第二章 矩阵及其运算

主讲人： 柳顺义

长安大学理学院

本章概要

➢ 矩阵是研究和处理线性问题的重要工具，是线性代数的一个主要研究对象. 矩阵有着极其广泛的应用.

矩阵及其运算

- 2.1 矩阵的引入
- 2.2 矩阵的运算
- 2.3 逆矩阵
- 2.4 矩阵的分块运算
- 2.5 矩阵的初等变换与初等矩阵
- 2.6 矩阵的秩
- 2.7 线性方程组的消元法

本章概要

➢ 矩阵在经济学中的核心应用：

应用领域	核心矩阵	解决的问题	经济学意义
投入产出分析	列昂惕夫逆矩阵 $(I - A)^{-1}$	部门间生产的相互依存关系	分析经济结构，预测政
计量经济学	设计矩阵 X，系数解 $(X'X)^{-1}X'y$	多变量因果关系的实证估计	进行严谨的实证研究，
一般均衡理论	状态空间矩阵 A, B, C, D	多市场在不确定环境下的动态交互	构建宏观经济模型，评
投资组合理论	方差-协方差矩阵 Σ	资产配置与风险管理	实现分散化投资，优化

总而言之，矩阵为经济学家提供了一种强大、紧凑且计算高效的语言，用于描述和分析涉及多个变量、多个方程和复杂相互作用的的经济系统。它是连接经济理论、实证分析和数值模拟的桥梁，是现代经济学研究的必备工具。

第2.1节 矩阵的引入

主讲人： 柳顺义

长安大学理学院

本节概要

- 本节介绍矩阵的定义及矩阵与线性变换之间的关系.

一、矩阵的定义

二、特殊矩阵

三、线性变换与矩阵

本节概要

➢ 本节介绍矩阵的定义及矩阵与线性变换之间的关系.

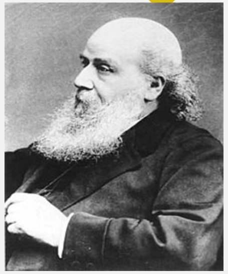
一、矩阵的定义

二、特殊矩阵

三、线性变换与矩阵

矩阵的提出

- 矩阵(**matrix**)这个词是英国数学家西尔维斯特首先使用的，这是发生在他实际上希望引用数字的矩形阵列而又不能再用行列式这个词的时候，虽然那时他仅仅涉及由矩形阵列的元素所能形成的那些行列式.

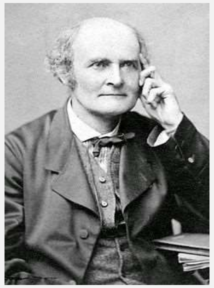


Sylvester (1814 –1897)

- 确实如英国数学家凯莱所坚持的，在逻辑上，矩阵的概念先于行列式的概念，而在历史上次序正相反. 凯莱说“我决然不是通过四元数而获得矩阵概念的；它或是直接从行列式的概念而来，或是作为一个表达方程组

$$\begin{cases} x' = ax + by, \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

的方便的方法而来的.” 就这样他引进了矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 它代表了这个变换的主要信息.



Cayley (1821 –1895)

矩阵论的创立者

一、矩阵的定义

【定义】由 $m\times n$ 个数 a_{ij} $(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 排成 m 行 n 列，并括以方括号(或圆括号)的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 m 行 n 列矩阵，简称 $m\times n$ **矩阵**. a_{ij} 称为矩阵的**元素**.

表示： A 或 $A_{m\times n}$ 或 $A=(a_{ij})$ 或 $A=(a_{ij})_{m\times n}$.

元素是实数的矩阵称为实矩阵，元素是复数的矩阵称为复矩阵.

一、矩阵的定义

行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- 行数等于列数
- 其结果是一个数
- 记号“两条竖线”

$$\det(a_{ij})_{n\times n}$$

矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- 行数不一定等于列数
- 本质上是一个数表
- 记号“圆(方)括号”

$$(a_{ij})_{m\times n}$$

一、矩阵的定义

同型矩阵与矩阵相等

1. 两个矩阵的行数相等且列数也相等时，称为**同型矩阵**.

例如，$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 8 & 4 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ 为同型矩阵.

2. 两个矩阵 $A=(a_{ij})$ 与 $B=(b_{ij})$ 为同型矩阵，并且对应元素相等，

即 $a_{ij}=b_{ij}\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$

则称矩阵 A 与 B **相等**，记作 $A=B$.

本节概要

- 本节介绍矩阵的定义及矩阵与线性变换之间的关系.

一、矩阵的定义

二、特殊矩阵

三、线性变换与矩阵

二、特殊矩阵

1. 行数与列数都等于 n 的矩阵，称为 n 阶**方阵**.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

主对角线

二、特殊矩阵

2. 只有一行的矩阵

$$A=(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n)$$

称为**行矩阵**.

只有一列的矩阵

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

称为**列矩阵**.

二、特殊矩阵

3. 元素全是零的矩阵称为**零矩阵**．可记作 $\boldsymbol{O}$.

例如：$$\boldsymbol{O}_{2\times 2}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{O}_{1\times 4}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

二、特殊矩阵

4. 形如 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ 的方阵称为**对角矩阵**（diagonal matrix）.

记作 $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$

方阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 称为**单位矩阵**（identity matrix）.

记作 E_n 或者 I_n .

本节概要

- 本节介绍矩阵的定义及矩阵与线性变换之间的关系.

一、矩阵的定义

二、特殊矩阵

三、线性变换与矩阵

三、线性变换与矩阵

【定义】n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 与 m个变量$y_1,y_2,\cdots,y_m$之间的关系式

系数矩阵

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n. \end{cases} \xleftrightarrow{1\text{-}1} A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

表示从变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 的**线性变换**，其中 a_{ij} 为常数.

➢ 线性变换与矩阵之间存在着一一对应关系.

三、线性变换与矩阵

例　线性变换 $\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ \quad\cdots \\ y_n = x_n \end{cases}$ 称为**恒等变换**.

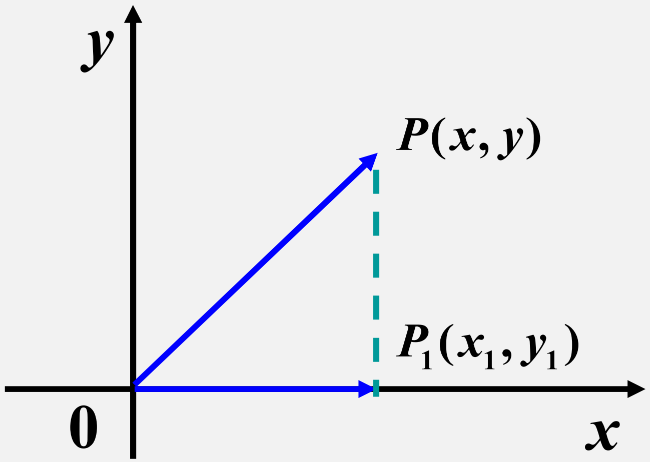
$$\begin{cases} y_1 = 1\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + \cdots + 0\cdot x_n, \\ y_2 = 0\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + \cdots + 0\cdot x_n, \\ \quad\cdots\cdots\cdots \\ y_n = 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + \cdots + 1\cdot x_n \end{cases} \overset{1-1对应}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

单位矩阵 E_n

三、线性变换与矩阵

例　2阶方阵

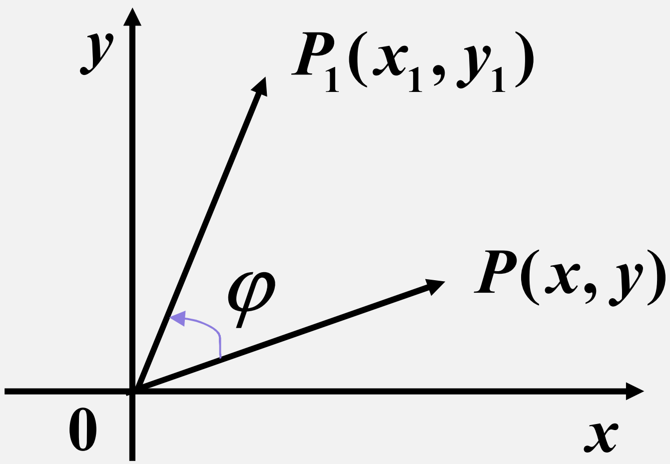
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\text{1-1对应}} \begin{cases} x_1 = 1 \cdot x + 0 \cdot y, \\ y_1 = 0 \cdot x + 0 \cdot y. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = x, \\ y_1 = 0. \end{cases}$$



投影变换

三、线性变换与矩阵

例　2阶方阵 $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\text{1-1对应}} \begin{cases} x_1 = \cos\varphi x - \sin\varphi y, \\ y_1 = \sin\varphi x + \cos\varphi y. \end{cases}$



以原点为中心逆时针旋转φ角的旋转变换

谢 谢!

第2.2节 矩阵的运算

主讲人： 柳顺义

长安大学理学院

本节概要

- 本节主要介绍矩阵的运算.

一、矩阵的加法

二、数与矩阵的乘法 (数乘)

三、矩阵的乘法

四、矩阵的转置

五、方阵的行列式

本节概要

- 本节主要介绍矩阵的运算.

一、矩阵的加法

二、数与矩阵的乘法 (数乘)

三、矩阵的乘法

四、矩阵的转置

五、方阵的行列式

一、矩阵的加法

1. 矩阵加法的定义

【定义】设有两个 $m \times n$ 矩阵 $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$，那么矩阵 A 与 B 的**和**记作 $A+B$，规定为

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

注意 只有当两个矩阵是同型矩阵时，才能进行加法运算.

一、矩阵的加法

2. 矩阵加法的算律

数的加法满足的运算规律：

$\forall a,b,c \in R$

$a+b=b+a$ （交换律）

$$a+b+c=(a+b)+c$$
$$=a+(b+c)$$ （结合律）

设 A、B、C 是同型矩阵,

$A+B=B+A$ （交换律）

$$A+B+C=(A+B)+C$$
$$=A+(B+C)$$ （结合律）

一、矩阵的加法

3. 矩阵的减法

设矩阵 $A=(a_{ij})$, 记 $-A=(-a_{ij})$, 称其为矩阵 A 的**负矩阵**.

显然 $A+O=A \qquad A+(-A)=O$

矩阵减法 $A-B := A+(-B)$

$$A-B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}$$

本节概要

- 本节主要介绍矩阵的运算.

