第四章 相似矩阵

主讲人： 柳顺义

长安大学理学院

第4.1节 向量的内积

柳顺义| 长安大学理学院
liu@chd.edu.cn

本节概要

本节将在 R^n 中引入度量，如向量的长度、夹角等.

一、向量的内积
- 1. 向量的内积
- 2. 向量的长度
- 3. 向量的夹角

二、正交向量组
- 1. 正交向量组
- 2. 标准正交基

三、正交矩阵
- 1. 正交矩阵
- 2. 正交变换

本节概要

本节将在 R^n 中引入度量，如向量的长度、夹角等.

一、向量的内积
- 1. 向量的内积
- 2. 向量的长度
- 3. 向量的夹角

二、正交向量组
- 1. 正交向量组
- 2. 标准正交基

三、正交矩阵
- 1. 正交矩阵
- 2. 正交变换

知识回顾

在 $\mathbf{R}^3$ 中，两个向量 α 与 β 的内积（数量积）：

$$\alpha \cdot \beta = |\alpha||\beta|\cos\theta$$

设 $\alpha = (x_1, x_2, x_3), \beta = (y_1, y_2, y_3)$，则

$$\alpha \cdot \beta = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

α 的长度： $|\alpha| = \sqrt{\alpha \cdot \alpha} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

α 与 β 的夹角： $\theta = \arccos \dfrac{\alpha \cdot \beta}{|\alpha||\beta|} \quad (0 \le \theta \le \pi)$

一、向量的内积

1. 向量的内积

【定义】设n维实向量$\alpha=(a_1, a_2,\cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$和$\beta=(b_1, b_2,\cdots, b_n)^{\mathrm{T}}$, 称

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

为向量α与β的**内积**, 记作$[\alpha, \beta]$. 即 $[\alpha, \beta]=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$

[说明] (1) 内积是两个向量之间的一种运算, 其结果是一个实数.

(2) 内积的矩阵表示：对列向量：$[\alpha, \beta]=\alpha^{\mathrm{T}}\beta=\beta^{\mathrm{T}}\alpha$.

对行向量：$[\alpha, \beta]=\alpha\beta^{\mathrm{T}}=\beta\alpha^{\mathrm{T}}$.

一、向量的内积

【性质】

(1) $[\alpha,\beta]=[\beta,\alpha]$;

(2) $[\alpha+\beta,\gamma]=[\alpha,\gamma]+[\beta,\gamma]$;

(3) $[\lambda\alpha,\beta]=\lambda[\alpha,\beta]$;

(4) $[\alpha,\alpha]\geq 0$, $[\alpha,\alpha]=0$ 当且仅当 $\alpha=\mathbf{0}$;

(5) 柯西-施瓦兹(Cauchy-Schwarz)不等式:

$$[\alpha,\beta]^2\leq[\alpha,\alpha][\beta,\beta]$$

〈注：等式成立 $\Leftrightarrow$ α 与 β 线性相关〉

柯西-施瓦兹不等式证明

构造t的一元二次函数

$h(t)=[\alpha+t\beta,\alpha+t\beta]$

$=[\alpha,\alpha]+2t[\alpha,\beta]+t^2[\beta,\beta]\geq 0$

故$h(t)=0$无解或仅有一个解

$\therefore \Delta=4[\alpha,\beta]^2-4[\alpha,\alpha][\beta,\beta]\leq 0$

所以 $[\alpha,\beta]^2\leq[\alpha,\alpha][\beta,\beta]$.

等式成立 $\Leftrightarrow \Delta=0$

$\Leftrightarrow h(t)=0$有一个解

$\Leftrightarrow$ 存在t, 使$[\alpha+t\beta,\alpha+t\beta]=0$

$\Leftrightarrow$ 存在t, 使$\alpha+t\beta=\mathbf{0}$

$\Leftrightarrow \alpha$与β线性相关

2. 向量的长度

【定义】向量$\alpha=(a_1, a_2, \ldots, a_n)^T$ 的**长度**:

$$\|\alpha\|=\sqrt{[\alpha,\alpha]}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$$

