第一章 行列式

主讲人： 柳顺义

长安大学理学院

本章概要

- 行列式的概念来源于线性方程组的求解，它是线性代数的<u>重要工具</u>.
- 本章主要介绍行列式的概念、性质、计算以及一个应用.

行列式

- 1.1 数域与排列
- 1.2 行列式的定义
- 1.3 行列式的性质
- 1.4 行列式按行(列)展开
- 1.6 克拉默法则

第1.1节 数域与排列

主讲人： 柳顺义

长安大学理学院

本节概要

一、数域
- 1. 数域的定义
- 2. 数域的性质

注：数域限定了本课程中数的一般取值范围（了解）.

二、n 元排列
- 1. n元排列的定义
- 2. 逆序
- 3. 逆序数
- 4. 排列的对换

注：n元排列为给出行列式的定义做准备（掌握）.

本节概要

一、数域
- 1. 数域的定义
- 2. 数域的性质

注：数域限定了本课程中数的一般取值范围（了解）.

二、n 元排列
- 1. n元排列的定义
- 2. 逆序
- 3. 逆序数
- 4. 排列的对换

注：n元排列为给出行列式的定义做准备（掌握）.

一、数域

1. 什么是数域?

现象：同一个问题在不同的数的取值范围内可能会得到不同的结果.

方程 $x^2+1=0$ 在实数范围内无解；在复数范围内有解.

【定义】设P是至少含有两个不同复数的数集，如果P中任意两个数(这两个数可以相等)的和、差、积、商(分母不为0)的结果仍在P中，则称P是一个**数域**. 数域就是一个对四则运算封闭的数集.

例 整数集Z、有理数集Q、实数集R、复数集C中哪些是数域？

有理数域　　实数域　　复数域

一、数域

2. 数域的性质

【性质1】任意数域 P 包含 0 和 1.

【性质2】任意数域 P 包含有理数域.

约定 今后线性代数中的问题都是限定在某一数域中讨论.

如不做特别说明，一般认为在实数域中讨论.

本节概要

一、数域
- 1. 数域的定义
- 2. 数域的性质

注：数域限定了本课程中数的一般取值范围（了解）.

二、n 元排列
- 1. n元排列的定义
- 2. 逆序
- 3. 逆序数
- 4. 排列的对换

注：n元排列为给出行列式的定义做准备（掌握）.

二、n 元排列

1. n 元排列的定义

【定义】由自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组 $p_1p_2\cdots p_n$ 称为一个 **n 元排列**.

一元排列： 1

二元排列： 12, 21

三元排列： 123,132,213,231,312,321

……

【事实】n 元排列共有 $n!$ 个 .

有什么特点？

【定义】称 n 元排列 $12\cdots n$ 为**自然排列**或**标准排列**.

二、n 元排列

2. 逆序

【定义】在一个 n 元排列 $p_1 \cdots p_s \cdots p_t \cdots p_n$ 中，按照排列中的顺序任取两个数 $p_s, p_t\ (s<t)$，如果 $p_s > p_t$，则称 p_s, p_t 构成一个**逆序**.

例 在5元排列 **51423** 中，

逆序

5 1 4 2 3

逆序 逆序

例 在排列 **51423** 中，除了**51, 54,42**，还有没有其它的逆序？

解 还有逆序：52, 53, 43.

二、n 元排列

3. 逆序数

【定义】n 元排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中，所有逆序的总数，称为这个排列的**逆序数**，记作 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$.

例 在排列 **51423** 中所有逆序为 **51,54,52,53,42,43**，其逆序数是**6.**
记为 $\tau(51423)=6.$

【定义】逆序数为奇数的排列称为**奇排列**,
逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

例 排列 **51423** 是奇排列还是偶排列？

二、n 元排列

3. 逆序数

如何求 n 元排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数？

先看有多少个比 p_1 小的数排在p_1后面，记为 t_1；

再看有多少个比 p_2 小的数排在p_2后面，记为 t_2；

……

最后看有多少个比 p_n 小的数排在p_n后面，记为 t_n；

则此排列的逆序数为 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)=t_1+t_2+\cdots+t_n$.

例 求 n 元排列 $n(n-1)\cdots 21$的逆序数，并讨论其奇偶性.

解 $\tau(n(n-1)\cdots 21)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\dfrac{n(n-1)}{2}.$

二、n 元排列

4. 排列的对换

【定义】把一个排列中某两个元素的位置互换，而其余元素的位置不动，就得到一个新的排列，这种变换称为**对换**.

$$5\ 1\ 4\ 2\ 3 \xrightarrow{(1,\ 2)} 5\ 2\ 4\ 1\ 3$$

偶排列　　　　奇排列

问题　对换对排列的奇偶性有什么影响？

现象　一次对换改变了排列的奇偶性.