一、矩阵的加法

二、数与矩阵的乘法 (数乘)

三、矩阵的乘法

四、矩阵的转置

五、方阵的行列式

二、数与矩阵的乘法（数乘）

1. 数乘的定义

【定义】数 λ 与矩阵 $A=(a_{ij})$ 的**乘积**记作 λA，规定为

$$\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

- 矩阵加法与数乘合起来，统称为矩阵的**线性运算**.

二、数与矩阵的乘法（数乘）

2. 数乘的算律

设 A、B是同型矩阵，λ，μ 是数，则

$$(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)=\mu(\lambda A)$$

$$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$$

$$(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$$

二、数与矩阵的乘法 (数乘)

数与矩阵乘法、数与行列式乘法之区别

$$\lambda\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\lambda\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \lambda a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \lambda a_{33} \end{vmatrix}$$

本节概要

- 本节主要介绍矩阵的运算.

一、矩阵的加法

二、数与矩阵的乘法 (数乘)

三、矩阵的乘法

四、矩阵的转置

五、方阵的行列式

三、矩阵的乘法

凯莱(Cayley)直接从两个相继变换的效应(即线性变换的复合)的表示作出两个矩阵乘法的定义.

例如，设变换

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y, \\ z' = a_{31}x + a_{32}y, \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

后跟着变换

$$\begin{cases} x'' = b_{11}x' + b_{12}y' + b_{13}z', \\ y'' = b_{21}x' + b_{22}y' + b_{23}z', \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

则 x'', y'' 和 x, y 之间的关系如下：

$$\begin{cases} x'' = (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + b_{13}a_{31})x + (b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} + b_{13}a_{32})y, \\ y'' = (b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} + b_{23}a_{31})x + (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + b_{23}a_{32})y, \end{cases}$$

三、矩阵的乘法

凯莱定义两个矩阵的乘积为:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}_{2\times 3} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

$$:= \begin{pmatrix} b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21}+b_{13}a_{31} & b_{11}a_{12}+b_{12}a_{22}+b_{13}a_{32} \\ b_{21}a_{11}+b_{22}a_{21}+b_{23}a_{31} & b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22}+b_{23}a_{32} \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

$\updownarrow$

“前行乘后列”

$$\begin{cases} x'' = (b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21}+b_{13}a_{31})x + (b_{11}a_{12}+b_{12}a_{22}+b_{13}a_{32})y, \\ y'' = (b_{21}a_{11}+b_{22}a_{21}+b_{23}a_{31})x + (b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22}+b_{23}a_{32})y, \end{cases}$$

“第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数”

三、矩阵的乘法

【定义】设 $A=(a_{ij})_{m\times s}$，$B=(b_{ij})_{s\times n}$，规定矩阵 A 与矩阵 B 的**乘积**是一个 $m\times n$ 矩阵 $C=(c_{ij})$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{is} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{sj} & & b_{sn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & \boxed{c_{ij}} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

并把此乘积记作 $C=AB$.

三、矩阵的乘法

【定义】设 $A=(a_{ij})_{m\times s}$, $B=(b_{ij})_{s\times n}$, 规定矩阵 A 与矩阵 B 的**乘积**是一个 $m\times n$ 矩阵 $C=(c_{ij})$, 其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$$

例 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&-1&2\\-1&1&3&0\\0&5&-1&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&3&4\\1&2&1\\3&1&-1\\-1&2&1\end{pmatrix}$, 计算$AB$. $\begin{pmatrix}-5&6&7\\10&2&-6\\-2&17&10\end{pmatrix}$

例 $E_mA_{m\times n}=A_{m\times n}E_n=A$ $\qquad 1\cdot a=a\cdot 1=a\ (\forall a\in R)$

单位矩阵在矩阵乘法中的作用类似于1在数的乘法中的作用.

三、矩阵的乘法

矩阵乘法是否满足交换律?

例 $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\end{pmatrix}$ $\quad\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 6 & 9\\2 & 4 & 6\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}-2 & 4\\1 & -2\end{pmatrix}_{2\times2}\begin{pmatrix}2 & 4\\-3 & -6\end{pmatrix}_{2\times2}=\begin{pmatrix}-16 & -32\\8 & 16\end{pmatrix}_{2\times2}$$

$$\begin{pmatrix}2 & 4\\-3 & -6\end{pmatrix}_{2\times2}\begin{pmatrix}-2 & 4\\1 & -2\end{pmatrix}_{2\times2}=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}_{2\times2}$$

事实1 矩阵乘法不满足交换律（有3种情形）

事实2 不能由 $AB=O$ 得出 $A=O$ 或 $B=O$.

三、矩阵的乘法

事实 矩阵乘法不满足交换律(有3种情形)

注记：矩阵乘法不满足交换律并不是说任意给定两个矩阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$，就一定有 $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$.

例如，$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$， $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$，有

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

三、矩阵的乘法

矩阵乘法不满足消去律

反例 $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$AB=\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}=AC$ 但是 $B \neq C$

三、矩阵的乘法

矩阵乘法的运算规律

(1) 结合律 $ABC=(AB)C=A(BC)$

(2) 数乘结合律 $\lambda\left(AB\right)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$ （λ 是数）

(3) 分配律 $A(B+C)=AB+AC$ “左乘”

$(B+C)A=BA+CA$ “右乘”

三、矩阵的乘法

矩阵的幂

【定义】设 A 是 n 阶方阵，k是正整数，定义 A 的 k 次**幂**为

$$A^k = \underbrace{AA\cdots A}_{k}$$

思考：下列等式在什么时候成立？

$$(AB)^k = A^k B^k$$

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

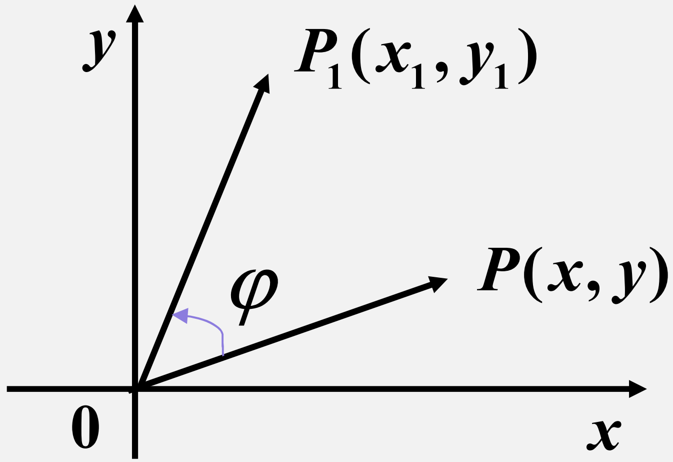
$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$$

A、B可交换时成立

（$AB = BA$）

三、矩阵的乘法

例 设 $A=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$，求 A^n？



解法一 数学归纳法

解法二 几何意义

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix} \xleftrightarrow{\text{1-1对应}} \begin{cases} x_1=\cos\varphi x-\sin\varphi y,\\ y_1=\sin\varphi x+\cos\varphi y.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}^n}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \overset{\text{几何意义}}{=\!=\!=} \underline{\begin{pmatrix}\cos n\varphi & -\sin n\varphi\\ \sin n\varphi & \cos n\varphi\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

三、矩阵的乘法

矩阵多项式

【定义】设 $f(x)=a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1 x+a_0$ 是 x 的 m 次多项式，A 为 n 阶方阵，则

$$f(A)=a_m A^m + a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1 A+a_0 E_n.$$

称为矩阵 A 的 m **次多项式**.

例 设 $f(x)=x^2-2x+3,\ A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\1&1&2\end{pmatrix}$，求 $f(A)$?

矩阵乘法的注记

矩阵“乘法”的规则很奇怪，按照这个规则我们做乘法的次序不同就得到不同的结果（与普通代数不一样，那里 $x \times y$ 总是等于 $y \times x$ ），似乎与任何有关科学的或实际应用的东西都不着边际.

然而在 **Cayley** 创立了它 **67** 年之后，海森堡(**Heisenberg,** 1932 年诺贝尔物理学奖获得者)在**1925**年发现，矩阵代数恰恰是他在量子力学的革命性工作中所需要的工具.

——摘自《数学大师》第21章459页

(1901-1976)

矩阵乘法的知识拓展

Hadamard 积(也称为 **Schur** 积)

$$A \circ B = \left(a_{ij}b_{ij}\right) = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1n} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & \cdots & a_{2n}b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}b_{m1} & a_{m2}b_{m2} & \cdots & a_{mn}b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A \circ B = B \circ A$$

(French, 1865-1963)

Kronecker 积(或称直积)

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}$$

(German, 1823-1891)

本节概要

- 本节主要介绍矩阵的运算.

一、矩阵的加法

二、数与矩阵的乘法 (数乘)

三、矩阵的乘法

四、矩阵的转置

五、方阵的行列式

四、矩阵的转置

【定义】把矩阵 A 的行换成同序数的列得到的新矩阵，叫做 A的**转置矩阵**，记作 A^{T}.

例　设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}_{2\times 3}$，则 $A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}_{3\times 2}$.

转置矩阵的运算性质

(1) $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$;

(2) $(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$;

(3) $(\lambda A)^{\mathrm{T}}=\lambda A^{\mathrm{T}}$;

(4) $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

四、矩阵的转置

【定义】设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶方阵，如果满足 $A^{\mathrm{T}}=A$，即

$$a_{ij}=a_{ji}\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$$

则 A 称为**对称矩阵**.

如果满足 $A^{\mathrm{T}}=-A$（即 $a_{ij}=-a_{ji}$），则 A 称为**反对称矩阵**.

$$A=\begin{pmatrix}12 & 6 & 1\\ 6 & 8 & 0\\ 1 & 0 & 6\end{pmatrix}\qquad A=\begin{pmatrix}0 & -6 & 1\\ 6 & 0 & 7\\ -1 & -7 & 0\end{pmatrix}$$

对称矩阵　　　　反对称矩阵

四、矩阵的转置

【定义】设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶方阵，如果满足 $A^{\mathrm{T}}=A$，即

$$a_{ij}=a_{ji}\quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

则 A 称为**对称矩阵**.

如果满足 $A^{\mathrm{T}}=-A$（即 $a_{ij}=-a_{ji}$），则 A 称为**反对称矩阵**.

事实 任一方阵总可表示成一个对称矩阵与一个反对称矩阵的和.

$$A=\underbrace{\frac{1}{2}(A+A^{\mathrm{T}})}_{\text{对称矩阵}}+\underbrace{\frac{1}{2}(A-A^{\mathrm{T}})}_{\text{反对称矩阵}}$$

四、矩阵的转置

例 设矩阵$X=(x_1\ \ x_2\ \ \ldots\ \ x_n)^{\mathrm{T}}$满足$X^{\mathrm{T}}X=1$, E为n阶单位矩阵，$H=E-2XX^{\mathrm{T}}$，试证明 H是对称矩阵，且 $HH^{\mathrm{T}}=E$.