单位向量: $\|\alpha\|=1$

向量α的**单位化**: $\dfrac{\alpha}{\|\alpha\|}(\alpha\neq\mathbf{0})$

【性质】

非负性 $\|\alpha\|\geq 0;\ \|\alpha\|=0\Leftrightarrow\alpha=\mathbf{0}$

齐次性 $\|\lambda\alpha\| = |\lambda|\cdot\|\alpha\|$

三角不等式 $\|\alpha+\beta\| \leq \|\alpha\|+\|\beta\|$

一、向量的内积

3. 向量的夹角

【定义】 α 与 β 的**夹角**: $\theta = \arccos\dfrac{[\alpha,\beta]}{\|\alpha\|\|\beta\|}$, $(\alpha \neq 0, \beta \neq 0)$

夹角定义的合理性: $[\alpha,\beta]^2 \leq [\alpha,\alpha][\beta,\beta] \Rightarrow -1 \leq \dfrac{[\alpha,\beta]}{\|\alpha\|\|\beta\|} \leq 1$

【定义】 α 与 β **正交**: $[\alpha,\beta]=0$, 记作 $\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{2}$ (当$\alpha\neq 0$, $\beta\neq 0$时)

[说明] (1) 零向量与任意向量正交

(2) 只有零向量才与自己正交

本节概要

本节将在 R^n 中引入度量，如向量的长度、夹角等.

一、向量的内积
- 1. 向量的内积
- 2. 向量的长度
- 3. 向量的夹角

二、正交向量组
- 1. 正交向量组
- 2. 标准正交基

三、正交矩阵
- 1. 正交矩阵
- 2. 正交变换

二、正交向量组

1. 正交向量组

【定义】 两两正交且均为非零向量的向量组, 称为**正交向量组**.

例 已知向量$\alpha_1=(1,1,1)^T$与$\alpha_2=(1,0,-1)^T$正交, 求一个非零向量α_3, 使得$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$两两正交.

解 设 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$ 解线性方程组 $Ax=0$, 则解向量必与α_1, α_2都正交.

$A\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\end{pmatrix}$ 得$Ax=0$的基础解系为: $\xi=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

取$\alpha_3=(1,-2,1)^T$, 则$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$两两正交.

二、正交向量组

【定理1】 正交向量组必线性无关.

证明 对正交向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$, 设: $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = \mathbf{0}$

则有: $[\alpha_i, k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m] = [\alpha_i, \mathbf{0}] = 0$ (i=1,2,⋯,m)

即: $k_1[\alpha_i, \alpha_1]+\cdots+k_i[\alpha_i, \alpha_i]+\cdots+k_m[\alpha_i, \alpha_m]=k_i[\alpha_i, \alpha_i]=0$

由于 $\alpha_i \neq 0$, 故$[\alpha_i, \alpha_i]>0$ ，所以 $k_i = 0$ (i=1,2,⋯,m)

故 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关.

注意定理1的逆命题不成立.

正交是比线性无关更强的概念

二、正交向量组

2. 标准正交基

【定义】 若向量空间V中的一个基是正交向量组(即两两正交),

则称其为V 的**正交基**;

由单位向量构成的正交基, 称为**标准正交基**.

逐步增强

[说明]

基	→	正交基	→	标准正交基
线性无关		两两正交		1. 两两正交 2. 单位向量

二、正交向量组

为什么研究标准正交基?

设 $e_1, e_2, \ldots, e_r$ 是向量空间 V 中的一个正交基，则V 中任意一个向量可唯一表示为

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_r e_r$$

于是 $\lambda_i = \dfrac{[x, e_i]}{[e_i, e_i]} = \dfrac{[x, e_i]}{\| e_i \|^2}, \quad i = 1, 2, \cdots, r$

特别地，若 $e_1, e_2, \ldots, e_r$ 是V 的一个标准正交基，则

$$\lambda_i = [x, e_i], \quad i = 1, 2, \cdots, r$$

二、正交向量组

【性质】 <u>（1）标准正交基不唯一</u>

例1 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的一组标准正交基.

例2 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是$\boldsymbol{R}^3$的标准正交基.

<u>（2）设 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_r$ 是向量空间V的一组标准正交基, 则:</u>

$$[\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j] = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, r)$$

二、正交向量组

【标准正交基的求法】

$$\boxed{\text{空间一组基}} \xrightarrow{\text{正交化}} \boxed{\text{正交基}} \xrightarrow{\text{单位化}} \boxed{\text{标准正交基}}$$

◆ 施密特(Schmidt)正交化

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r \xrightarrow{\text{构造}} \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$$

线性无关组　　　　　　　　正交向量组

二、正交向量组

【施密特正交化】 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关 $\xrightarrow{\text{构造}}$ $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 正交