二、n 元排列

【定理】排列中任意两个元素作对换，排列改变奇偶性.

证 先考虑对换的两个元素在排列中相邻.

$$a_1 \cdots a_l \; a \; b \; b_1 \cdots b_m$$

$$\Downarrow$$

$$a_1 \cdots a_l \; b \; a \; b_1 \cdots b_m$$

当 $a < b$ 时,

$r_a = t_a$

$r_b = t_b + 1$

$\boxed{r = t + 1}$

当 $a > b$ 时,

$\boxed{r = t - 1}$

二、n 元排列

【定理】排列中任意两个元素作对换，排列改变奇偶性.

证　再考虑一般情形.

$$a_1 \cdots a_l\ a\ b_1 \cdots b_m\ b\ c_1 \cdots c_n \xrightarrow{m\text{次相邻对换}} a_1 \cdots a_l\ a\ b\ b_1 \cdots b_m\ c_1 \cdots c_n$$

$$a_1 \cdots a_l\ a\ b\ b_1 \cdots b_m\ c_1 \cdots c_n \xrightarrow{m+1\text{次相邻对换}} a_1 \cdots a_l\ b\ b_1 \cdots b_m\ a\ c_1 \cdots c_n$$

$$a_1 \cdots a_l\ a\ b_1 \cdots b_m\ b\ c_1 \cdots c_n \xrightarrow{(a,\ b)} a_1 \cdots a_l\ b\ b_1 \cdots b_m\ a\ c_1 \cdots c_n$$

因为 $m+(m+1)=2m+1$ 是奇数，因此对换改变奇偶性.

【推论1】奇(偶)排列变成标准排列的对换次数为奇(偶)数.

【推论2】在全部n元排列中, 奇偶排列个数相等, 各有 $n!/2$ 个.

谢 谢！

第1.2节 行列式的定义

主讲人： 柳顺义

长安大学理学院

本节概要

- 行列式的概念来源于线性方程组的求解，它是线性代数的重要工具. 本节介绍行列式的定义.

一、二阶行列式

二、三阶行列式

三、行列式的几何意义

四、n 阶行列式

本节概要

- 行列式的概念来源于线性方程组的求解，它是线性代数的重要工具. 本节介绍行列式的定义.

一、二阶行列式

二、三阶行列式

三、行列式的几何意义

四、n 阶行列式

一、二阶行列式

1. 二元线性方程组及消元法

二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

由消元法，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，该方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

一、二阶行列式

2. 二阶行列式的定义

定义二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 称为元素.

i 为行标，表明元素位于第i行;

j 为列标，表明元素位于第j列.

主对角线

次对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(对角线法则) 二阶行列式等于其主对角线上两元素之积减去次对角线上两元素之积.

一、二阶行列式

3. 二阶行列式与二元线性方程组

$$\begin{cases} \boxed{a_{11}}x_1 + \boxed{a_{12}}x_2 = b_1 \\ \boxed{a_{21}}x_1 + \boxed{a_{22}}x_2 = b_2 \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时, 有唯一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

事实 利用二阶行列式给出了二元线性方程组的公式解.

本节概要

- 行列式的概念来源于线性方程组的求解，它是线性代数的重要工具. 本节介绍行列式的定义.

一、二阶行列式

二、三阶行列式

三、行列式的几何意义

四、n 阶行列式

二、三阶行列式

如何定义三阶行列式？

为什么要定义三阶行列式？

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

期望：当系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

方程组有唯一解： $x_1 = \dfrac{D_1}{D}, \quad x_2 = \dfrac{D_2}{D}, \quad x_3 = \dfrac{D_3}{D}.$

二、三阶行列式

1. 三元线性方程组及消元法

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$$

三元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$

令 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$

$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$ $\quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$

当 $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \neq 0$ 时，有

$$x_1 = \frac{b_1a_{22}a_{33} + b_2a_{13}a_{32} + b_3a_{12}a_{23} - b_1a_{23}a_{32} - b_2a_{12}a_{33} - b_3a_{13}a_{22}}{\boxed{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}}} = \frac{D_1}{D}$$

$$x_2 = \frac{b_1a_{23}a_{31} + b_2a_{11}a_{33} + b_3a_{13}a_{21} - b_1a_{21}a_{33} - b_2a_{13}a_{31} - b_3a_{11}a_{23}}{\boxed{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}}} = \frac{D_2}{D}$$

$$x_3 = \frac{b_1a_{21}a_{32} + b_2a_{12}a_{31} + b_3a_{11}a_{22} - b_1a_{22}a_{31} - b_2a_{11}a_{32} - b_3a_{12}a_{21}}{\boxed{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}}} = \frac{D_3}{D}$$

二、三阶行列式

2. 三阶行列式的定义

【定义】令

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

称其为**三阶行列式**.