证 $H^{\mathrm{T}}=(E-2XX^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=E^{\mathrm{T}}+(-2XX^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=E-2(XX^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=E-2(X^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}$

$$=E-2XX^{\mathrm{T}}=H$$

从而H是对称阵.

$$HH^{\mathrm{T}}=H^2=(E-2XX^{\mathrm{T}})^2=E-4XX^{\mathrm{T}}+4XX^{\mathrm{T}}XX^{\mathrm{T}}$$

$$=E-4XX^{\mathrm{T}}+4X(X^{\mathrm{T}}X)X^{\mathrm{T}}$$

$$=E-4XX^{\mathrm{T}}+4XX^{\mathrm{T}}$$

$$=E$$

本节概要

- 本节主要介绍矩阵的运算.

一、矩阵的加法

二、数与矩阵的乘法 (数乘)

三、矩阵的乘法

四、矩阵的转置

五、方阵的行列式

五、方阵的行列式

【定义】由 n 阶方阵 A 的元素所构成的行列式，叫做方阵 A 的**行列式**，记作 $|A|$ 或 $\det(A)$.

例　设 $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 6 & 8\end{pmatrix}$，则 $\det(A)=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 6 & 8\end{vmatrix}=-2.$

【定义】若 $|A|=0$，则称 A 为**奇异矩阵**；否则称为**非奇异矩阵**.

<u>运算性质</u>　(1) $|A^{\mathrm{T}}|=|A|$;　(2) $|\lambda A|=\lambda^n|A|$;

(3) 当 A、B 是同阶方阵, 则 $|AB|=|A||B|$.

谢 谢！

第2.3节 逆矩阵

主讲人： 柳顺义

长安大学理学院

本讲概要

- 矩阵与复数相仿，有加、减、乘三种运算.
- 矩阵的乘法是否也和复数一样有逆运算呢？

一、可逆矩阵的定义

二、逆矩阵存在的条件及计算

三、可逆矩阵的性质

四、克拉默法则的证明

本讲概要

- 矩阵与复数相仿，有加、减、乘三种运算.
- 矩阵的乘法是否也和复数一样有逆运算呢？

一、可逆矩阵的定义

二、逆矩阵存在的条件及计算

三、可逆矩阵的性质

四、克拉默法则的证明

一、可逆矩阵的定义

数的乘法有逆运算除法：

$$b \div a = b \times \frac{1}{a} = ba^{-1} \ (a \neq 0).$$

复数$a \neq 0$的倒数a^{-1}可以用等式 $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ 来刻画.

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

$$\boxed{AB = BA = E}$$

一、可逆矩阵的定义

【定义1】n 阶方阵 A 称为**可逆的**，如果存在 n 阶方阵 B，使得

$$AB = BA = E$$

这里 E 是 n 阶单位矩阵.

- 根据矩阵的乘法法则，只有方阵才能满足上述等式.
- 对于任意的 n 阶方阵 A，适合上述等式的矩阵 B 是唯一的（如果有的话）.

【定义2】如果矩阵 B 满足上述等式，那么 B 就称为A 的**逆矩阵**，记作 A^{-1} .

一、可逆矩阵的定义

问题1 是不是每一个方阵都可逆？

例 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 是否可逆？

问题2 哪些方阵是可逆的？

能否给出判断方阵可逆的(充分必要)条件？

问题3 对于一个可逆矩阵 A，如何求出它的逆矩阵？

本讲概要

- 矩阵与复数相仿，有加、减、乘三种运算.
- 矩阵的乘法是否也和复数一样有逆运算呢？

一、可逆矩阵的定义

二、逆矩阵存在的条件及计算

三、可逆矩阵的性质

四、克拉默法则的证明

二、逆矩阵存在的条件及计算

伴随矩阵的定义

【定义3】$\boldsymbol{n}$ 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的**伴随矩阵**定义为

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

其中 A_{ij} 为 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式.

例 求 3 阶方阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵.

解 $A_{11}=-7,\ A_{12}=6,\ A_{13}=3$

$A_{21}=-4,\ A_{22}=3,\ A_{23}=2$

$A_{31}=9,\ A_{32}=-7,\ A_{33}=-4$

$$A^* = \begin{pmatrix} -7 & -4 & 9 \\ 6 & 3 & -7 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

二、逆矩阵存在的条件及计算

伴随矩阵的性质

【性质】设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_{ij})$ 是 $\boldsymbol{n}$ 阶方阵，则 $AA^*=A^*A=|A|E$.

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}|A|, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

证

$$\boldsymbol{AA^*}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|A| & 0 & \cdots & 0\\ 0 & |A| & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & |A|\end{pmatrix}=|A|E$$

二、逆矩阵存在的条件及计算

【定理1】方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆当且仅当 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$，且

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*}.$$

证 必要性. 因 A 可逆，存在方阵 B ，使得 $AB = E$.

因此 $|AB| = |E| = 1 \Longrightarrow |A| \neq 0.$

充分性. 当 $|A| \neq 0$，由 $AA^{*} = A^{*}A = |A|E$ ，可得

$$A\left(\frac{1}{|A|}A^{*}\right) = \left(\frac{1}{|A|}A^{*}\right)A = E$$

二、逆矩阵存在的条件及计算

例 确定2阶方阵

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

可逆的条件；当 A 可逆时，求出其逆矩阵.

$$A \text{ 可逆} \iff |A| = ad - bc \neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

例 求3阶方阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解 $|A|=1 \Rightarrow$ 可逆

$$A_{11}=-7,\ A_{12}=6,\ A_{13}=3,$$
$$A_{21}=-4,\ A_{22}=3,\ A_{23}=2,$$
$$A_{31}=9,\ A_{32}=-7,\ A_{33}=-4,$$

则 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^{*}=\begin{pmatrix} -7 & -4 & 9 \\ 6 & 3 & -7 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

二、逆矩阵存在的条件及计算

【定理1】方阵 A 可逆当且仅当 $|A| \neq 0$，且

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^{*}.$$

关于定理1的注记

- 定理1不仅给出了判断矩阵可逆的充分必要条件，而且也给出了求逆矩阵的方法，该定理具有重要的理论价值.
- 在实际求逆矩阵时，定理提供的方法计算量很大，在本章将介绍另一种常用的求逆矩阵的方法（初等变换法）.

二、逆矩阵存在的条件及计算

定理1的若干推论

【定理1】方阵A可逆当且仅当$|A|\neq 0$，且

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}.$$

【推论1】设A,B都是n阶方阵，若$AB=E$，则A,B均可逆，且

$$A^{-1}=B,\ B^{-1}=A.$$

【推论2】设A为可逆矩阵，则

1) 若$AB=O$，则$B=O$.

2) 若$AB=AC$，则$B=C$.

本讲概要

- 矩阵与复数相仿，有加、减、乘三种运算.
- 矩阵的乘法是否也和复数一样有逆运算呢？

一、可逆矩阵的定义

二、逆矩阵存在的条件及计算

三、可逆矩阵的性质

四、克拉默法则的证明

三、可逆矩阵的性质

（1） 若 A 可逆，则 A^{-1} 也可逆，且 $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$.

（2） 若 A 可逆，数 $\lambda \neq 0$ ，则 λA 也可逆，且 $(\lambda A)^{-1}=\dfrac{1}{\lambda} A^{-1}$.

（3） 若 A, B 为同阶可逆方阵，则 AB 也可逆，且 $(AB)^{-1}=B^{-1} A^{-1}$.

（4） 若 A 可逆，则 A^{T} 也可逆，且 $\left(A^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$.

（5） 若 A 可逆，则 $\left|A^{-1}\right|=|A|^{-1}$.

例题

例 设n阶方阵A满足$A^3-2A^2+3A-E=O$，证明：A可逆，并求其逆.

例 已知 A,B 及 $A+B$ 均可逆，证明 $A^{-1}+B^{-1}$ 也可逆，并求其逆矩阵.

$$A^{-1}+B^{-1}=A^{-1}(E+AB^{-1})=A^{-1}(B+A)B^{-1}=A^{-1}(A+B)B^{-1}.$$

例 设A是n阶可逆方阵，证明当$n\geq 2$时，

(1) $\left|A^*\right|=\left|A\right|^{n-1}$，　　(2) $\left(A^*\right)^*=\left|A\right|^{n-2}A.$

矩阵有除法运算吗?

思考题 设矩阵 A, X, B 满足 $AX = B$. 若矩阵 A 可逆，则

$$X = \frac{B}{A}.$$

请问这种解法(写法)对吗?

当矩阵 A 可逆时，$\dfrac{B}{A}$ 有两种理解：$A^{-1}B$ 和 BA^{-1} ，

但可能 $A^{-1}B \neq BA^{-1}$.

正确的做法：对 $AX = B$ 两边左乘 A^{-1} ，解得 $X = A^{-1}B$

本讲概要

- 矩阵与复数相仿，有加、减、乘三种运算.
- 矩阵的乘法是否也和复数一样有逆运算呢？

一、可逆矩阵的定义

二、逆矩阵存在的条件及计算

三、可逆矩阵的性质

四、克拉默法则的证明

线性方程组的矩阵表示

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

令 $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

系数矩阵

$$\boldsymbol{AX} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}$$

矩阵形式：$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}.$

四、克拉默法则的证明

【定理】如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \qquad (1)$$

的系数行列式不等于0，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

则线性方程组(1)有解且解唯一：

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n = \frac{D_n}{D}, \qquad (2)$$

其中 D_j 是把系数行列式 D 中第 j 列的元素用方程组右端的常数项代替后所得到的 n 阶行列式，即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

四、克拉默法则的证明

证 当线性方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ 时，则 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b} \Longrightarrow \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} = \left(\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*\right)\boldsymbol{b} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\left(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{b}\right)$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

比较等式两端，得

$$x_j = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}(A_{1j}b_1 + A_{2j}b_2 + \cdots + A_{nj}b_n) = \frac{D_j}{D}$$

四、克拉默法则的证明

证 $x_j = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}(A_{1j}b_1 + A_{2j}b_2 + \cdots + A_{nj}b_n) = \frac{D_j}{D}, (j = 1, 2, \cdots, n).$

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= b_1 A'_{1j} + b_2 A'_{2j} + \cdots + b_n A'_{nj}$$

$$= b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \cdots + b_n A_{nj}$$

矩阵方程

矩阵方程：含有未知矩阵的等式.

