

复习线性代数的要求和方法

中央电大主讲教师 邱维声

复习是学习知识的一个重要环节。复习的目的有两个：一是巩固学过的知识，使之熟练；一是加深对学过的知识的理解，使前后内容融会贯通。

线性代数这门课程的复习要求是：

(1) 熟练掌握各种类型计算题的解题方法，并且要求计算准确无误；

(2) 能确切叙述概念的定义；

(3) 会叙述学过的定理、推论、命题、性质，并且对于比较简单的定理、推论、命题、性质的证明要求掌握；

(4) 能运用概念和运用学过的定理、推论、命题、性质去做一些较简单的证明题。

复习范围以电视课上讲的内容和留的作业为准，复习范围的细目详见中央广播电视大学印发下去的《线性代数复习提纲》。

下面围绕复习的两个目的来谈谈线性代数的复习方法。

巩固知识 熟练扎实

为了达到巩固知识，使之熟练、扎实的目的，复习时可以一章一章地复习，复习每一章时可大体上按下述三个步骤进行。

第一步，想一想这一章要研究、解决什么问题，解决这些问题的基本思路是什么。

譬如第四章，由于相似的矩阵有许多共同的性质，所以希望在所有与 A 相似的矩阵中挑一个最简单的矩阵来研究。于是问：一个 n 级矩阵 A 能够相似于一个什么样的最简单的矩阵？如何找可逆矩阵 U ，使得 $U^{-1}AU$ 就是最简单的矩阵？这就是第四章的中心问题。解决这问题的基本思路是：首先考虑一个 n 级矩阵 A 相似于对角矩阵的充分

必要条件是什么。经过推导，得出充分必要条件是： A 有 n 个线性无关的特性向量，并且以这 n 个线性无关的特征向量为列向量组的矩阵 U 就是所求的可逆矩阵，它使得 $U^{-1}AU$ 为对角矩阵，这个对角矩阵的主对角元是 A 的特征值。因此需要会求 A 的特征值和特征向量，会数 A 有多少个线性无关的特征向量。这些就是本章的关键所在。

第二步，按照复习提纲所列的细目回忆这一章的概念、定理、推论、命题、性质以及计算题的解题方法。对于各种类型的计算题的解题方法要熟练掌握。对于概念要求能确切地叙述它的定义。

譬如，数域 P 上的 n 级矩阵 A 的特征值和特征向量的定义是：“设 A 是数域 P 上的 n 级矩阵，如果对于数域 P 中的一个数 λ_0 ，存在一个数域 P 上的非零的 n 维列向量（即 $n \times 1$ 矩阵） α ，使得

$$A\alpha = \lambda_0\alpha$$

则 λ_0 称为 A 的一个特征值， α 称为 A 的属于特征值 λ_0 的特征向量。”在这里，必须指出 λ_0 是数域 P 中的数，若漏掉了“数域 P ”，就是不确切；关于 α 一定要指出是非零的列向量，若漏掉了“非零”，就是不确切。关于定理、推论、命题、性质，要记住它们的结论；需要同学们掌握其证明的定理、推论、命题、性质、同学们在复习时应先自己动手证明一遍，确实想不出怎么证明时，再去翻笔记或书。对于电视课上讲的例题，同学们在复习时应当很好看一看，这些例题或者是为了说明一个定理，或者是讲出一种类型的题目的解题方法，或者是介绍一些解题技巧。

第三步，把电视课上留的作业题挑一部

分再做一遍,可以每种类型的题挑二、三个来做。

关于计算题,首先要熟练掌握它的解题方法,不要把不同类型的计算题的解题方法混淆。其次要保证计算准确无误,这除了在每一步都细心计算以外,还必须有验算答案对不对的方法,用这些方法进行验算,以便自己就能有把握地判断自己做的这个题的答案对不对。

