对象,矩阵已经不是数,而是由一些数排成的一张表,但是矩阵可以象数那样进行运算。矩阵的运算有,加法、数量乘法、乘法等。矩阵由于可以进行运算,因此它的用途就很广,特别是矩阵的乘法很独特,矩阵的应用很多就是由于矩阵的乘法而来的。矩阵除了可以进行运算外,还可以进行一些交换变成较简单的矩阵,根据不同的问题的需要,对矩阵将进行不同的变换。矩阵的变换,有初等变换、合同变换、相似变换等。矩阵由于可以进行运算和交换,使得矩阵成为一个强有力的数学工具,希望同志们象熟练掌握微积分那样地熟练掌握矩阵。

在解析几何中,平面上二次曲线的一般方程是

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0 \quad (5)$$

为了便于研究这条二次曲线的性质,需要作坐标交换,把方程(5)化成标准方程。如果方程(5)中没有交叉项(即 xy 项),那么只需要进行配方,然后作移轴就可化成标准方程了,于是关键在于如何消去交叉项,而这实质就是要把

$$ax^2+2bxy+cy^2 \quad (6)$$

化成平方和

$$a'x'^2+c'y'^2 \quad (7)$$

的形式。(6)式是 x 和 y 的二次齐次多项式,简称为 x, y 的二次齐式或二次型。于是把二次曲线的方程(5)化成标准方程的关键是要把二次型(6)化成平方和(7)的形式。因此二次曲线的问题提出需要研究二次型。此外,数学的其它分支以及物理、力学中也常常会碰到二次型。在研究二次型时,矩阵是一个有力的工具。

在解析几何中研究了向量。我们知道向量可以进行运算,有加法、数量乘法运算等。并满足加法交换律等八条运算规律(以下简称八条规律)。

在研究线性方程组时,一个线性方程 $a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n=b$ 可以用有序数组 $(a_1, a_2, \dots, a_n, b)$ 表示,这种有序数组也称为

向量。一个 n 元有序数组 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 称为一个 n 维向量。 n 维向量之间也可以规定加法和数量乘法两种运算,这两种运算同样满足八条规律。矩阵也有加法、数量乘法,并且这两种运算也满足八条规律。象向量、矩阵这些对象已经不是数,但是它们都有加法、数量乘法这两种运算(加法、数量乘法称为线性运算),并且满足加法交换律等八条规律。这样的一些对象很多,譬如,多项式,连续函数等也都具有加法、数量乘法两种运算,且满足八条规律。代数是研究运算的,线性代数就是研究具有加法、数量乘法这两种线性运算的集合。象向量组成的集合、矩阵组成的集合,都是具有两种线性运算,且满足八条规律的集合,这样的集合就称为线性空间。线性空间是线性代数研究的最基本的对象。解析几何里,全体向量组成的集合就是一个线性空间,我们都知道,若取定了三个不共面的向量 e_1, e_2, e_3 ,则空间中任何一个向量 a 都可以表示成 e_1, e_2, e_3 的线性组合

$$a=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3.$$

这说明通过三个不共面的向量 e_1, e_2, e_3 就能表示出空间中的全部向量,于是称这空间是三维的,并且称这三个不共面的向量 e_1, e_2, e_3 是这空间的一组基。维数和基的概念可以推广到抽象的线性空间中。

线性空间是某一类事物从量的方面的一个抽象。我们认识客观事物,固然要弄清它们单个的和总体的性质,但是更重要的是研究它们之间的各种各样的联系。在线性空间中,事物之间的联系就反映为线性空间的映射。线性空间 V 到自身的映射通常称为 V 的一个变换。其中最简单的一种变换是线性变换,即保持线性运算的变换

$$A(\alpha+\beta)=A(\alpha)+A(\beta), \quad (8)$$

$$A(k\alpha)=kA(\alpha).$$

譬如在几何空间中,关于平面 π 的投影就是一个线性变换。这是因为,若向量 α 的投影是 α' ,向量 β 的投影是 β' ,则易看出 $\alpha+\beta$ 的

投影是 $\alpha' + \beta'$ 。这表明投影是保持向量加法的；同样容易看出 $k\alpha$ 的投影是 $k\alpha'$ ，这表明投影是保持数量乘法的。

线性变换是线性代数的重要研究对象。线性变换与矩阵有着非常密切的联系，在线性空间中若取定了一组基，则一个线性变换可以对应到一个矩阵，这个对应是一一对应，并且这个对应是保持运算的。因此矩阵的好些问题可以通过研究线性交换来解决，而线性交换的好些问题又可以利用矩阵的工具来解决，它们互相渗透，密切相连。