例 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&3\\1&4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&5\\2&0\\3&6\end{pmatrix}$.

求矩阵 X，使其满足 $AXB=C$.

解 因矩阵$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$可逆及逆矩阵的唯一性，方程有唯一解：

$$X=A^{-1}CB^{-1}$$

谢 谢！

第2.4节 矩阵的分块

主讲人： 柳顺义

长安大学理学院

本节概要

- 当矩阵的行数和列数较高时，计算繁杂不易处理. 本节介绍一种在矩阵的行数和列数较高时常用的处理方法--分块法.

一、分块矩阵的定义

二、分块矩阵的运算

三、分块对角矩阵

四、按行(列)分块

本节概要

- 当矩阵的行数和列数较高时，计算繁杂不易处理. 本节介绍一种在矩阵的行数和列数较高时常用的处理方法-分块法.

一、分块矩阵的定义

二、分块矩阵的运算

三、分块对角矩阵

四、按行(列)分块

一、分块矩阵的定义

【定义】 用一些横线和竖线将矩阵分成若干个小块，这种操作称为对矩阵进行分块.

每一个小块称为矩阵的子块.

矩阵分块后，以子块为元素的<u>形式上的</u>矩阵称为分块矩阵.

$$A=\left(\begin{array}{cc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$A_{11}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, A_{12}=\begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix},$$

$$A_{21}=\begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, A_{22}=\begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}.$$

一、分块矩阵的定义

分成子块的方法很多，例如：

$$A=\left(\begin{array}{cc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right) \quad A=\left(\begin{array}{c:cc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right) \quad A=\left(\begin{array}{c:c:c:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right)$$

- 分块的目的是为了简化运算；
- 分块的基本原则：既要考虑矩阵本身的特点和运算的需要，还要注意分块后的矩阵在运算中是否有意义及子块间的运算应遵循矩阵的运算规则.

本节概要

- 当矩阵的行数和列数较高时，计算繁杂不易处理. 本节介绍一种在矩阵的行数和列数较高时常用的处理方法–分块法.

一、分块矩阵的定义

二、分块矩阵的运算

三、分块对角矩阵

四、按行(列)分块

二、分块矩阵的运算

1. 分块矩阵的加法

若矩阵 A、B是同型矩阵，且采用相同的分块法，即

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{sr} \end{pmatrix}$$

则 $A+B=\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & \cdots & A_{1r}+B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1}+B_{s1} & \cdots & A_{sr}+B_{sr} \end{pmatrix}$

形式上看成普通矩阵的加法！

二、分块矩阵的运算

2. 分块矩阵的数量乘法

设λ是数，分块矩阵 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$，

则 $\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{s1} & \cdots & \lambda A_{sr} \end{pmatrix}$

形式上看成普通的数乘！

二、分块矩阵的运算

3. 分块矩阵的乘法

设 A为$m\times l$ 矩阵，B为$l\times n$矩阵，

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix},$$

则 $C=AB=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1r} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & C_{s2} & \cdots & C_{sr} \end{pmatrix}$，其中 $C_{ij}=\sum_{k=1}^{t}A_{ik}B_{kj}$，

$(i=1,\cdots,s;\ j=1,\cdots,r)$

二、分块矩阵的运算

例 设分块矩阵 $A=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ \hline 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}E_2 & A_1\\ O & A_2\end{pmatrix}$，用分块矩阵乘法求 A^2.

解

$$A^2=\begin{pmatrix}E_2 & A_1\\ O & A_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_2 & A_1\\ O & A_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_2 & A_1+A_1A_2\\ O & A_2^2\end{pmatrix}$$

$$A_1+A_1A_2=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 4 & 4\end{pmatrix},\ A_2^2=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix}\quad\Rightarrow A^2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 4 & 4\\ 0 & 0 & 5 & 4\\ 0 & 0 & 4 & 5\end{pmatrix}.$$

二、分块矩阵的运算

4. 分块矩阵的转置

设分块矩阵 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$,

分块矩阵不仅形式上进行转置，而且每一个子块也进行转置

则 A 的转置矩阵为 $A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} A_{11}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{s1}^{\mathrm{T}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1r}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{sr}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$

本节概要

- 当矩阵的行数和列数较高时，计算繁杂不易处理. 本节介绍一种在矩阵的行数和列数较高时常用的处理方法–分块法.

一、分块矩阵的定义

二、分块矩阵的运算

三、分块对角矩阵

四、按行(列)分块

三、分块对角矩阵

设 A 是 n 阶方阵，若

1. A 的分块矩阵只有在主对角线上有非零子块，其余子块都为零矩阵，

2. 主对角线上的子块都是方阵，

称 A 为**分块对角矩阵**（或**准对角矩阵**）.

$$A=\left(\begin{array}{c|c|cc} 5 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{array}\right)$$

三、分块对角矩阵

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$$

(1) $|A|=|A_1||A_2|\dots|A_s|$

(2) A 可逆当且仅当 $A_1,A_2,\dots,A_s$ 均可逆，且

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$$

三、分块对角矩阵

例 设 $A=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&3&1\\0&2&1\end{pmatrix}$，求 A^{-1} .

解

$$A=\left(\begin{array}{c|cc}5&0&0\\\hline 0&3&1\\0&2&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix}$$

$$A_1=(5),\ A_1^{-1}=\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$A_2=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix},\ A_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\-2&3\end{pmatrix}$$

本节概要

- 当矩阵的行数和列数较高时，计算繁杂不易处理. 本节介绍一种在矩阵的行数和列数较高时常用的处理方法–分块法.

一、分块矩阵的定义

二、分块矩阵的运算

三、分块对角矩阵

四、按行(列)分块

四、按行(列)分块

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 $\boldsymbol{m}$ 行 $\boldsymbol{n}$ 列，

若将第 $\boldsymbol{j}$ 列记作 $\beta_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$，

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right)$$

四、按行(列)分块

设 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times s}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_s \end{pmatrix}$; $B=\left(b_{ij}\right)_{s\times n}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix}$. 则

(1) $AB=A\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} A\beta_1 & A\beta_2 & \cdots & A\beta_n \end{pmatrix}$;

(2) $AB=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix}B=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 B \\ \boldsymbol{a}_2 B \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m B \end{pmatrix}$;

(3) $AB=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1\beta_1 & \boldsymbol{a}_1\beta_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_1\beta_n \\ \boldsymbol{a}_2\beta_1 & \boldsymbol{a}_2\beta_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_2\beta_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{a}_m\beta_1 & \boldsymbol{a}_m\beta_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_m\beta_n \end{pmatrix}$;

(4) $AB=\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_s \end{pmatrix}$

$=\alpha_1\boldsymbol{b}_1+\alpha_2\boldsymbol{b}_2+\cdots+\alpha_s\boldsymbol{b}_s$.

四、按行(列)分块

例 证明：$A_{m\times n}=O_{m\times n}$ 的充分必要条件是方阵 $A^{\mathrm{T}}A=O_{n\times n}$.

证 把 A 按列分块，有 $A=(a_{ij})_{m\times n}=\left(\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_n\right)$.

于是

$$A^{\mathrm{T}}A=\begin{pmatrix}\alpha_1^{\mathrm{T}}\\ \alpha_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \alpha_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\left(\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_n\right)=\begin{pmatrix}\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_1 & \alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_n\\ \alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_1 & \alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_1 & \alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_n\end{pmatrix}=O$$

则 $$\alpha_j^{\mathrm{T}}\alpha_j=\left(a_{1j}\ a_{2j}\ \cdots\ a_{mj}\right)\begin{pmatrix}a_{1j}\\ a_{2j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{pmatrix}=a_{1j}^2+a_{2j}^2+\cdots+a_{mj}^2=0$$

$\Rightarrow a_{1j}=a_{2j}=\cdots=a_{mj}=0\ \left(j=1,2,\cdots,n\right)$ 即 $A=O.$

谢 谢！

第2.5节 矩阵的初等变换与初等矩阵

主讲人： 柳顺义

长安大学理学院

本节概要

- 矩阵的初等变换起源于对线性方程组求解问题的研究，是处理矩阵常用的一种基本方法.

一、矩阵的初等变换

二、初等矩阵

三、初等变换与矩阵乘法

四、初等变换求逆矩阵

本节概要

- 矩阵的初等变换起源于对线性方程组求解问题的研究，是处理矩阵常用的一种基本方法.

一、矩阵的初等变换

二、初等矩阵

三、初等变换与矩阵乘法

四、初等变换求逆矩阵

一、矩阵的初等变换

1. 什么是初等变换?

【定义】下列三种变换称为矩阵的**初等行变换**:

- (对换)交换两行, 记作 $r_i \leftrightarrow r_j$;
- (倍乘)以非零常数 k 乘某一行的所有元素,记作 $r_i \times k$;
- (倍加)某一行各元素的k倍加到另一行对应元素, 记作 $r_i + kr_j$.

初等行变换

是可逆的,

其逆变换为:

$r_i \leftrightarrow r_j \Rightarrow r_i \leftrightarrow r_j;$

$r_i \times k \Rightarrow r_i \times \frac{1}{k};$

$r_i + kr_j \Rightarrow r_i + (-k)r_j.$

初等变换 $\begin{cases} \text{初等行变换} \\ \text{初等列变换} \end{cases}$

一、矩阵的初等变换

2. 初等变换能将矩阵化简成什么样?

【定义】如果矩阵A经有限次初等变换变成矩阵B, 就称矩阵A与B **等价**, 记作 $A \sim B$.

所有与 A 等价的矩阵的全体称为 A 的**等价类**.

矩阵间的等价是一种等价关系:

(1) 反身性: $A \sim A$.

(2) 对称性: 若$A \sim B$,则$B \sim A$.

(3) 传递性: 若$A \sim B$, $B \sim C$,则$A \sim C$.

问题 在矩阵 A 的等价类中，是否存在一个最简单的矩阵？形状怎样？

一、矩阵的初等变换

【定义】矩阵 A 的每个非零行从左至右的第一个不为 0 的元素称为 A 的**主元**.

【定义】若矩阵 A 满足以下两个条件, 则称 A 为**行阶梯形矩阵**.

(I) A的下一行主元只出现在上一行主元的右边.

(II) 零行只出现在非零行的下方.

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

一、矩阵的初等变换

【定理1】任意矩阵A总可以经过有限次**初等行变换**化为**阶梯矩阵**.

证　若 $A=O$，则 A 本身就是阶梯形矩阵.

若 $A\neq O$，则 A 中至少有一个非零元素.