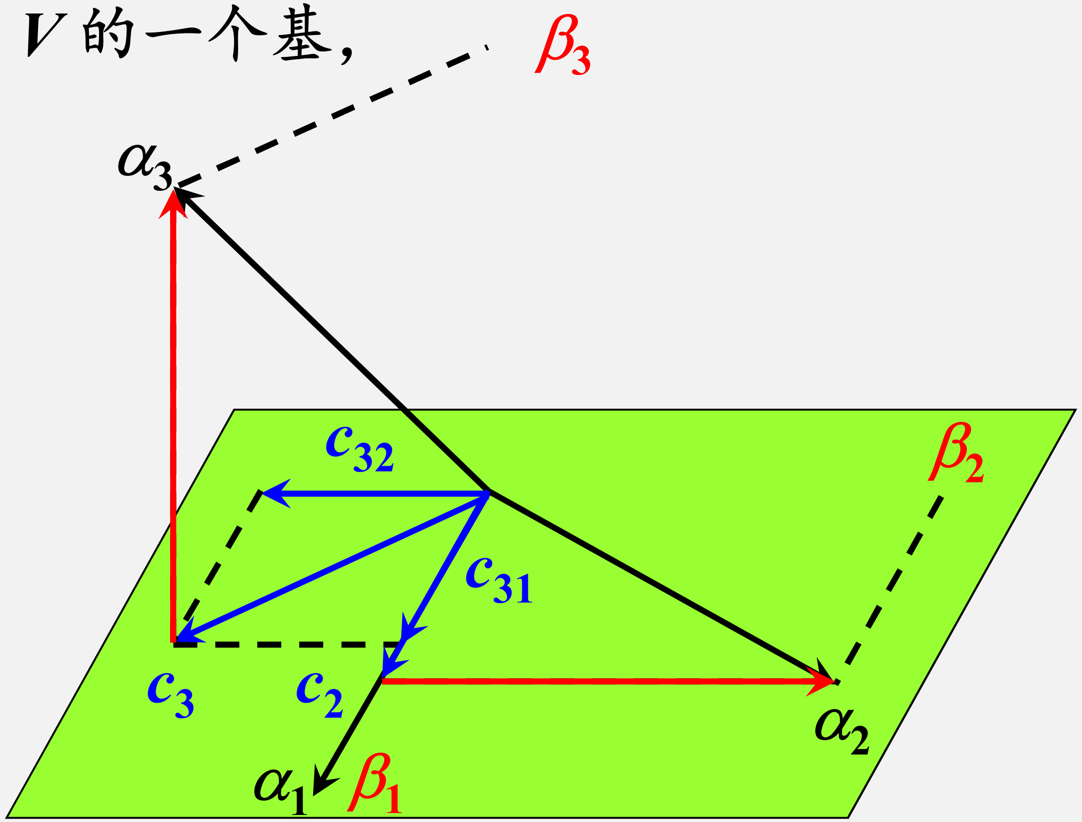
设$\alpha_1, \alpha_2,\cdots, \alpha_r$是向量空间 V 的一个基，

令

$$\beta_1=\alpha_1$$

$$\beta_2=\alpha_2-c_2=\alpha_2-\frac{[\alpha_2,\beta_1]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1$$

$$\beta_3=\alpha_3-c_3$$



二、正交向量组

【施密特正交化】

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是向量空间 V 的一个基，令

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{[\alpha_2, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]}\beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{[\alpha_3, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]}\beta_1 - \frac{[\alpha_3, \beta_2]}{[\beta_2, \beta_2]}\beta_2$$

$\cdots$

$$\beta_r = \alpha_r - \frac{[\alpha_r, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]}\beta_1 - \frac{[\alpha_r, \beta_2]}{[\beta_2, \beta_2]}\beta_2 - \cdots - \frac{[\alpha_r, \beta_{r-1}]}{[\beta_{r-1}, \beta_{r-1}]}\beta_{r-1}$$

则 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 两两正交，并且与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 等价.

故 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 是向量空间 V 的一个正交基.

二、正交向量组

施密特正交化公式

$$\boxed{\beta_r = \alpha_r - \frac{[\alpha_r,\beta_1]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1 - \frac{[\alpha_r,\beta_2]}{[\beta_2,\beta_2]}\beta_2 - \cdots - \frac{[\alpha_r,\beta_{r-1}]}{[\beta_{r-1},\beta_{r-1}]}\beta_{r-1}}$$

◆ 单位化过程

$$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r \xrightarrow{\text{单位化}} \gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r$$

取 $\gamma_i = \dfrac{\beta_i}{\|\beta_i\|} \quad (i=1,2,\cdots,r)$

二、正交向量组

例 已知 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ 是$\boldsymbol{R}^3$的一组基, 试用施密特正交化方法, 求 $\boldsymbol{R}^3$ 的一组标准正交基.