以上所述的线性方程组、矩阵、二次型、线性空间和线性变换就是线性代数研究的主要对象。由于电大线性代数这门课程的学时比较少，我们就不讲抽象的线性空间了，而讲具体的 n 维向量空间；也不讲线性变换的概念了，而把线性变换的主要问题用矩阵的语言来讲。在这里顺便指出，高等代数是包括线性代数和多项式理论这两部份内容的。而我们仅学习线性代数这部分内容。

学习线性代数的用处

由于线性代数研究的是具有加法和数量乘法这两种运算的集合，而具有这两种线性运算的对象是很多的，因此线性代数的内容有广泛的应用。

线性方程组是最简单的方程组，在数学的各个分支、物理以及工程技术实际问题中大量遇到线性方程组。因此给了一个线性方程组，它有没有解？若有解，如何求解？这都是必须明确的问题，以便于我们在数学的各个分支以及实际工作中能正确而迅速的解决所遇到的线性方程组的问题。

矩阵是非常重要的数学工具，许多数学问题、实际问题都可引出矩阵，并且可以通过对矩阵进行运算或变换得到解决。例如在微分方程中，要解微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1 + 4y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1 + y_2. \end{cases} \quad (9)$$

其中 y_1, y_2 是未知函数。(9)式右边的系数可以排成一个矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

如果记 $\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \frac{dy_2}{dx} \end{pmatrix}$ ，则利用矩阵的乘法可

以把(9)式写成

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

作未知函数的线性替换

$$\begin{cases} y_1 = t_{11}z_1 + t_{12}z_2, \\ y_2 = t_{21}z_1 + t_{22}z_2. \end{cases} \quad (11)$$

(11)式也可利用矩阵的乘法写成

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

记 $T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$ ，将(12)式代入(10)式得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(T \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right) &= AT \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \\ T \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} &= AT \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (13)$$

即

在(13)式两边左乘 T^{-1} (T 的逆矩阵)，得

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = T^{-1}AT \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad (14)$$

如果能选择矩阵 T ，使得 $T^{-1}AT$ 成为对角矩阵

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$$

那么(14)式变成

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad (15)$$

利用矩阵的乘法(15)式就成为

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dx} &= a_1 z_1, \\ \frac{dz_2}{dx} &= a_2 z_2. \end{aligned} \quad (16)$$

显然，微分方程组(16)是很容易求解的。这个例子说明，通过矩阵的运算和矩阵的变换

可以把一个复杂的问题变成一个较简单的问题,所以矩阵是一个很有用的工具。

二次型理论的首先一个应用是解决了二次曲线,特别是二次曲面的分类问题。其次系数是实数的二次型的正定、负定、不定性被用在数学分析中解决多元函数的极大值、极小值问题。二次型理论在概率论与数理统计以及物理、力学中也有重要应用。

值得指出的是,我们学习线性代数,除了线性代数的内容有广泛的应用以外,还在于线性代数这门学科考虑问题、解决问题的思想方法对我们有很大的帮助。譬如,代数学总是要对所研究的对象进行分类,在每类中取一个最简单的对象作为代表来进行研究。关于这点,举一个例子,两个 n 级矩阵(n 行, n 列的矩阵) A 、 B 称为相似,如果存在一个可逆矩阵 T ,使得

$$B=T^{-1}AT.$$

于是按照相似这个关系,全体 n 级矩阵就被分成好多类,每一类里的矩阵是彼此相似的,自然会问:在每一类里能否找到一个最简单的矩阵作为代表?上面提到的微分方程组的例子中,关于选择 T ,使得 $T^{-1}AT$ 成为对角矩阵,就是这里所说的问题。这个问题在第五章矩阵的标准形中将得到解决。代数学的上述这种研究问题的方法对我们解决其它数学分支中的问题以至于实际中的一些问题都是可取的。又譬如在代数学里,经常要在某一类对象里找出具有某一特定性质的特殊对象,举一个例:什么样的 n 级矩阵是可逆矩阵?在解决这种问题时,总是先考虑如果矩阵 A 是可逆矩阵,那末它将具有哪些性质;然后再考虑具有这些性质的矩阵是否一定是可逆矩阵。这种考虑问题的方法是:先缩小范围,然后在这缩小了的范围内来审查这些对象是否都是具有某一特定性质的对象。这种考虑问题的方法也是可取的。象这种在学习一门课程的时候,除了学习这门课程的内容外,还注意学习这门学科考虑问题的一些方法是很有必要的。这样我们学到的就不仅是