譬如,计算一个行列式,可以用两种方法来算,比较答案是否一致。解线性方程组,可以把求得的解代入原方程组,看它是至适合每个方程。求矩阵 A 的逆矩阵,只要验算 AA^{-1} 是否等于单位矩阵。解矩阵方程 $AX=B$,只要把求得的 X 去右乘 A ,即 AX ,看它是否等于 B 。求矩阵 A 的特征值和特征向量,验算方法是把求得的特征值 λ_0 与属于 λ_0 的特征向量 α 相乘,即 $\lambda_0\alpha$,看它是否等于 $A\alpha$ 。当矩阵 A 可以对角化时,求可逆矩阵 U ,使得 $U^{-1}AU$ 为对角矩阵,验算的方法是,先求 U^{-1} ,再计算 $U^{-1}AU$,看它是否等于求出来的对角矩阵 D ;或者验算 AU 是否等于 UD 。对于实对称矩阵 A ,求正交矩阵 T ,使得 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵,验算的方法是:先算 TT' 是否等于 E ,若等于 E ,则说明 T 确是正交矩阵;再算 $T^{-1}AT$ 是否等于求出来的对角矩阵,注意因为 T 是正交矩阵,所以 $T^{-1}=T'$,从而 T^{-1} 很容易算。二次型 $f(x_1, \dots, x_n)=X'AX$ 经过非退化线性替换 $X=CY$,化成标准形 $d_1y_1^2+d_2y_2^2+\dots+d_ny_n^2$,验算的方法是:计算 $C'AC$,看它是否等于对角矩阵

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}.$$

关于证明题。首先要把已知条件和求证什么区分清楚;然后一般是从求证的结论入手去想出证明的路子;有了证明的路子后,再运用已知条件去推导出我们需要证明的结论。举例如下:

例1 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 线性无关, 试证:
 $\alpha_1+3\alpha_2, 2\alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+2\alpha_1$ 线性无关。

分析: 要证 $\alpha_1+3\alpha_2, 2\alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+2\alpha_1$ 线性无关, 据定义只要证: 设

$$k_1(\alpha_1+3\alpha_2)+k_2(2\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+2\alpha_1)=0, \quad (1)$$

去证 $k_1=k_2=k_3=0$ 。这需要利用已知条件: “ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关”。为了能用上这个已知条件, 需要把(1)式改写成:

$$(k_1+2k_3)\alpha_1+(3k_1+2k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0 \quad (2)$$

这时用已知条件: “ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关”, 就可得到

$$\begin{cases} k_1+2k_3=0, \\ 3k_1+2k_2=0, \\ k_2+k_3=0. \end{cases}$$

解这个齐次线性方程组得:

$$k_1=k_2=k_3=0.$$

分析清楚后, 这个题就会证明了。

例2 若 A 可逆, 则 A' 也可逆, 并且

$$(A')^{-1}=(A^{-1})'. \quad (3)$$

分析: 已知 A 可逆, 要证 A' 可逆以及(3)式成立。利用可逆矩阵的性质1: “若 $AB=E$, 则 A, B 都可逆, 并且 $A^{-1}=B, B^{-1}=A$ 。”于是为了证 A' 可逆以及为了证 A' 的逆等于 $(A^{-1})'$, 就只要证 $A' \cdot (A^{-1})'$ 等于 E 。

如上分析后, 证明的路子就出来了, 于是可写出证明如下。

证 $\because A$ 可逆, $\therefore A^{-1}$ 存在。

$$\because A' \cdot (A^{-1})' = (A^{-1}A)' = E' = E.$$

由可逆矩阵性质1, 得 A' 可逆, 并且

$$(A')^{-1}=(A^{-1})'.$$

从上述两个例子可以看出, 要能够做证明题, 除必须把概念弄清楚, 把学过的定理、推论、命题、性质记住外, 还要掌握好推理思路。

加深理解 融会贯通

为了达到复习的第二个目的: 加深理解, 使前后内容融会贯通, 在按照上述三步复习

完各章以后,应当再进一步想一想:线性代数各章内容之间的联系是什么?线性代数解决问题的基本想法是什么?等。

线性代数各章的内容基本上可以用矩阵串起来。第一章行列式可以看成是 n 级矩阵的行列式。第二章线性方程组,其解法是对它的增广矩阵施行初等行变换化成阶梯形矩阵;有无解的判定是看它的系数矩阵与增广矩阵是否同秩;解的结构;齐次线性方程组的基础解系的求法仍然是要对它的系数矩阵施行初等行变换化成行简化阶梯形,并且基础解系的解的个数等于未知量的个数减去系数矩阵的秩。在这一章中,关于 n 维向量空间的基本知识,不少问题的解决也需要用矩阵这一工具,譬如判定向量组是否线性相关,住住也需用矩阵的初等变换。第三章讲的主要是矩阵的运算。第四章是研究一个 n 级矩阵 A 能相似于一个什么样的最简单的矩阵。第五章二次型的研究也要用矩阵这一工具。