主对角线

次对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

二阶行列式的对角线法则不适用于三阶行列式.

3. 三阶行列式的对角线法则

实线上的三个元素的乘积赋正号，
虚线上的三个元素的乘积赋负号.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

二、三阶行列式

3. 三阶行列式的对角线法则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

例 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -8.$

本节概要

- 行列式的概念来源于线性方程组的求解，它是线性代数的重要工具. 本节介绍行列式的定义.

一、二阶行列式

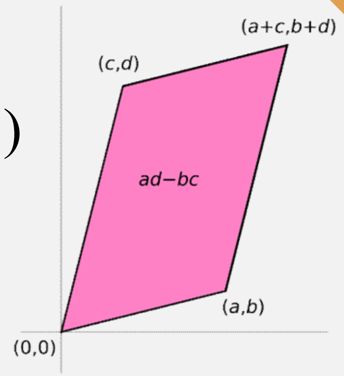
二、三阶行列式

三、行列式的几何意义

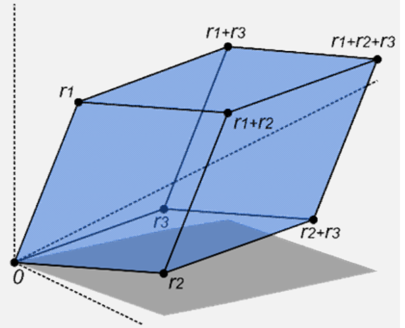
四、n 阶行列式

三、 行列式的几何意义

二阶行列式 $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ 的几何意义是以向量 $\alpha=(a,b),\ \beta=(c,d)$ 为邻边的平行四边形的有向面积.



三阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ 的几何意义是以向量 $r_1=(a_1,a_2,a_3)$, $r_2=(b_1,b_2,b_3)$, $r_3=(c_1,c_2,c_3)$ 为邻边的平行六面体的有向体积.



本节概要

- 行列式的概念来源于线性方程组的求解，它是线性代数的重要工具. 本节介绍行列式的定义.

一、二阶行列式

二、三阶行列式

三、行列式的几何意义

四、n 阶行列式

进一步的问题

提问：如何定义更高阶的行列式？

四阶、五阶、六阶、…

四、n 阶行列式

三阶行列式定义的进一步分析

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

偶排列 123　　231　　312

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

奇排列 132　　213　　321

$$= \sum_{p_1p_2p_3} (-1)^{\tau(p_1p_2p_3)} a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$$

关键之处

1. 每一项可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$（正负号除外），其中 $p_1p_2p_3$ 取遍所有3元排列.

2. 共$3! = 6$项，每一项都是位于不同行不同列的三个元素的乘积.

3. 符号由什么决定？

当 $p_1p_2p_3$是偶排列时，取正号；

当 $p_1p_2p_3$ 是奇排列时，取负号.

四、n 阶行列式

【定义】设有n^2个数 $a_{ij}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成一个 n 行 n 列的正方形阵列，在正方形阵列的两边用竖线括起来成为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

上式称为 **n 阶行列式 (Determinant)**，它表示一个数，其值为

$$\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

其中 $\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$ 表示求和取遍所有n元排列 $p_1p_2\cdots p_n$.

四、n 阶行列式

n 阶行列式定义的几点注记

1. n阶行列式等于其所有可能的取自不同行不同列的n个元素乘积的代数和(共$n!$项，其中一半项取正号，另一半项取负号).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

记作 $\det(a_{ij})_{n\times n}$ 或 $\det(a_{ij})$

2. 当 $n>3$ 时，不再有相应的对角线法则.

3. 一阶行列式与绝对值的区别.

四、n 阶行列式

例 计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

解 $D=\det(a_{ij})_{n\times n}=\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$

若某 $a_{ip_i}=0$, 则乘积项 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=0$.

所以行列式中不为零的项只有一项：$a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1,n}a_{n1}$.

又 $\tau(23\cdots n1)=n-1$，故 $D=(-1)^{n-1}n!$.

四、n 阶行列式

例 已知函数 $f(x)=\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$，求 x^4 和 x^3 的系数．　$2,-1$

思考：能否求出 x^2 的系数？

四、n 阶行列式

n 阶行列式定义的另一种形式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1 p_1} a_{2 p_2} \cdots a_{n p_n}$$

求和取遍所有n元排列$p_1 p_2 \cdots p_n$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{q_1 q_2 \cdots q_n} (-1)^{\tau(q_1 q_2 \cdots q_n)} a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}$$

求和取遍所有n元排列 $q_1 q_2 \cdots q_n$.