解 先正交化, 令 $\beta_1=\alpha_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$;

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{[\alpha_2,\beta_1]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}-\frac{-1}{2}(1,0,1)^{\mathrm{T}}=\frac{1}{2}(1,2,-1)^{\mathrm{T}};$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{[\alpha_3,\beta_1]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1-\frac{[\alpha_3,\beta_2]}{[\beta_2,\beta_2]}\beta_2$$

$$=(1,0,2)^{\mathrm{T}}-\frac{3}{2}(1,0,1)^{\mathrm{T}}-\frac{-1/2}{3/2}\bullet\frac{1}{2}(1,2,-1)^{\mathrm{T}}=\frac{1}{3}(-1,1,1)^{\mathrm{T}}.$$

二、正交向量组

例 已知 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ 是$\boldsymbol{R}^3$的一组基, 试用施密特正交化方法, 求 $\boldsymbol{R}^3$ 的一组标准正交基.

解 再单位化, 令

$$\gamma_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^{\mathrm{T}},$$

$$\gamma_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)^{\mathrm{T}},$$

$$\gamma_3=\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)^{\mathrm{T}}.$$

则 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 即为所求.

本节概要

本节将在 R^n 中引入度量，如向量的长度、夹角等.

一、向量的内积
- 1. 向量的内积
- 2. 向量的长度
- 3. 向量的夹角

二、正交向量组
- 1. 正交向量组
- 2. 标准正交基

三、正交矩阵
- 1. 正交矩阵
- 2. 正交变换

三、正交矩阵

1. 正交矩阵

（等价地， $AA^{\mathrm{T}}=E$ 或 $A^{-1}=A^{\mathrm{T}}$）

【定义】 若 n 阶矩阵 A 满足 $A^{\mathrm{T}}A=E$, 则称A为**正交矩阵**.

【判定定理】 n 阶方阵 A 为正交矩阵 $\Leftrightarrow$ A的n个列(行)向量都是单位向量, 且两两正交 (即 n个列(行) 向量构成R^n的一个标准正交基) .

证明 设 $A=(\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_n)$,

$$A\text{为正交矩阵} \Leftrightarrow A^{\mathrm{T}}A=\begin{pmatrix}\alpha_1^{\mathrm{T}}\\ \alpha_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \alpha_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}(\alpha_1\quad \alpha_2\quad \cdots\quad \alpha_n)=\begin{pmatrix}\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_1 & \alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_n\\ \alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_1 & \alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_1 & \alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_n\end{pmatrix}=E$$

$$\Leftrightarrow [\alpha_i,\alpha_j]=\alpha_i^{\mathrm{T}}\alpha_j=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases} \Leftrightarrow \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\text{为标准正交基}$$

三、正交矩阵

【性质】

(1) 若A为正交矩阵, 则 A可逆, 且 $A^{-1}=A^{T}$.

正交矩阵是比可逆矩阵更强的概念

(2) 若A为正交矩阵, 则 A^{-1}（即 A^{T}）也为正交矩阵.

(3) 若A、B为正交矩阵, 则 AB 也为正交矩阵.

(4) 若 A 为正交矩阵, 则 $|A|=1$或 $|A|=-1$.

三、正交矩阵

2. 正交变换

【定义】若 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵, 则线性变换 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 称为**正交变换.**

【性质】设 $\boldsymbol{A}$为 n 阶正交矩阵, 则对任意的$\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}^n$, 有:

(1) $[A\alpha, A\beta]=(A\alpha)^{\mathrm{T}}(A\beta)=\alpha^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}A\beta=\alpha^{\mathrm{T}}\beta=[\alpha,\beta]$

正交变换保持向量内积不变

(2) $\|A\alpha\|=\sqrt{[A\alpha, A\alpha]}=\sqrt{[\alpha,\alpha]}=\|\alpha\|$

正交变换保持向量长度不变

[推论] 空间中的一组标准正交基经正交变换仍为标准正交基

谢 谢!