一些现成的结论,而且有考虑问题、解决问题的一些方法。

线性代数的特点

代数学研究问题的基本方法是,先从某些具有公共性质的对象抽象出它们最基本的几条性质作为定义,然后从这定义出发进行逻辑推理,揭示出这类对象的新的性质。譬如线性空间这一概念就是这样抽象出来的,把具有加法和数量乘法这两种运算,并且满足八条规律作为线性空间的定义,然后从线性空间的定义出发进行逻辑推理,揭示出线性空间的许多性质,这些性质由于是只用到线性空间的定义进行逻辑推理得到的,并没有用到线性空间里的元素的具体特性。因此这样推导出来的性质就对所有的线性空间都适用,不管是几何空间, n 维向量空间,还是矩阵组成的空间,连续函数组成的空间,都具有这些性质。可见这种方法的好处在于它能使应用非常广泛。代数学的这种研究问题的方法称为公理化的方法或抽象的方法,这种公理化的方法使得线性代数具有如下两个特点:

第一、概念多而且抽象。譬如在第三章线性方程组中,将遇到向量组的线性相关、线性无关,等价的向量组,向量组的极大无关组,向量组的秩,矩阵的秩等一系列概念,而且这些概念都是比较抽象。概念上的高度抽象性是近代数学的特点之一。由此而来的则是应用上的极其广泛性,这也是近代数学的一个特点。在线性代数中,由线性方程组抽象出 n 维向量和矩阵这两个概念,又从 n 维向量空间抽象出线性空间的概念,一次比一次抽象。抽象的东西不如具体的东西好学,但是抽象的东西比具体的东西应用要广,所以还是需要认真下功夫把它学好。

第二、逻辑性强。由于代数学的基本方法是由具体事物抽象出一般概念,再运用这些概念逻辑推理揭示出事物的新的性质。因此线性代数这门课程逻辑性强,一环扣一环。

第三、明显的几何背景。这在前面介绍线性代数的内容时已多次提到。这个特点使我们在学习线性代数里的抽象的概念时，可以借助几何直观来帮助我们理解这些概念，应该充分利用这一特点。

学习线性代数的方法

根据线性代数的上述特点，我们在学习线性代数时应当注意以下几方面。

第一、要把概念弄清楚，理解确切并且记住。如果概念不清楚，模模糊糊，那就没有办法运用概念去进行逻辑推理，做题时就不知如何下手。因此在学习中，应当首先复习概念、定理，弄明白了，然后再开始做作业。表面上看起来，似乎比一开始就做作业要慢，实际上，先复习概念，定理，例题，然后再做作业，可以使作业做得比较顺利，反倒省时间。更何况，我们如果没有弄清楚概念，那么只会做跟例题差不多的题，稍灵活一些，变换一下题目，就不会做了。所以希望同学们务必先复习概念、定理、例题，然后再做作业。由于线性代数逻辑性强，后面的内容需要用到前面的好些概念、定理，如果每次课，没有及时复习、消化，那么时间越长，学的概念、定理越多，脑子里就会堆着一大堆模模糊糊的东西，这样学起后面的内容就很吃力。而如果每次课后，都能及时复习、及时消化，就会越学越顺利。那末怎样才能把概念弄清楚呢？一般来说应当从以下这几方面着手：

① 先要弄清楚这个概念是怎么提出来的？它的背景是什么？

② 这个概念的确切内容是什么？

③ 多举一些具体的例子来帮助理解抽象的概念，特别是举一些几何上的例子比较直观、形象。

譬如，向量组线性相关、线性无关这个概念，它是怎样提出来的呢？为什么要学习这个概念呢？这是因为我们要研究线性方程组什么时候有解。由于每个线性方程可用一个向量表示，于是线性方程组是否有解必然

是跟表示这些方程的一组向量是怎么样的向量组有关系。从几何上看，两个向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 组成的向量组有两种可能，即 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 共线，或者 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 不共线。前一情形， $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 在一条直线上，我们称向量组 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 线性相关；后一情形， $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 不在一条直线上，我们称 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 组成的向量组线性无关。为了能把线性相关、线性无关的概念推广到 n 维向量空间中，需要对几何上的向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 共线在代数上如何表示加以分析。在解析几何里知道， $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 共线的充分必要条件是其中一个向量是另一个向量的倍数。即 $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$ 或者 $\mathbf{b} = \mu \mathbf{a}$ ，其中 λ, μ 是实数，也就是 $1 \cdot \mathbf{a} - \lambda \mathbf{b} = 0$ 或者 $\mu \mathbf{a} - 1 \cdot \mathbf{b} = 0$ 。换言之，存在不全为 0 的数 k_1, k_2 ，使得 $k_1 \mathbf{a} + k_2 \mathbf{b} = 0$ 。从这几何背景，引出向量组线性相关的定义：向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s (s \geq 1)$ 称为线性相关，如果存在一组不全为 0 的数 $k_1, k_2, \dots, k_s$ ，使得