四、n 阶行列式

下三角行列式

(主对角线以上的元素都为0)

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

上三角行列式

(主对角线以下的元素都为0)

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

四、n 阶行列式

对角行列式

(不在主对角线上的元素都为0)

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

次对角行列式

(不在次对角线上的元素都为0)

$$D=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \vdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

谢 谢！

第1.3节 行列式的性质

主讲人： 柳顺义

长安大学理学院

问题引入

- 为什么要学习行列式的性质？

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & -8 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 & -\frac{5}{2} \end{vmatrix} = ? \qquad \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = ?$$

原因一：利用行列式的性质来简化行列式的计算.

原因二：行列式的性质在其理论研究中发挥着重要作用.

本节概要

- 本节介绍行列式的基本性质.

  一、行列式的性质

  二、利用行列式的性质计算行列式

本节概要

- 本节介绍行列式的基本性质.

一、行列式的性质

二、利用行列式的性质计算行列式

一、行列式的性质

行列式的转置

$$\text{记}\quad D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式 D^{T} 称为行列式 D 的**转置行列式**（transpose, 或记为 D' ）.

一、行列式的性质

【性质1】行列式与它的转置行列式相等.

证　若记 $D=\det(a_{ij}),\ D^{\mathrm{T}}=\det(b_{ij})$，则 $b_{ij}=a_{ji}$.

根据行列式的定义，有

$$D^{\mathrm{T}}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}$$

$$=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}=D$$

➢ 行列式中行与列具有同等的地位，凡是对行成立的性质，对列也成立，反之亦然.

一、行列式的性质

【性质2】互换行列式的两行(列), 行列式变号.

例如，$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -8$，则 $\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -(-8) = 8$.

【推论】如果行列式有两行(列)完全相同，则此行列式等于零.

证　互换相同的两行，有 $\boldsymbol{D} = -\boldsymbol{D}$，所以 $\boldsymbol{D} = \mathbf{0}$.

一、行列式的性质

【性质3】行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一个数 k，等于用数 k 乘以此行列式.

以三阶行列式为例.　　记 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$,

则 $D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$$
\begin{aligned}
&=a_{11}(ka_{22})a_{33}+a_{12}(ka_{23})a_{31}+a_{13}(ka_{21})a_{32} \\
&\quad -a_{11}(ka_{23})a_{32}-a_{12}(ka_{21})a_{33}-a_{13}(ka_{22})a_{31} \\
&=k(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\
&\qquad -a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}) \\
&=kD
\end{aligned}
$$

一、行列式的性质

【性质3】行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘以此行列式.

记 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，则 $D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=kD$.

【事实1】用数 k 去乘行列式 D 等于用 k 去乘行列式D的某一行(或某一列) 的所有元素.

$$kD=\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & ka_{33} \end{vmatrix}$$

一、行列式的性质

记 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，则 $D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=kD.$

【事实2】行列式的某一行(列)中所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

例 $$\begin{vmatrix} -8 & 4 & -6 \\ 2 & 1 & -1 \\ 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} -4 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}=2\times 2\begin{vmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 8 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

一、行列式的性质

【性质4】行列式中如果有两行(列)元素对应成比例，则此行列式为零.

以四阶行列式为例.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} & ka_{14} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{vmatrix} = k \cdot 0 = 0$$

一、行列式的性质

【性质5】若行列式D的某一行(列)的元素都是两数之和,

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则行列式 D 等于两个行列式之和, 即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

一、行列式的性质

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

例 计算 $D=\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 503 & 201 & 298 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 500+3 & 200+1 & 300-2 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 500 & 200 & 300 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}=0+\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}=-70$$

一、行列式的性质

【性质6】把行列式的某一行(列)的各元素乘以数 k 后加到另一行(列)对应的元素上去，行列式的值不变.

例如，以数 k 乘以第 j 行加到第 i 行，有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{j1} & ka_{j2} & \cdots & ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{0}$$

$$=D$$

一、行列式的性质

记号

- 用 $r_i\,(c_i)$ 表示行列式的第 i 行(列).
- 交换 i,j 两行(列)记作 $r_i \leftrightarrow r_j\,(c_i \leftrightarrow c_j)$.
- 第 i 行(列)乘以 k 记作 $r_i \times k\,(c_i \times k)$.
- 第 i 行(列)提出公因子 k 记作 $r_i \div k\,(c_i \div k)$.
- 以数 k 乘第 j 行(列)加到第 i 行(列)上记作 $r_i + kr_j\,(c_i + kc_j)$.

本节概要

- 本节介绍行列式的基本性质.

一、行列式的性质

二、利用行列式的性质计算行列式

二、利用行列式的性质计算行列式

如何计算行列式?

- 性质2、3、6介绍了行列式关于行和列的三种运算，即：

$$r_i \leftrightarrow r_j, r_i \div k, r_i + kr_j;\ c_i \leftrightarrow c_j, c_i \div k, c_i + kc_j$$

利用这些运算可以简化行列式的计算, 特别是利用运算 $r_i + kr_j$ (或 $c_i + kc_j$) 可以把行列式中<u>许多元素化为 0</u>.