设 A 的第 j 列是它的第一个非零列. 对 A 施行互换两行的变换就可以使第 j 列中的非零元变到第一行的位置，所以不妨设 $a_{1j}\neq 0$.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{mj} & & a_{mn} \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & A_1 & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & \end{pmatrix}$$

一、矩阵的初等变换

例 试用初等变换将矩阵 A 变为阶梯形.

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\2&-1&-1&1&2\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&-3&3&-1&-6\\0&-10&10&-6&-12\\0&3&-3&4&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&-3&3&-1&-6\\0&-10&10&-6&-12\\0&0&0&3&-9\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1/3&2\\0&-10&10&-6&-12\\0&0&0&3&-9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1/3&2\\0&0&0&-8/3&8\\0&0&0&3&-9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1/3&2\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&3&-9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2&0&7\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

阶梯形

一、矩阵的初等变换

矩阵 $A \xrightarrow{r}$ 行阶梯形矩阵 $\xrightarrow{r}$ 行最简形矩阵 $\longrightarrow$?

【定义】若阶梯矩阵 A 满足以下两个条件, 则称 A 为**行最简形矩阵**.

(I) 各主元均为 1.

(II) 每个主元所在列的其它元素都为 0.

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

阶梯形，非行最简形 行最简形

一、矩阵的初等变换

矩阵 $A \xrightarrow{r}$ 行阶梯形矩阵 $\xrightarrow{r}$ 行最简形矩阵 $\xrightarrow{c}$ 等价标准形

例

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} E_3 & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

等价标准形

一、矩阵的初等变换

【定理1】任意矩阵A总可以经过有限次**初等行变换**化为**阶梯矩阵**.

【定理2】任意矩阵A总可以经过有限次**初等行变换**化为**行最简形**.

$$\text{矩阵}A \xrightarrow{r} \text{阶梯形} \xrightarrow{r} \text{行最简形}$$

【定理3】任意矩阵A总可以经过有限次**初等变换**化为**等价标准形**

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

【总结】 $\text{矩阵}A \xrightarrow{r} \text{阶梯形} \xrightarrow{r} \text{行最简形} \xrightarrow{c} \text{等价标准形}$

一、矩阵的初等变换

例 试用初等变换将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 变为阶梯形、行最简形及标准形.

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\2&-1&-1&1&2\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&-3&3&-1&-6\\0&-10&10&-6&-12\\0&3&-3&4&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&-3&3&-1&-6\\0&-10&10&-6&-12\\0&0&0&3&-9\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1/3&2\\0&-10&10&-6&-12\\0&0&0&3&-9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1/3&2\\0&0&0&-8/3&8\\0&0&0&3&-9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1/3&2\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&3&-9\end{pmatrix}\to\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&-2&0&7\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}}_{\text{阶梯形}}$$

$$\to\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}}_{\text{行最简形}}\to\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\\hline 0&0&0&0&0\end{array}\right)}_{\text{等价标准形}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_3&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\end{pmatrix}$$

[思考] 一个矩阵经过初等变换所得的阶梯形、行最简形以及等价标准形是否唯一？

本节概要

- 矩阵的初等变换起源于对线性方程组求解问题的研究，是处理矩阵常用的一种基本方法.

一、矩阵的初等变换

二、初等矩阵

三、初等变换与矩阵乘法

四、初等变换求逆矩阵

二、初等矩阵

【定义】由单位矩阵经过一次初等变换得到的矩阵称为**初等矩阵**.

（1）**对换矩阵**: 互换单位阵的第 i, j 行(列), 记作 $E_m(i, j)$.

$$E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(c_3 \leftrightarrow c_5)]{r_3 \leftrightarrow r_5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & \end{pmatrix}$$

记作 $E_5(3, 5)$

逆矩阵 $E(i, j)^{-1} = E(i, j)$

二、初等矩阵

(2) **倍乘矩阵**: 以常数 $k\neq 0$ 乘单位阵第i 行(列), 记作$E_m(i(k))$.

$$E_5=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[(c_3\times k)]{r_3\times k}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\ & & & & \\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

记作 $E_5(3(k))$

逆矩阵

$$E(i(k))^{-1}=E\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right)$$

二、初等矩阵

(3) **倍加矩阵**：以 k 乘单位阵第 j 行加到第 i 行,记作 $E_m(i,j(k))$.

以 k 乘单位阵第 i 列加到第 j 列.

$$E_5=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[(c_5+c_3\times k)]{r_3+r_5\times k}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\&&&&\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

记作 $E_5(3,5(k))$

逆矩阵 $E(i,j(k))^{-1}=E(i,j(-k))$.

本节概要

➢ 矩阵的初等变换起源于对线性方程组求解问题的研究，是处理矩阵常用的一种基本方法.

一、矩阵的初等变换

二、初等矩阵

三、初等变换与矩阵乘法

四、初等变换求逆矩阵

三、初等变换与矩阵乘法

用第一类初等矩阵左乘(右乘)一个矩阵:

$$A_{3\times4}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix},\quad E_3(2,3)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad E_4(2,3)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_3(2,3)A_{3\times4}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

$$A_{3\times4}E_4(2,3)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} & a_{34} \end{pmatrix}$$

三、初等变换与矩阵乘法

用第二类初等矩阵左乘（右乘）一个矩阵：

$$A_{3\times4}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix},\quad E_3(3(6))=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},\quad E_4(3(6))=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_3(3(6))A_{3\times4}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 6a_{31} & 6a_{32} & 6a_{33} & 6a_{34} \end{pmatrix}$$

$$A_{3\times4}E_4(3(6))=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 6a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & 6a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & 6a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

三、初等变换与矩阵乘法

用第三类初等矩阵左乘(右乘)一个矩阵:

$$A_{3\times4}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix},\quad E_3(3,2(3))=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&3&1\end{pmatrix},\quad E_4(3,2(3))=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&3&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$E_3(3,2(3))A_{3\times4}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}+3a_{21}&a_{32}+3a_{22}&a_{33}+3a_{23}&a_{34}+3a_{24}\end{pmatrix}$$

$$A_{3\times4}E_4(3,2(3))=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&3&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}+3a_{13}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}+3a_{23}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}+3a_{33}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix}$$

三、初等变换与矩阵乘法

$E_m(i,j)A_{m\times n}$ 把矩阵A的第 i 行与第 j 行互换，即 $r_i \leftrightarrow r_j$.

$A_{m\times n}E_n(i,j)$ 把矩阵A的第 i 列与第 j 列互换，即 $c_i \leftrightarrow c_j$.

$E_m(i(k))A_{m\times n}$ 以非零常数 k 乘矩阵A的第 i 行，即 $r_i \times k$.

$A_{m\times n}E_n(i(k))$ 以非零常数 k 乘矩阵A的第 i 列，即 $c_i \times k$.

$E_m(i,j(k))A_{m\times n}$ 把矩阵A第 j 行的 k 倍加到第 i 行，即 $r_i + kr_j$.

$A_{m\times n}E_n(i,j(k))$ 把矩阵A第 i 列的 k 倍加到第 j 列，即 $c_j + kc_i$.

三、初等变换与矩阵乘法

【定理】设 A是一个 $m\times n$ 矩阵,

- 对 A 施行一次初等行变换, 相当于在 A 的左边乘以相应的 m 阶初等矩阵;
- 对 A 施行一次初等列变换, 相当于在 A 的右边乘以相应的 n 阶初等矩阵.

口诀：左行右列

本节概要

- 矩阵的初等变换起源于对线性方程组求解问题的研究，是处理矩阵常用的一种基本方法.

一、矩阵的初等变换

二、初等矩阵

三、初等变换与矩阵乘法

四、初等变换求逆矩阵

矩阵可逆的一个刻画

【定理】方阵 A 可逆的充要条件是存在有限个初等矩阵$P_1, P_2, \cdots, P_l$，使得 $A = P_1 P_2 \cdots P_l$.

[事实] 可逆矩阵的等价标准形是单位矩阵.

[推论1] $m \times n$ 矩阵 A 与 B 等价的充要条件是存在 m 阶可逆矩阵P 及 n 阶可逆矩阵Q，使得 $PAQ = B$.

[推论2] 对可逆矩阵 A 仅施行初等行 (列) 变换即可化为单位矩阵.

四、初等变换求逆矩阵

设方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $A = P_1 P_2 \cdots P_l$，从而 $\underline{P_l^{-1} P_{l-1}^{-1} \cdots P_1^{-1}} A = E$.

$$\underline{P_l^{-1} P_{l-1}^{-1} \cdots P_1^{-1}} E = A^{-1}$$

当经过若干次初等行变换把可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为单位矩阵$\boldsymbol{E}$, 那么用同样的初等行变换施行在单位矩阵上, 便可把单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 化为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵$\boldsymbol{A}^{-1}$.

$$(\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{E}) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (\boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{A}^{-1})$$

类似可证

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{E} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{A}^{-1} \end{pmatrix}$$

四、初等变换求逆矩阵

例 求可逆矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&1&4\\2&-1&0\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解

$$(A\ \ E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&1&2&1&0&0\\1&1&4&0&1&0\\2&-1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&4&0&1&0\\0&1&2&1&0&0\\2&-1&0&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&4&0&1&0\\0&1&2&1&0&0\\0&-3&-8&0&-2&1\end{array}\right)\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&4&0&1&0\\0&1&2&1&0&0\\0&0&-2&3&-2&1\end{array}\right)$$

四、初等变换求逆矩阵

例 求可逆矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&1&4\\2&-1&0\end{pmatrix}$ 的逆矩阵. $A^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&1\\4&-2&1\\-\frac{3}{2}&1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

解

$$(A\ \ E)\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&4&0&1&0\\0&1&2&1&0&0\\0&0&-2&3&-2&1\end{array}\right)\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&0&6&-3&2\\0&1&0&4&-2&1\\0&0&-2&3&-2&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&2&-1&1\\0&1&0&4&-2&1\\0&0&-2&3&-2&1\end{array}\right)\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&2&-1&1\\0&1&0&4&-2&1\\0&0&1&-\frac{3}{2}&1&-\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

初等变换求矩阵方程

(1) 当 A 可逆, 矩阵方程 $AX=B$ 有唯一解: $X=A^{-1}B$.

因为 $A^{-1}(A\ \ B)=(E\ \ A^{-1}B)$, 所以 $(A\ \ B)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(E\ \ A^{-1}B)$

(2) 当 A 可逆, 矩阵方程 $XA=B$ 有唯一解: $X=BA^{-1}$.

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} E \\ BA^{-1} \end{pmatrix}$$

(3) 当 A, B可逆, 矩阵方程 $AXB=C$ 有唯一解: $X=A^{-1}CB^{-1}$.