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_s \alpha_s = 0.$$

在理解这个定义时，要注意“不全为 0”这几个字。因为对于任何向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 来说，都有

$$0 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + \dots + 0 \cdot \alpha_s = 0,$$

所以如果在线性相关的定义中不添上“不全为 0”的限制，那末就毫无意义了。何况从几何背景上我们知道， $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 共线的充分必要条件是存在不全为 0 的数 k_1, k_2 ，使得 $k_1 \mathbf{a} + k_2 \mathbf{b} = 0$ ，所以只有当向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ ，存在不全为 0 的数 $k_1, k_2, \dots, k_s$ 使得 (17) 式成立时，才是线性相关。一个向量组不线性相关就称这个向量组线性无关。例如，几何上两个向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 若不共线，就称向量组 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 线性无关。既然向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 不线性相关，就称为线性无关，因此向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 线性无关的定义又可如下叙述：

向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 称为线性无关，如果从

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_s \alpha_s = 0$$

可以推出 $k_1 = k_2 = \dots = k_s = 0$ 。

这就是说，对于向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ ，如果只有一组全为 0 的数，使得 (17) 式成立，则称向

量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性无关。

为了更好地把握住向量的线性无关的定义,我们在学习中,还应该多通过一些具体的例子去深入体会。

第二、要努力培养逻辑推理的能力,即运用概念和已知的定理、性质进行推理、判断的能力。为此,形式逻辑的一些基本常识是应当熟悉的。譬如,命题有四种形式:原命题,逆命题,否命题,逆否命题。若原命题正确,则逆否命题一定正确,但是逆命题和否命题不一定正确。

要能进行逻辑推理,就必须熟记概念和定理、性质,否则就没有武器,遇到一个题就不知道如何下手。

第三,学习每一章、每一节时,都要明确这章、这节要研究什么问题,是如何解决的。这样做,学习中头脑就是清醒的;如果不这样做,就会稀里糊涂,不知道现在在干什么。在学习一个定理时也要这样,要明确为什么要有这个定理?这个定理是如何证明的?主要是抓住证明的思路,弄清是怎样去证明的。如果坚持这么做了,就能不断学到一些方法,就能提高分析问题、解决问题的能力。

第四、学习线性代数跟学习任何一门数

学课一样,必须适当多做一些习题。光听课、光看书,自己不动手做题,那是学不好数学的。只有通过做题,才能加深对概念、定理的理解,才能学到一些方法。做习题时,一定要自己动脑子想,不要轻易翻习题解答,只有当想了很久确实想不出来时,才翻一下习题解答,稍微看一、两眼,得到一点提示就可不看了,自己再去想。只有自己动脑子做出来的题才是真的会了,如果是自己动脑子不够,轻易就看习题解答,那么很快就会忘的。做完题要注意小结,看看这样一类问题应当如何下手?千万不要任务观点,赶紧做完作业就放到一边。应当想一想,通过做这几个题有什么收获,学到什么方法。这样日积月累,能力就逐渐提高了。还要指出一点,做计算题时要算到底,不要因为算起来较麻烦就不愿意往下算了,认为反正我方法会了。这样下去是不行的。其实算得对算得快,这也是需要培养的一种能力,不在平时做作业时训练,就会在今后实际工作中算题时尽出错。

线性代数概念较多,也比较抽象一点,但是只要我们下决心,并且注意学习方法,是能够学好的。

(上接7页)定律的适用条件、范围学得不够细致等,需要进一步提高。教学大纲规定了18个实验项目,要求各地必做其中的5个,比普通高等学校大纲规定的少。北京电大去年5月统计,84%的学生已做了实验(共开出10~12个项目)。

电视大学的教学质量,一开始就为有关领导部门所关心,为社会上各方面所注目,为电大各级领导、教师和学生所重视。集中起来有一句话:“教学质量是电大的生命线。”这是电大不断提高教学质量的良好思想基础,加上各种适当的措施和教学管理制度,我们有理由相信电大的教学质量是可以得到基本保证的。

分析教学质量,要有辩证的观点,要有实事求是的科学态度。广播电视大学刚刚诞生,还处在幼年时期。看电大的教学质量,要从这个客观实际出发,看本质,看主流,看基本方面。电视大学的教学质量虽然还有不少问题,但我们相信,随着教学条件的进一步改善,各教学环节的进一步完善,它的教学质量定能不断地提高。