- 计算行列式常用的一种方法就是利用运算 $r_i + kr_j$ 把行列式化为上三角形行列式，从而算得行列式的值.

二、利用行列式的性质计算行列式

例 计算 $D=\begin{vmatrix} -2 & 3 & -8 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 & -\frac{5}{2} \end{vmatrix} \xlongequal{r_4 \div 1/2} \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & 3 & -8 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 \\ -2 & 3 & -8 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & -5 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[r_4+(-1)r_1]{\substack{r_2+2r_1 \\ r_3+(-3)r_1}} -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -17 & 4 \\ 0 & 6 & -3 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal{\substack{r_3+7r_2 \\ r_4+6r_2}} -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 9 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4+3r_3} -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 34 \end{vmatrix}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)\times 1\times(-1)\times(-3)\times 34=-51.$$

二、利用行列式的性质计算行列式

例 计算 n 阶行列式 特征："行和相等"

$$D=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \xlongequal[c_1+c_n]{\substack{c_1+c_2\\ c_1+c_3\\ \cdots}} \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \xlongequal{c_1\div[a+(n-1)b]} [a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_n+(-1)r_1]{\substack{r_2+(-1)r_1\\ r_3+(-1)r_1\\ \cdots}} [a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

二、利用行列式的性质计算行列式

例　计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{\cdots \\ r_n+(-1)r_1}]{\substack{r_2+(-1)r_1 \\ r_3+(-1)r_1}} \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b-a & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ b-a & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b-a & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{\cdots \\ c_1+c_n}]{\substack{c_1+c_2 \\ c_1+c_3}} \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} = \left[a+(n-1)b\right](a-b)^{n-1}.$$

二、利用行列式的性质计算行列式

例　计算 $\boldsymbol{n}$ 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&2&0&\cdots&0\\1&0&3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}\xlongequal[c_1+\left(-\frac{1}{n}\right)c_n]{\substack{c_1+\left(-\frac{1}{2}\right)c_2\\c_1+\left(-\frac{1}{3}\right)c_3\\\cdots}}\begin{vmatrix}1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{n}&1&1&\cdots&1\\0&2&0&\cdots&0\\0&0&3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}=n!\left(1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}\right)$$

二、利用行列式的性质计算行列式

反对称行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & -3 \\ -2 & -5 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

- 主对角线元素全为0.
- 关于主对角线对称位置上的两个元素互为相反数.

若n 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$ 满足:

$$a_{ij}=-a_{ji}\quad (i,j=1,2,\ldots,n)$$

则称 D 为**反对称行列式**, 即

$$D=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

事实 奇数阶反对称行列式等于0.

谢 谢！

第1.4节 行列式按行(列)展开

主讲人： 柳顺义

长安大学理学院

问题引入

问题：高阶行列式能否用低阶行列式表示？

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right) + a_{12}\left(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}\right) + a_{13}\left(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\right)$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

一般地，n 阶行列式可否用 $n-1$ 阶行列式表示?

本节概要

- 本节介绍行列式按一行或一列展开公式（“降阶”公式）.

一、余子式与代数余子式

二、行列式按行(列)展开法则

三、范德蒙德行列式

四、行列式的一条性质

本节概要

- 本节介绍行列式按一行或一列展开公式（“降阶”公式）.

一、余子式与代数余子式

二、行列式按行(列)展开法则

三、范德蒙德行列式

四、行列式的一条性质

一、余子式与代数余子式

【定义】在n阶行列式 $D=\det(a_{ij})$ 中，划去元素 a_{ij} 所在的第i行与第j列，剩下的元素按原来的位置排列构成的 $n-1$ 阶行列式，称为元素 a_{ij} 的**余子式**, 记为M_{ij} .

把 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的**代数余子式**, 记为 A_{ij} .

例如

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

元素a_{23}的余子式为: $M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$

元素a_{23}的代数余子式为:

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-M_{23}$$

本节概要

- 本节介绍行列式按一行或一列展开公式（“降阶”公式）.

一、余子式与代数余子式

二、行列式按行(列)展开法则

三、范德蒙德行列式

四、行列式的一条性质

二、行列式按行(列)展开法则

【引理】一个n阶行列式，如果其中第i行所有元素除a_{ij}外都为零，那么这行列式等于a_{ij}与它的代数余子式的乘积，即$D = a_{ij}A_{ij}$.

证明 略

例

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{32}A_{32} = a_{32}(-1)^{3+2}M_{32} = -a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

二、行列式按行(列)展开法则

【定理1】 $\boldsymbol{n}$ 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$ 等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad(j=1,2,\cdots,n).$$

- 这个定理叫做**行列式按行(列)展开法则**. 行列式按行按列展开法则主要在于“降阶”.
- 利用此定理，结合行列式的性质，可以简化行列式的计算.