$(A\ \ C)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(E\ \ A^{-1}C)$ $\begin{pmatrix} B \\ A^{-1}C \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} E \\ A^{-1}CB^{-1} \end{pmatrix}$

谢 谢！

第2.6节 矩阵的秩

主讲人： 柳顺义

长安大学理学院

本节概要

- 矩阵的秩是刻画矩阵内在性质的一个重要数量特征.
- 本节介绍矩阵的秩的定义、计算、性质等.

一、矩阵的秩的定义

二、矩阵的秩的计算

三、矩阵的秩的性质

本节概要

- 矩阵的秩是刻画矩阵内在性质的一个重要数量特征.
- 本节介绍矩阵的秩的定义、计算、性质等.

一、矩阵的秩的定义

二、矩阵的秩的计算

三、矩阵的秩的性质

一、矩阵的秩的定义

【定义】在 $m\times n$ 矩阵 A 中, 任取 k 行 k 列 $(k\le m,\ k\le n)$, 位于这些行和列交叉处的 k^2 个元素, 按照它们在 A 中的原位置构成的 k 阶行列式称为矩阵 A 的一个 k **阶子式**.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}_{3\times 4} \qquad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{2 阶子式}$$

[注] (1) $A_{m\times n}$ 的 k 阶子式的个数: $C_m^k C_n^k$

(2) $A_{m\times n}$ 的子式的最高阶数: $k_{\max}=\min\{m,n\}$

(3) n 阶方阵 A 的 n 阶子式即为 $|A|$.

一、矩阵的秩的定义

【定义①】矩阵 A 的所有非零子式的最高阶数 r, 称为矩阵 A **的秩**,

记作 $R(A)=r$ 或 $\operatorname{rank}(A)=r$.

[规定] 零矩阵的秩等于零, 即 $R(O)=0$.

- 若 A 为 $m\times n$ 矩阵，则 $0\leq R(A)\leq \min\{m,n\}$.

例 $$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

显然, A 的所有 4 阶子式全为 0.

同时，3阶子式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}=8\neq 0$

所以 $R(A)=3$.

一、矩阵的秩的定义

【定义②】若矩阵 A 满足以下两个条件, 则 $R(A)=r$.

(1) A 至少有一个 r 阶子式不为零;

(2) A 的所有 $r+1$ 阶、$r+2$ 阶、…、k_{max}阶子式全为零.

依行列式按行（列）展开法则: A 的任一个 $r+2$ 阶子式(若存在)都可以用 $r+1$ 阶子式来表示.

意味着: 只要A的所有 $r+1$ 阶子式全为0, 则A的所有$r+2$ 阶子式(若存在)必然为0 .

依此类推

【定义③】若矩阵 A 满足以下两个条件, 则 $R(A)=r$.

(1) A 至少有一个 r 阶子式不为零;

(2') A 的所有 $r+1$ 阶子式 (如果存在) 全为零.

一、矩阵的秩的定义

- 若 A 为 $m \times n$ 矩阵, 则 $0 \le R(A) \le k_{\max} = \min\{m, n\}$.
- $\underbrace{\text{若} R(A_{m\times n}) = m, \text{行满秩矩阵}; \quad R(A_{m\times n}) = n, \text{列满秩矩阵}.}$

若 $R(A) = k_{\max}$, 则 A 为**满秩矩阵**.

[特例] 当 $m = n$ 时, 即对于方阵 A, 若 $\boxed{R(A) = n}$, 则 A 为 $\boxed{\text{满秩矩阵}}$.

可逆矩阵又称满秩矩阵, 即

$|A| \neq 0$, 亦即 $R(A) = n$.

不可逆矩阵又称降秩矩阵, 即

$|A| = 0$, 亦即 $R(A) < n$.

$R(A) = n \Leftrightarrow$ 存在 n 阶子式不为零

满秩矩阵 $\Leftrightarrow$ A 可逆

存在 n 阶子式不为零 $\Leftrightarrow$ $|A| \neq 0$ $\Leftrightarrow$ A 可逆

一、矩阵的秩的定义

(1) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 至少有一个 r 阶子式不为零 $\Longleftrightarrow R(\boldsymbol{A}) \geq r$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有 r 阶子式全为零 $\Longleftrightarrow R(\boldsymbol{A}) < r$

(2) $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = R(\boldsymbol{A}) = R(\lambda \boldsymbol{A})$ $(\lambda \neq 0)$

(3) 设矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 行数相同, 则 $R(\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{B}) \geq \max\{R(\boldsymbol{A}), R(\boldsymbol{B})\}$.

设矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 列数相同, 则 $R\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \geq \max\{R(\boldsymbol{A}), R(\boldsymbol{B})\}$.

本节概要

- 矩阵的秩是刻画矩阵内在性质的一个重要数量特征.
- 本节介绍矩阵的秩的定义、计算、性质等.

一、矩阵的秩的定义

二、矩阵的秩的计算

三、矩阵的秩的性质

二、矩阵的秩的计算

[事实] 阶梯形矩阵的秩等于它的非零行的行数.

例 求矩阵 A 的秩，其中 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

解 一方面，A 是一个阶梯形矩阵，其非零行有 3 行，因此其 4 阶子式全为零，所以 $R(A)\le 3$.

另一方面，以主元为对角元的 3 阶子式 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}=24\neq 0$，

所以 $R(A)\ge 3$. 故 $R(A)=3$.

二、矩阵的秩的计算

例 求矩阵 A 的秩.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

矩阵 A 的其它 3 阶非零子式:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}=8 \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}=-18 \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}=-6$$

事实 矩阵的最高阶非零子式可能不唯一.

二、矩阵的秩的计算

例 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩, 其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

[分析] 在 $\boldsymbol{A}$ 中, 2 阶子式 $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=-12\neq 0$.

$\boldsymbol{A}$ 的 3 阶子式共有 $C_4^3C_5^3=40$ 个,

要从40个子式中找出一个非零子式或验证其全为零是非常麻烦的.

一般的矩阵，当行数和列数较大时，按定义求秩是很麻烦的.

二、矩阵的秩的计算

一般的矩阵，当行数和列数较高时，按定义求秩是很麻烦的. 而阶梯形矩阵的秩容易计算(即它的非零行的行数).

问题

一般矩阵秩的计算能否转换成阶梯形矩阵的秩来计算？

能否将一般的矩阵化为阶梯形矩阵? 能! 用初等变换

问题

初等变换会不会改变矩阵的秩?

【定理】**初等变换不改变矩阵的秩.**

(矩阵的秩是初等变换下的不变量)

二、矩阵的秩的计算

【定理】**初等变换不改变矩阵的秩.** (矩阵的秩是初等变换下的不变量)

[应用] 求矩阵$\boldsymbol{A}$的秩, 只要用初等变换将 $\boldsymbol{A}$ 化成阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$,

由定理，阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的秩即为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

而阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的秩等于它的非零行的行数.

二、矩阵的秩的计算

例 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ 的秩, 并求 A 的一个最高阶非零子式.

解 先求矩阵 A 的秩.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行阶梯形矩阵有 3 个非零行，故 $R(A)=3$.

二、矩阵的秩的计算

解　再求矩阵 A 的一个最高阶非零子式.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

选取行阶梯形矩阵中主元所在的列, 与之对应的是选取矩阵 A 的第一、二、四列.

$$A_0=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 6 & -1 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=B_0$$

$R(A_0)=3$ (为什么？)

计算 A_0 的前 3 行构成的子式:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}=-16\neq 0$$

这是 A 的一个最高阶非零子式.

二、初等变换求矩阵的秩

例 设 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2 & -1\\ 2 & -4 & 8 & 0\\ -2 & 4 & -2 & 3\\ 3 & -6 & 0 & -6\end{pmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$，求 A 及矩阵 $\boldsymbol{B}=(A\ \ \boldsymbol{b})$ 的秩.

解 $$\boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{cccc:c}1 & -2 & 2 & -1 & 1\\ 2 & -4 & 8 & 0 & 2\\ -2 & 4 & -2 & 3 & 3\\ 3 & -6 & 0 & -6 & 4\end{array}\right)\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{cccc:c}1 & -2 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$R(A)=2$

$R(\boldsymbol{B})=3$

二、初等变换求矩阵的秩

例 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & a & -1 & 2 \\ 5 & 3 & b & 6 \end{pmatrix}$，已知 $R(A)=2$，求 a与b 的值.

解 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & a & 2 \\ 5 & 3 & 6 \end{vmatrix}=0 \Longrightarrow -4a+20=0 \Longrightarrow a=5$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & b & 6 \end{vmatrix}=0 \Longrightarrow 4b-4=0 \Longrightarrow b=1$

二、初等变换求矩阵的秩

例 设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&1&2\\3&a&-1&2\\5&3&b&6\end{pmatrix}$，已知 $R(A)=2$，求 a与b 的值.

解法二

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1&2\\3&a&-1&2\\5&3&b&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1&2\\0&a+3&-4&-4\\0&8&b-5&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1&2\\0&1&\frac{1}{8}(b-5)&-\frac{1}{2}\\0&0&ab-5a+3b+17&-4a+20\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow ab-5a+3b+17=0,$$

$$-4a+20=0$$

$$\Rightarrow a=5,b=1.$$

本节概要

- 矩阵的秩是刻画矩阵内在性质的一个重要数量特征.
- 本节介绍矩阵的秩的定义、计算、性质等.

一、矩阵的秩的定义

二、矩阵的秩的计算

三、矩阵的秩的性质

三、矩阵的秩的性质

【定理】初等变换不改变矩阵的秩. 若 $A \sim B$, 则 $R(A) = R(B)$.

问：矩阵的等价标准形是否唯一？r 又是什么？

$$A_{m\times n} \xrightarrow{\text{初等变换}} \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$$

答：矩阵的等价标准形唯一，r 是矩阵 A 的秩.

推论　对任意 $m\times n$ 矩阵 A，设矩阵A的秩为r，则存在 m 阶可逆矩阵 P 和 n 阶可逆矩阵Q，使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

三、矩阵的秩的性质

[推论] 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \boldsymbol{P}^{m\times n}$,则下列说法等价:

(1) $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$;

(2) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$,使得 $\boldsymbol{PAQ} = \boldsymbol{B}$;

(3) $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B})$;

(4) $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 有相同的标准形.

