{vmatrix}>0,\ \cdots,\ |-\boldsymbol{A}|>0.$$

$$\Leftrightarrow\quad a_{11}<0,\quad \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}>0,\quad \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}<0,\ \cdots,\ (-1)^n|\boldsymbol{A}|>0.$$

一、正定二次型

例5.3.2 判断下列二次型的正定性.

$$(2)\quad g = 2x^2 + y^2 - 4xy - 4yz$$

解 g 的矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

因为 $a_{11} = 2 > 0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -2 < 0$,

所以 g 既不是正定的, 也不是负定的, 即为不定二次型.

一、正定二次型

定理 二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 正定当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值全大于**0.**

例 若 A是正定矩阵，则 $|A|>0$.

例 若$\boldsymbol{A}$是正定矩阵, 求证: $\boldsymbol{A}^{-1}$也是正定矩阵 .

证 $\boldsymbol{A}$是正定阵, 则 $\boldsymbol{A}$的所有特征值 $\lambda_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$

所以 $\boldsymbol{A}^{-1}$的所有特征值 $\dfrac{1}{\lambda_i}>0\ (i=1,2,\cdots,n)$, 故$\boldsymbol{A}^{-1}$是正定矩阵.

例 若 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵$\boldsymbol{A}^*$是正定矩阵 .

例 若 A,B 是正定矩阵，则 $A+B$ 是正定矩阵.

本节概要

本节主要考虑二次型的分类问题.

一、正定二次型

1. 正定二次型的定义

2. 正定二次型的判定定理

二、二次型的其它问题

二、二次型的其它问题

1. 在化二次型为标准形时，为什么要求线性变换可逆?

2. 二次型的标准形是否唯一?

3. 二次型的惯性定理及规范形的唯一性

二、二次型的其它问题

1. 在化二次型为标准形时，为什么要求线性变换可逆?

答　只有当线性变换 $x = Cy$ 可逆时，才有 $y = C^{-1}x$，它可以把所得的二次型还原，这样就使我们从所得二次型的性质可以推知原来二次型的一些性质.

二、二次型的其它问题

2. 二次型的标准形是否唯一？

二次型的标准形一般不唯一

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$$

➤ 正交变换法

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} & -4/\sqrt{45} & 2/3 \\ 2/\sqrt{5} & -2/\sqrt{45} & 1/3 \\ 0 & 5/\sqrt{45} & 2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

标准形为

$$g_1(y_1,y_2,y_3)=5y_1^2+5y_2^2-4y_3^2$$

➤ 配方法

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

标准形为

$$g_2(y_1,y_2,y_3)=y_1^2-15y_2^2+\frac{20}{3}y_3^2$$

二、二次型的其它问题

二次型的标准形不唯一，但系数不等于0的平方项个数被 f 唯一确定.

例 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+8x_3^2+4x_1x_3+4x_2x_3$，

1. 求一可逆变换将该二次型化为标准形；
2. $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 是什么曲面？

解 1. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+8x_3^2+4x_1x_3+4x_2x_3$

$$=(x_1+2x_3)^2+(x_2+2x_3)^2$$

$$=\boxed{y_1^2+y_2^2}$$

$$\begin{cases} y_1=x_1+2x_3, \\ y_2=x_2+2x_3, \\ y_3=x_3. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1=y_1-2y_3, \\ x_2=y_2-2y_3, \\ x_3=y_3. \end{cases} \qquad C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. 由 $|A-\lambda E|=0$，特征值为 $\lambda_1=0, \lambda_2=1, \lambda_3=9$.

在正交变换下，可将 $f=1$ 化为 $\boxed{y_2^2+9y_3^2}=1$. 椭圆柱面

二次型的标准形中系数不等于 0 的平方项的个数等于二次型的秩.

二、二次型的其它问题

3. 二次型的惯性定理及规范形的唯一性

【惯性定理】 对任何实二次型, 其标准形中系数为负的平方项个数和系数为正的平方项个数都是唯一确定的, 与所做的可逆线性变换无关.

正惯性指数 − 负惯性指数 = 符号差

正惯性指数 + 负惯性指数 = 秩

定义 在秩为r的二次型的标准形中，正平方项的个数 p 称为二次型的正惯性指数，负平方项的个数 $r-p$ 称为二次型的负惯性指数，它们的差 $p-(r-p) = 2p-r$ 称为二次型的符号差.

- ➢ 二次型的秩、正惯性指数和负惯性指数都是可逆线性变换下的不变量.

二、二次型的其它问题

【推论1】任给秩为 r 的 n 元二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, 总有可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$, 使二次型的标准形中非零项系数为 1和 –1, 即

$$f=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2\cdots-y_r^2$$

其中 p 为 f 的正惯性指数. 该式称为二次型 f 的**规范形**.

(1) 规范形和标准形的关系? 规范形本身就是一个标准形.

(2) 为什么"总有"……?

如 $f=3y_1^2+2y_2^2-4y_3^2$ 令 $\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & & \\ & 1/\sqrt{2} & \\ & & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix}$, 有 $f=z_1^2+z_2^2-z_3^2$

【推论2】实二次型的规范形是唯一的.

谢 谢!