二、行列式按行(列)展开法则

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in},$$

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}.$$

例 计算 $D = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 & 0 \\ 7 & 5 & 2 & 5 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 7 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$.

$$= 0A_{15} + 2A_{25} + 0A_{35} + 0A_{45} + 0A_{55}$$

$$= 2A_{25} = 2\times(-1)^{2+5}\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & 7 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = (-2)\times 4\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -4 & 7 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 96.$$

- 注意：只有当行列式某行(列)中含有较多的零时，按此行(列)展开才能达到有效化简的目的.

二、行列式按行(列)展开法则

$$D=\det(a_{ij})=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

证

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+\cdots+0 & \cdots & 0+0+\cdots+0+a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(由引理) $=a_{i1}A'_{i1}+a_{i2}A'_{i2}+\cdots+a_{in}A'_{in}$

$$=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$$

本节概要

➢ 本节介绍行列式按一行或一列展开公式（“降阶”公式）.

一、余子式与代数余子式

二、行列式按行(列)展开法则

三、范德蒙德行列式

四、行列式的一条性质

三、范德蒙德行列式

范德蒙德(Vandermonde)行列式

按升幂排列，幂指数成等差数列

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i) \begin{aligned}[t] &=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1) \\ &\quad\cdot(x_3-x_2)\cdots(x_n-x_2) \\ &\quad\cdots \\ &\quad\cdot(x_n-x_{n-1}) \end{aligned}$$

连乘号

$\prod\limits_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$ 表示满足条件 $1\le i<j\le n$ 的所有因子 (x_j-x_i) 相乘.

三、范德蒙德行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)$$

$$\cdot(x_3-x_2)\cdots(x_n-x_2)$$

$$\cdots$$

$$\cdot(x_n-x_{n-1})$$

例 $$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 9 & 16\\ 8 & 1 & 27 & 64\end{vmatrix}=(1-2)(3-2)(4-2)(3-1)(4-1)(4-3)=-12$$

三、范德蒙德行列式

证 (数学归纳法)

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 = \prod_{1 \le i < j \le 2} (x_j - x_i) \quad \text{所以 } n = 2 \text{ 时成立.}$$

设对于$n-1$阶范德蒙行列式结论成立. 对于n阶范德蒙德行列式，从第n行开始，后行减去前行的x_1倍(自己验证)：

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

按第1列展开，并提出每列的公因子$(x_i - x_1)$，有

三、范德蒙德行列式

证 (数学归纳法)

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&x_2-x_1&x_3-x_1&\cdots&x_n-x_1\\0&x_2(x_2-x_1)&x_3(x_3-x_1)&\cdots&x_n(x_n-x_1)\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&x_2^{n-2}(x_2-x_1)&x_3^{n-2}(x_3-x_1)&\cdots&x_n^{n-2}(x_n-x_1)\end{vmatrix}$$

$$=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_2&x_3&\cdots&x_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_2^{n-2}&x_3^{n-2}&\cdots&x_n^{n-2}\end{vmatrix}$$

***n*-1**阶范德蒙德行列式

归纳假设

$$=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\prod_{2\le i<j\le n}(x_j-x_i)=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i).$$

三、范德蒙德行列式

- 对于范德蒙德行列式，我们的任务就是利用它计算行列式，因此要牢记范德蒙德行列式的形式和结果.

练习 $$D=\begin{vmatrix} (a-1)^3 & (a-2)^3 & (a-3)^3 & (a-4)^3 \\ (a-1)^2 & (a-2)^2 & (a-3)^2 & (a-4)^2 \\ a-1 & a-2 & a-3 & a-4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=12$$

本节概要

- 本节介绍行列式按一行或一列展开公式（“降阶”公式）.

  一、余子式与代数余子式

  二、行列式按行(列)展开法则

  三、范德蒙德行列式

  四、行列式的一条性质

四、行列式的一条性质

【定理2】 行列式任一行 (列) 的元素与另一行 (列) 的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\quad i\neq j.$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0,\quad i\neq j.$$

例 设 $D=\begin{vmatrix} \boxed{1 & 2 & 1 & 4} \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ \boxed{1 & 0 & 1 & 3} \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$，则 $1\cdot A_{31}+2\cdot A_{32}+1\cdot A_{33}+4\cdot A_{34}=0$

四、行列式的一条性质

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\quad i\neq j.$$

证

设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，令 $D_1=\begin{array}{l} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \\ \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \\ \end{array}=0$

$$\overset{(r_j)}{=}a_{i1}A'_{i1}+a_{i2}A'_{i2}+\cdots+a_{in}A'_{in}$$

$$=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}.$$

小结

对于 n 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$，由定理1、2，有

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases} D, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases} D, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$$