线性代数解决问题的基本想法是:把复杂的东西通过一定的变换变成简单的东西。

譬如,一个 n 级行列式包含 $n!$ 项,计算量很大,而三角形行列式的 $n!$ 项中至多只有一个非零解,其余项全是零,从而很容易计算。因此计算行列式的方法之一就是通过对一行的公因子提出去、两行互换、把一行的倍数加到另一行上变成三角形行列式,至于每作一次上述的变换,行列式的值会发生什么样的变化这需要利用行列式的性质2、4、6。

关于线性方程组的求解,由于阶梯形方程组很容易解,并且初等变换把方程组变成与它同解的方程组,所以解线性方程组的方法就是:用初等变换把线性方程组变成阶梯形方程组,进而求解。

求矩阵的秩之所以要把它通过初等变换化成阶梯形,是因为阶梯形矩阵的秩很容易看出:它就等于非零行的行数,并且因为初等变换不改变矩阵的秩。

第四章研究的是把一个 n 级矩阵通过相似变换变成最简单的矩阵。第五章研究的是

把一个二次型经过非退化的线性替换变成平方和的形式。

线性代数解决问题的一个重要技巧是:把一种形式的问题转化为另一种形式的问题。这对于解题很有好处。下面举一个例子来说明。

一个矩阵方程

$$AX=0, \quad (4)$$

其中 A 是 $s \times n$ 矩阵, X 是 $n \times 1$ 矩阵。于是(4)式就表示一个齐次线性方程组。

若有 $A\alpha=0$,则 α 就是齐次线性方程组(4)的一个解。于是,如果有

$$AB=0, \quad (5)$$

其中 B 是 $n \times m$ 矩阵,设 $B_1, \dots, B_m$ 是 B 的列向量组,则 $B_1, \dots, B_m$ 都是齐次线性方程组(4)的解,这是因为

$AB=A(B_1, \dots, B_m)=(AB_1, \dots, AB_m)$,
所以由(5)式得 $AB_1=0, \dots, AB_m=0$ 。这就表明: $B_1, \dots, B_m$ 都是方程组 $AX=0$ 的解。

现在利用上述看法来证明一个数。

例3 设 A, B 都是 n 级矩阵,试证:如果 $AB=0$,那么秩(A)+秩(B) $\leq n$ 。

证 设秩(A)= r 。因为 $AB=0$,所以 B 的列向量 $B_1, \dots, B_m$ 都是齐次线性方程组 $AX=0$ 的解。

$AX=0$ 的基础解系有 $n-r$ 个解,设为

$$\eta_1, \dots, \eta_{n-r}$$

于是 $B_1, \dots, B_m$ 都可以由 $\eta_1, \dots, \eta_{n-r}$ 线性表出,从而 $B_1, \dots, B_m$ 的秩 $\leq \eta_1, \dots, \eta_{n-r}$ 的秩。因此 $\eta_1, \dots, \eta_{n-r}$ 线性无关,所以 $\eta_1, \dots, \eta_{n-r}$ 的秩= $n-r$ 。于是得 秩(B) $\leq n-r$,

所以 $r + \text{秩}(B) \leq n$ 。

即 秩(A)+秩(B) $\leq n$ 。

由此看出,做一个较难的证明题,除了要弄清楚概念和记住定理、推论、命题、性质以外,还需要有一些技巧,而把一种形式的问题(在例3中是矩阵的等式 $AB=0$)转化为另一种形式的问题(例3中转化为: B 的列向量都是齐次线性方程组 $AX=0$ 的解。)就是一种重要的技巧。