[推论] 设 $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$分别为 m 阶, n 阶可逆矩阵,则:

$$R(\boldsymbol{A}_{m\times n}) = R(\boldsymbol{BA}) = R(\boldsymbol{AC}) = R(\boldsymbol{BAC}) .$$

[性质] (1) $R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \le R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{B})$　　(2) $R(\boldsymbol{AB}) \le \min\{R(\boldsymbol{A}), R(\boldsymbol{B})\}$

谢 谢！

第2.7节 线性方程组的消元法

主讲人： 柳顺义

长安大学理学院

线性方程组的一般问题

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

m, n 不一定相等

问题1 线性方程组在什么情况下有解，什么情况下无解？

问题2 若方程组有解，有多少个解？

问题3 如何求出线性方程组的全部解？

问题4 线性方程组的解不止一个时，解与解之间有什么关系？

本节概要

- 本节介绍矩阵消元法及解的存在与唯一性定理.

一、线性方程组的消元法

二、矩阵消元法

三、线性方程组有解的条件

四、若干例题

本节概要

- 本节介绍矩阵消元法及解的存在与唯一性定理.

一、线性方程组的消元法

二、矩阵消元法

三、线性方程组有解的条件

四、若干例题

一、线性方程组的消元法

例 用消元法求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, & ① \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ② \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4, & ③ \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9. & ④ \end{cases}$$

解

$$\begin{cases} \boxed{2}x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, & ① \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ② \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4, & ③ \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9. & ④ \end{cases} \xrightarrow[③\times 1/2]{①\longleftrightarrow②} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, & ② \\ & ③ \\ & ④ \end{cases}$$

一、线性方程组的消元法

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, & ② \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2, & ③ \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9. & ④ \end{cases} \xrightarrow[\substack{③+①\times(-2) \\ ④+①\times(-3)}]{②+③\times(-1)} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ \\ \\ \\ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{② \times 1/2} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, & ② \\ \\ \\ \end{cases} \xrightarrow[④+②\times(-3)]{③+②\times5} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ \\ \\ \\ \end{cases}$$

一、线性方程组的消元法

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, & ② \\ 2x_4 = -6, & ③ \\ x_4 = -3. & ④ \end{cases} \xrightarrow[③\times 1/2]{④+③\times(-1/2)} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, & ② \\ \\ \end{cases}$$

阶梯形方程组

选取 x_3 为自由未知量，则

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 + 4, \\ x_2 = x_3 + 3, \\ x_4 = -3. \end{cases}$$

令 $x_3 = c$，则通解为

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+4 \\ c+3 \\ c \\ -3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, (c \in R).$$

一、线性方程组的消元法

三种变换：

✓交换方程的次序，记作 $(i) \leftrightarrow (j)$；

✓以非零常数 k 乘某个方程，记作 $(i) \times k$；

✓一个方程的 k 倍加到另一个方程上，记作 $(i) + k(j)$.

事实1 上述三种变换是可逆的.

事实2 变换前后的方程组同解.

事实3 在上述变换过程中，实际上只对方程组的系数和常数进行运算，未知数并未参与运算.

本节概要

- 本节介绍矩阵消元法及解的存在与唯一性定理.

一、线性方程组的消元法

二、矩阵消元法

三、线性方程组有解的条件

四、若干例题

二、矩阵消元法

线性方程组的
增广矩阵

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4, \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9. \end{cases}$$

事实 对线性方程组施行的变换可转化为对增广矩阵的初等行变换.

二、矩阵消元法

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, & ① \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ② \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4, & ③ \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9. & ④ \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} = \overline{A}$$

$$\xrightarrow[③\times 1/2]{①\longleftrightarrow②}$$

$$\xrightarrow[r_3 \times 1/2]{r_1 \leftrightarrow r_2}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, & ② \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2, & ③ \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9. & ④ \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} = B_1$$

二、矩阵消元法

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, & ② \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2, & ③ \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9. & ④ \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} = B_1$$

$$\xrightarrow[\text{④+①×(−3)}]{\substack{\text{②+③×(−1)} \\ \text{③+①×(−2)}}}$$

$$\underbrace{\substack{r_2 + (-1)r_3 \\ r_3 + (-2)r_1 \\ r_4 + (-3)r_1}}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0, & ② \\ -5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -6, & ③ \\ 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -3. & ④ \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & -3 \end{pmatrix} = B_2$$

二、矩阵消元法

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0, & ② \\ -5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -6, & ③ \\ 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -3. & ④ \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & -3 \end{pmatrix} = B_2$$

$$\xrightarrow{② \times 1/2}$$

$$\underbrace{\quad r_2 \times 1/2 \quad}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, & ② \\ -5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -6, & ③ \\ 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -3. & ④ \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & -3 \end{pmatrix} = B_3$$

二、矩阵消元法

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, & ② \\ -5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -6, & ③ \\ 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -3. & ④ \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & -3 \end{pmatrix} = B_3$$

$$\xrightarrow[④+②\times(-3)]{③+②\times 5}$$

$$\underbrace{\begin{matrix} r_3 + 5r_2 \\ r_4 + (-3)r_2 \end{matrix}}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, & ② \\ 2x_4 = -6, & ③ \\ x_4 = -3. & ④ \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = B_4$$

二、矩阵消元法

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, & ② \\ 2x_4 = -6, & ③ \\ x_4 = -3. & ④ \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = B_4$$

$$\xrightarrow[③\times 1/2]{④+③\times(-1/2)}$$

$$\xrightarrow[r_3 \times 1/2]{r_4 + (-1/2)r_3}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, & ② \\ x_4 = -3, & ③ \\ 0 = 0. & ④ \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_5$$

阶梯形方程组

阶梯形矩阵

二、矩阵消元法

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_5 \xrightarrow[r_1+(-1)r_2]{\substack{r_2+(-1)r_3 \\ r_1+(-1)r_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_6$$

阶梯形矩阵　　　　行最简形矩阵

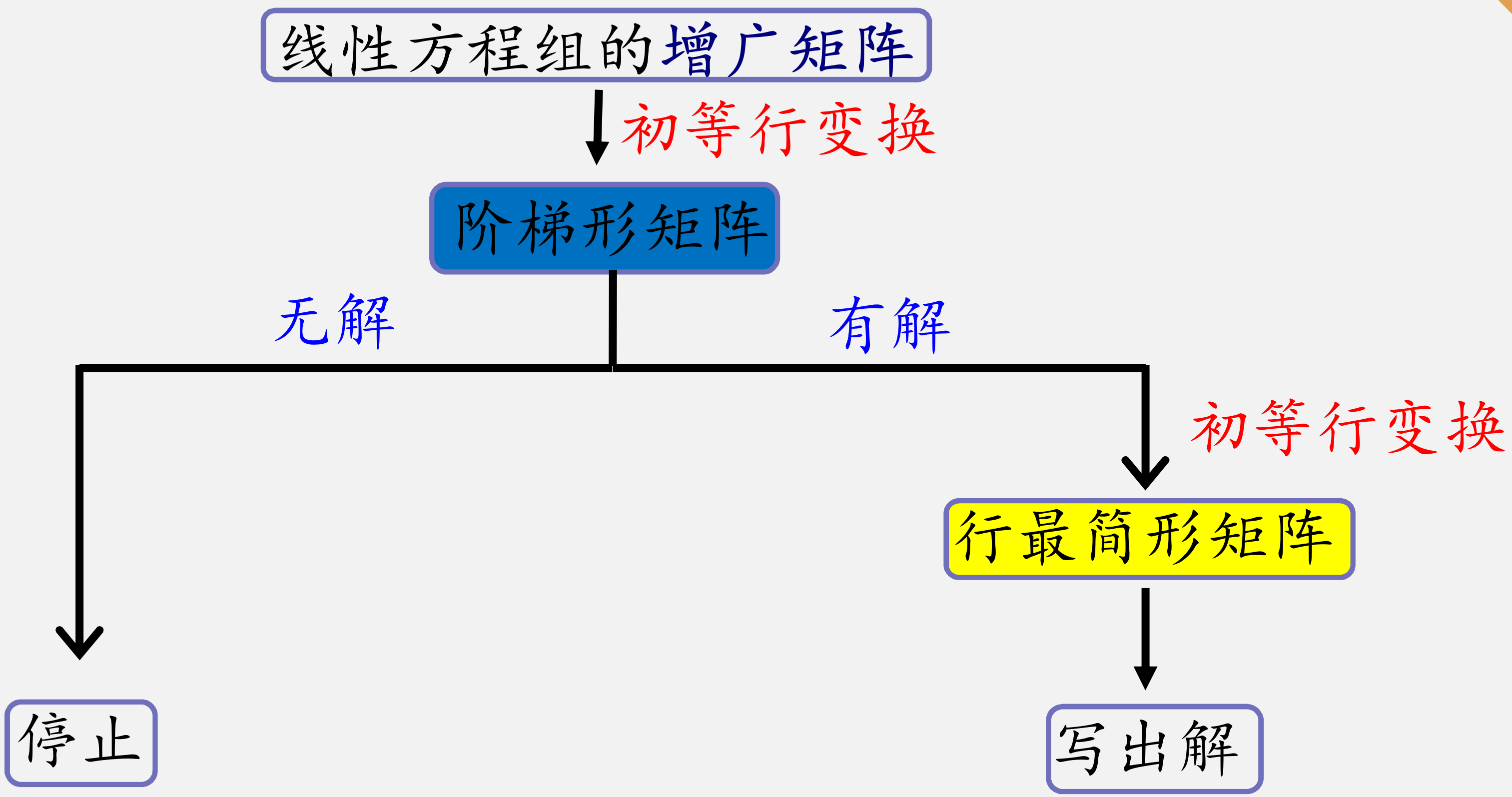
B_6 对应的线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 4, \\ x_2 - x_3 = 3, \\ x_4 = -3. \end{cases}$$

令 $x_3 = c$，则

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+4 \\ c+3 \\ c \\ -3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

二、矩阵消元法

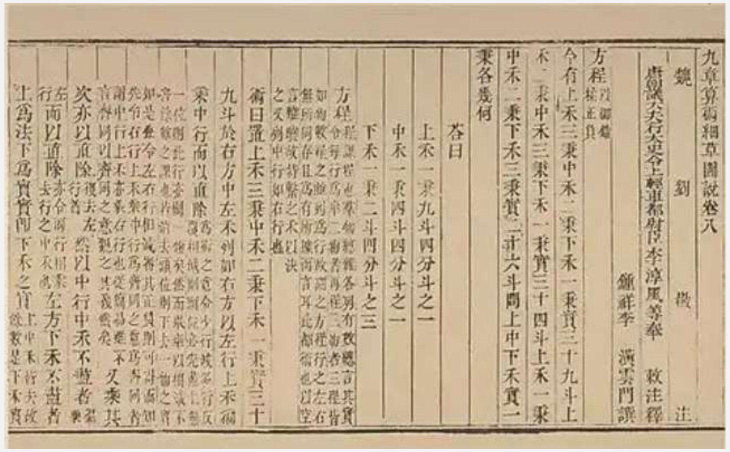


问：能不能用初等列变换？（可互换两列）

《九章算术》之线性方程组的解法

- 本节介绍的消元法称为高斯消元法（Gaussian elimination），由德国数学家高斯于 **19** 世纪所提出.