例题

例 证明

$$
\left|\begin{array}{ccc|ccc}
a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \mathbf{0} & \vdots \\
a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
c_{r1} & \cdots & c_{rk} & b_{r1} & \cdots & b_{rr}
\end{array}\right|
=
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1k} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{k1} & \cdots & a_{kk}
\end{vmatrix}
\cdot
\begin{vmatrix}
b_{11} & \cdots & b_{1r} \\
\vdots & & \vdots \\
b_{r1} & \cdots & b_{rr}
\end{vmatrix}
$$

例题

例 设 $D=\begin{vmatrix}1&2&1&4\\0&-1&2&1\\1&0&1&3\\0&1&3&1\end{vmatrix}$，求 $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}$ 及 $M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}$.

解 构造行列式

$$D_1=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&-1&2&1\\1&0&1&3\\0&1&3&1\end{vmatrix}.$$

易见 D_1 与 D 的第一行对应元素的代数余子式相等.

将 D_1 按照第一行展开，得

$$D_1=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&-1&2&1\\1&0&1&3\\0&1&3&1\end{vmatrix}$$

$$=1\cdot A'_{11}+1\cdot A'_{12}+1\cdot A'_{13}+1\cdot A'_{14}$$

$$=A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}$$

例题

例 设 $D=\begin{vmatrix}1&2&1&4\\0&-1&2&1\\1&0&1&3\\0&1&3&1\end{vmatrix}$，求 $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}$ 及 $M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}$.

解 构造行列式

$$D_2=\begin{vmatrix}1&2&1&4\\-1&-1&2&1\\1&0&1&3\\-1&1&3&1\end{vmatrix}.$$

易见 D_2 与 D 的第一列对应元素的代数余子式相等.

将 D_2 按照第一列展开，得

$$D_2=\begin{vmatrix}1&2&1&4\\-1&-1&2&1\\1&0&1&3\\-1&1&3&1\end{vmatrix}.$$

$$=1\cdot A'_{11}+(-1)\cdot A'_{21}+1\cdot A'_{31}+(-1)\cdot A'_{41}$$

$$=1\cdot A_{11}+(-1)\cdot A_{21}+1\cdot A_{31}+(-1)\cdot A_{41}$$

$$=M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}$$

行列式计算的常用方法

1. 定义法 （主要适用于阶数较低的行列式或者零元素较多的行列式）；
2. 化为三角形行列式 （主要适用于元素都是具体数字或字母元素很有规律的行列式）；
3. 降阶法 （利用行列式的性质使某行或某列零元素增多，再按零元素较多的行或列展开）；
4. 加边法 （给行列式增加一行一列，并保持行列式的值不变，加边后要便于使用行列式的性质化简行列式）；
5. 拆项法 （将行列式的某行或某列的每个元素都写成两个数之和，利用行列式的性质将行列式拆成两个行列式的和）；
6. 递推公式法 （按某行或某列展开得到递推公式）；
7. 数学归纳法 （从低阶到高阶找规律猜结果，并用归纳法证明）.

谢 谢！

第1.6节 克拉默(Cramer)法则

主讲人： 柳顺义

长安大学理学院

本节概要

- 本节研究行列式在线性方程组求解中的应用.
- 本节只讨论方程个数与未知量个数相等的线性方程组.

一、克拉默法则(**1750** 年)

二、克拉默法则的一个应用

G. Cramer (1704-1752, Swiss)

本节概要

- 本节研究行列式在线性方程组求解中的应用.
- 本节只讨论方程个数与未知量个数相等的线性方程组.

一、克拉默法则(**1750**年)

二、克拉默法则的一个应用

G. Cramer (1704-1752, Swiss)

一、克拉默法则

【定理】如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \qquad (1)$$

的系数行列式不等于0，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

则线性方程组(1)有解且解唯一：

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}, \qquad (2)$$

其中 D_j 是把系数行列式 D 中第 j 列的元素用方程组右端的常数项代替后所得到的 n 阶行列式，即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

一、克拉默法则

用克拉默法则解线性方程组必须同时满足：

- 方程的个数与未知量的个数相等
- 方程组系数行列式不等于 **0**

定理有三个结论：

- 方程组有解 **(**解的存在性**)**
- 解是唯一的 **(**解的唯一性**)**
- 解可以由公式**(2)**给出：$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}$

一、克拉默法则

例 解线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$

解 $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 27 \neq 0,$ 由 **Cramer** 法则，方程组有唯一解.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 81 \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix} = -108 \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -27 \quad D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix} = 27$$

则 $x_1 = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{81}{27} = 3, \quad x_2 = \dfrac{D_2}{D} = \dfrac{-108}{27} = -4, \quad x_3 = \dfrac{D_3}{D} = \dfrac{-27}{27} = -1, \quad x_4 = \dfrac{D_4}{D} = \dfrac{27}{27} = 1.$

一、克拉默法则

克拉默法则的两点注记

- 用克拉默法则解n元线性方程组时，需要计算$n+1$个n阶行列式，计算量相当大，所以在实际求解线性方程组时很少使用克拉默法则.