- 实际上，早在《九章算术》中已出现类似的求解线性方程组的消元法.


九章算術細草圖說卷八
方程
今有上禾三秉中禾二秉下禾一秉實三十九斗上禾二秉中禾三秉下禾一秉實三十四斗上禾一秉中禾二秉下禾三秉實二十六斗問上中下禾實一秉各幾何
荅曰
上禾一秉九斗四分斗之一
中禾一秉四斗四分斗之一
下禾一秉二斗四分斗之三

本节概要

- 本节介绍矩阵消元法及解的存在与唯一性定理.

一、线性方程组的消元法

二、矩阵消元法

三、线性方程组有解的条件

四、若干例题

三、线性方程组有解的条件

[定理] 设 $Ax=b$ 为 n 元线性方程组，则

(1) 无解的充分必要条件是 $R(A)<R(A\ \ b)$;

(2) 有唯一解的充分必要条件是 $R(A)=R(A\ \ b)=n$;

(3) 有无穷多解的充分必要条件是 $R(A)=R(A\ \ b)<n$.

分析 只需证明条件的充分性, 即

- $R(A)<R(A\ \ b)\qquad\Rightarrow$ 无解;
- $R(A)=R(A\ \ b)=n\Rightarrow$ 唯一解;
- $R(A)=R(A\ \ b)<n\Rightarrow$ 无穷多解.

则

✓无解 $\qquad\Rightarrow R(A)<R(A\ \ b)$;

✓唯一解 $\quad\Rightarrow R(A)=R(A\ \ b)=n$;

✓无穷多解 $\Rightarrow R(A)=R(A\ \ b)<n$.

三、线性方程组有解的条件

证 设 $R(A)=r$.为叙述方便，不妨设 $\bar{A}=(A\quad b)$ 的行最简形矩阵为

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} & d_1 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & \cdots & b_{2,n-r} & d_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r1} & \cdots & b_{r,n-r} & d_r \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{array}\right)_{m\times(n+1)}$$

前 r 列　　后 $n-r$ 列

（1） 证 $R(A)<R(A\ \ b)\Rightarrow$ 无解.

$$\boxed{R(A)\leq R(A\ \ b)\leq R(A)+1}$$

若 $R(A)<R(A\ \ b)$，即 $R(A\ \ b)=R(A)+1$，则 $d_{r+1}=1$.

于是第 $r+1$ 行对应矛盾方程 $0=1$，故原线性方程组无解.

三、线性方程组有解的条件

证

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & \cdots & b_{2,n-r} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r1} & \cdots & b_{r,n-r} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times(n+1)}$$

前 r 列　　后 $n-r$ 列

$\tilde{A}$ 对应的线性方程组为

(2) 证 $R(A)=R(A\ \ b)=n \Rightarrow$ 唯一解.

若 $R(A)=R(A\ \ b)=n$，则 $d_{r+1}=0$ 且 $r=n$，从而 b_{ij} 都不出现.

故原线性方程组有唯一解.

三、线性方程组有解的条件

证

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & \cdots & b_{2,n-r} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r,1} & \cdots & b_{r,n-r} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times(n+1)}$$

前 r 列　　后 $n-r$ 列

(3) 证 $R(A)=R(A\ \ b)<n \Rightarrow$ 无穷多解.

若 $R(A)=R(A\ \ b)<n$，

即 $r<n$， 则 $d_{r+1}=0$.

$\tilde{A}$ 对应的线性方程组为

三、线性方程组有解的条件

证

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + b_{11}x_{r+1} + \cdots + b_{1,n-r}x_n = d_1, \\ \qquad x_2 \qquad + b_{21}x_{r+1} + \cdots + b_{2,n-r}x_n = d_2, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad\qquad x_r + b_{r1}x_{r+1} + \cdots + b_{r,n-r}x_n = d_r. \end{cases}$$

令 $x_{r+1}, \ldots, x_n$ 为自由未知量，则

$$\begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1} - \cdots - b_{1,n-r}x_n + d_1, \\ x_2 = -b_{21}x_{r+1} - \cdots - b_{2,n-r}x_n + d_2, \\ \qquad \cdots\cdots \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1} - \cdots - b_{r,n-r}x_n + d_r. \end{cases}$$

再令 $x_{r+1} = c_1,$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{11}c_1 - \cdots - b_{1,n-r}c_{n-r} + d_1 \\ \vdots \\ -b_{r1}c_1 - \cdots - b_{r,n-r}c_{n-r} + d_r \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{pmatrix}$$

$$= c_1\begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + c_{n-r}\begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

方程组的通解

故方程组有无穷多解.

本节概要

- 本节介绍矩阵消元法及解的存在与唯一性定理.

一、线性方程组的消元法

二、矩阵消元法

三、线性方程组有解的条件

四、若干例题

四、例题

例 求解非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$$

解 $$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$R(A) = 2$，$R(\overline{A}) = 3$，故原线性方程组无解.

四、例题

例 求解非齐次线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4, \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9. \end{cases}$$

解

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R(A) = R(\overline{A}) = 3 < 4$，故原线性方程组有无穷多解.

四、例题

解 (续)

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}$$

$$\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

行最简形矩阵对应的方程组为

$$\begin{cases}x_1 \quad - x_3 = 4,\\ \quad x_2 - x_3 = 3,\\ \qquad\quad x_4 = -3.\end{cases}$$

令 x_3 为自由未知量，则

$$\begin{cases}x_1 = x_3 + 4,\\ x_2 = x_3 + 3,\\ x_4 = -3.\end{cases}$$

所以方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c+4\\c+3\\c\\-3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\3\\0\\-3\end{pmatrix},\quad (c\in R).$$

- 如何选取自由未知量？
- 自由未知量的个数是 $n - R(A)$.

四、例题

例 求解齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

解

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -5/3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行最简形矩阵对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 - \frac{5}{3}x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + \frac{4}{3}x_4 = 0, \end{cases}$$

选取 x_3, x_4 为自由未知量，并令 $x_3 = c_1, x_4 = c_2$，得通解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1 + \frac{5}{3}c_2 \\ -2c_1 - \frac{4}{3}c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (c_1, c_2 \in R).$$

四、例题

含参数的线性方程组

例 设有线性方程组

$$\begin{cases}(1+\lambda)x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=3,\\ x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda.\end{cases}$$

问 λ 取何值时，此方程组有：(1) 唯一解; (2) 无解; (3) 无穷多解？并在有无穷多解时求其通解.

四、例题

解 对增广矩阵作初等行变换把它变为阶梯形矩阵.

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1+\lambda & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\end{pmatrix}$$

$$\overset{r_1\leftrightarrow r_3}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3\\ 1+\lambda & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3-(1+\lambda)r_1}{\overset{r_2-r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda\\ 0 & -\lambda & -\lambda(2+\lambda) & -\lambda(1+\lambda)\end{pmatrix}$$

$$\overset{r_3+r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda\\ 0 & 0 & -\lambda(3+\lambda) & (1-\lambda)(3+\lambda)\end{pmatrix}$$

注意:对含参数的矩阵作初等变换时,由于 $\lambda+1$, $\lambda+3$ 等因式可能等于零,故不宜进行下列的变换:

$$r_2-\frac{1}{1+\lambda}r_1 \qquad r_3\times\frac{1}{\lambda+3}$$

如果作了这样的变换，则需对

$$\lambda+1=0 \text{ 及 } \lambda+3=0$$

的情况另作讨论.

四、例题

解

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1+\lambda & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda\\ 0 & 0 & -\lambda(3+\lambda) & (1-\lambda)(3+\lambda)\end{pmatrix}$$

分析:

- 讨论方程组的解的情况，就是讨论参数λ 取何值时，r_2、r_3 是非零行.

- 在 r_2、r_3 中，有 **5** 处出现了λ，要使这 **5** 个元素等于零，λ 可能得取值为 **0, 3, -3, 1**.

- 实际上没有必要对这**4**个可能取值逐一进行讨论，先从有唯一解入手.

四、例题

解

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1+\lambda & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda\\ 0 & 0 & -\lambda(3+\lambda) & (1-\lambda)(3+\lambda)\end{pmatrix}$$

当 $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\neq -3$ 时，$R(A)=R(\overline{A})=3$，有唯一解.

当 $\lambda=0$ 时，$R(A)=1, R(\overline{A})=2$，无解.

当 $\lambda=-3$ 时, $R(A)=R(\overline{A})=2<3$，有无穷多解.

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 3\\ 1 & 1 & -2 & -3\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

通解为 $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\ -2\\ 0\end{pmatrix}, (c\in R)$.

四、例题

$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda. \end{cases}$$

解法2 因为方程组的系数矩阵A为方阵，故由克拉默法则，当$|A| \neq 0$时，方程组有唯一解.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{vmatrix} = (3+\lambda)\lambda^2.$$

当$\lambda \neq 0$且$\lambda \neq -3$时，有唯一解.

当$\lambda = 0$时，

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R(A) = 1, R(\bar{A}) = 2$，方程组无解.

当$\lambda = -3$时，

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R(A) = R(\bar{A}) = 2$，有无穷多个解.

小结

[定理] 设 $Ax=b$ 为 n 元线性方程组，则

(1) 无解的充分必要条件是 $R(A)<R(A\ \ b)$;

(2) 有唯一解的充分必要条件是 $R(A)=R(A\ \ b)=n$;

(3) 有无穷多解的充分必要条件是 $R(A)=R(A\ \ b)<n$.

[定理] n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非零解 $\Longleftrightarrow R(A)<n$.

[推论] 设A是n阶方阵, 则方程组 $Ax=0$ 有非零解 $\Longleftrightarrow |A|=0.$

[定理] 线性方程组 $Ax=b$ 有解 $\Longleftrightarrow R(A)=R(A\ \ b)$.

[定理] 矩阵方程 $AX=B$ 有解 $\Longleftrightarrow R(A)=R(A\ \ B)$.

练习题

练习1 λ 为何值时，方程组有解？并在有解时求其通解.

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = \lambda^2. \end{cases}$$

练习2 a,b 为何值时，方程组有唯一解、无解、无穷多解？

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + ax_3 + 15x_4 = 3, \\ x_1 - 5x_2 - 10x_3 + 12x_4 = b. \end{cases}$$

谢 谢！