- 克拉默法则的意义在于建立了线性方程组的解与系数及常数项之间的关系．它主要适用于理论推导.

本节概要

- 本节研究行列式在线性方程组求解中的应用.
- 本节只讨论方程个数与未知量个数相等的线性方程组.

一、克拉默法则(**1750** 年)

二、克拉默法则的一个应用

G. Cramer (1704-1752, Swiss)

二、克拉默法则的一个应用

如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \quad (1)$$

的常数项 $b_1,\cdots,b_n$ 不全为零，则称(1)为**非齐次线性方程组**.
否则，称为**齐次线性方程组**，即

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases} \quad (3)$$

二、克拉默法则的一个应用

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\
\cdots\cdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0.
\end{cases}
\qquad (3)
$$

问题1：齐次线性方程组是否一定有解？

齐次线性方程组总有解，因为零解是它的一个解, 即 $(0,0,\cdots,0)$.

问题2：齐次线性方程组(3)什么时候有非零解？

【定理】 如果齐次线性方程组(3)有非零解，则它的系数行列式等于零.

二、克拉默法则的一个应用

例 问 λ 取何值时，下列齐次线性方程组有非零解

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + (3-\lambda)x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0, \end{cases}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 4 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-2)(\lambda-3)$$

齐次线性方程组有非零解当且仅当 $D=0$.

所以 $\lambda = 0, 2, 3$ 时齐次方程组有非零解.

第一章 内容拓展

主讲人： 柳顺义

长安大学理学院

本节概要

一、行列式的等价定义

二、行列式的历史简介

三、行列式与积和式

本节概要

一、行列式的等价定义

二、行列式的历史简介

三、行列式与积和式

一、行列式的等价定义

定义1（Leibniz formula）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\triangleq \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

定义2（递归定义）

当 $n=1$ 时，定义一阶行列式

$$|a_{11}| = a_{11}.$$

假设 $n-1$ 阶行列式已定义，则定义 n 阶行列式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\triangleq a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}.$$

本节概要

一、行列式的等价定义

二、行列式的历史简介

三、行列式与积和式

二、行列式的历史简介

- A *determinant* was originally defined as a property of a system of linear equations. The determinant "determines" whether the system has a unique solution (which occurs precisely if the determinant is non-zero).
- In this sense, determinants were first used in the Chinese mathematics textbook The Nine Chapters on the Mathematical Art (九章算術, Chinese scholars, around the 3rd century BCE).
- In Europe, solutions of linear systems of two equations were expressed by Cardano in 1545 by a determinant-like entity.

以上内容摘自：https://en.wikipedia.org/wiki/Determinant

二、行列式的历史简介(续)

- 1683年，日本数学家关孝和在其著作《解伏题之法》中首次引进了行列式的概念，书中出现了2×2、3×3乃至5×5的行列式.

- 1693年，德国数学家莱布尼茨开始使用指标数的系统集合来表示有三个方程的三元线性方程组的系数. 他从三个方程的方程组中消去了两个未知量后得到一个行列式，这个行列式不等于零，就意味着有一组解同时满足三个方程.

- 1750年，瑞士数学家克拉默在其著作《线性代数分析导言》中给出解线性方程组的克拉默法则.

二、行列式的历史简介(续)

- **1771**年，法国数学家范德蒙德在其论著中第一个将行列式和解方程理论分离，对行列式单独作出阐述. 这是数学家们开始对行列式本身进行研究的开端.

- **1772**年，法国数学家拉普拉斯在论文《对积分和世界体系的探讨》中证明了范德蒙德的一些规则，并推广了范德蒙德的用二阶子式和它们的余子式展开行列式的法则.

- **1812**年，法国数学家柯西首先将“determinant”一词用来表示十八世纪出现的行列式，柯西也是最早将行列式排成方阵并将其元素用双重下标表示的数学家（两条竖线画在一个方阵的左右两侧来表示行列式是英国数学家凯莱在1841年最先使用的）

- Gauss, Binet, Jacobi, Sylvester, Cayley, …

本节概要

一、行列式的等价定义

二、行列式的历史简介

三、行列式与积和式

三、行列式与积和式

行列式 (Determinant)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n} \boxed{(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

积和式 (Permanent)

$$\operatorname{per}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

- 建议：不要拘泥于教材，敢于质疑，<u>探究式学习</u>.

谢 谢！