第4.2节 方阵的特征值和特征向量

柳顺义| 长安大学理学院

liu@chd.edu.cn

引例

设 $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}, u=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}, v=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$，则

$$Au=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\ -1\end{pmatrix}$$

$$Av=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 2\end{pmatrix}=2v$$

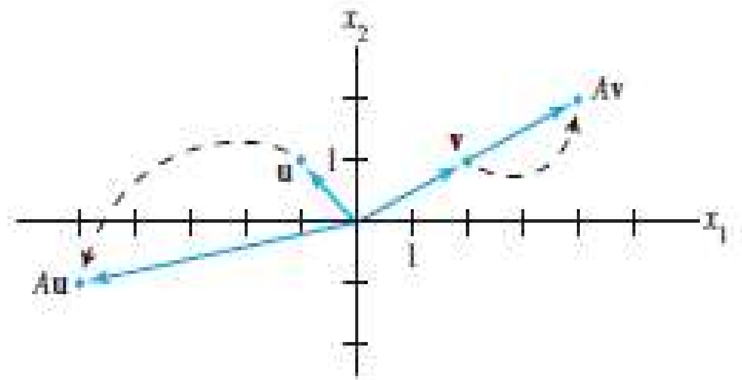


FIGURE 1 Effects of multiplication by A.

$$Av=\lambda v\ (v\neq 0)$$

本节概要

一、基本概念
- 1. 特征值和特征向量的定义
- 2. 特征值和特征向量的求法

二、重要性质
- 1. 特征值的性质
- 2. 不同特征值的特征向量之间的关系

本节概要

一、基本概念
- 1. 特征值和特征向量的定义
- 2. 特征值和特征向量的求法

二、重要性质
- 1. 特征值的性质
- 2. 不同特征值的特征向量之间的关系

一、基本概念

1. 特征值与特征向量的定义

【定义】 设A是n阶方阵，若存在数$\lambda\in P$和非零向量$x\in P^n$，使得

$$Ax=\lambda x$$

则称λ是A的一个**特征值**，x为A的对应于特征值λ的**特征向量**.

例 因为 $\begin{pmatrix}3 & -4\\ 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$,

则 $\lambda=1$ 为 $\begin{pmatrix}3 & -4\\ 2 & -3\end{pmatrix}$ 的特征值，$\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$ 为对应于$\lambda=1$ 的特征向量.

一、基本概念

1. 特征值与特征向量的定义

【定义】 设A是n 阶方阵, 若存在数$\lambda \in P$和非零向量 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P}^n$, 使得

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

则称λ是 A 的一个**特征值**, $\boldsymbol{x}$ 为 A的对应于特征值λ 的**特征向量**.

[说明] (1) 为什么要求特征向量是非零向量?

(2) 一个特征向量只能对应于一个特征值;

(3) 对应于同一特征值的特征向量不唯一.

一、基本概念

2. 特征值和特征向量的求法

λ 为矩阵 A 的特征值

$\Leftrightarrow$ 存在非零向量 $x \in P^n$, 使得 $Ax = \lambda x$

$\Leftrightarrow$ 存在 $x \neq 0$，使得 $(A-\lambda E)x = 0$

$\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组 $(A-\lambda E)X = 0$ 有非零解

$\Leftrightarrow$ 系数行列式 $|A-\lambda E| = 0$

- λ 为矩阵 A 的特征值当且仅当 λ 满足 $|A-\lambda E| = 0$.
- 矩阵 A 的对应于特征值 λ 的全部特征向量为齐次线性方程组 $(A-\lambda E)X = 0$ 的所有<u>非零解向量</u>.

一、基本概念

矩阵 A 的**特征方程**： $|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$

特征方程 $|A-\lambda E| = 0$ 的根为 A 的特征值

矩阵 A 的**特征多项式**：

$$f_A(\lambda) = |A-\lambda E| = (-\lambda)^n + c_1(-\lambda)^{n-1} + \cdots + c_{n-1}(-\lambda) + c_n$$

注：方阵 A 的特征多项式也可定义为 $|\lambda E-A|$．

一、基本概念

矩阵 A 的**特征方程**: $|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$

矩阵A的**特征多项式**:

$$f_A(\lambda) = |A-\lambda E| = (-\lambda)^n + c_1(-\lambda)^{n-1} + \cdots + c_{n-1}(-\lambda) + c_n$$

复数域内必可分解为 $= (\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda)$

n 阶矩阵 A 在复数域内恒有 n 个特征值（重根按重数计算）

特征值 λ_i 的**代数重数**: λ_i 作为特征方程的根的重数

一、基本概念

- 矩阵 A 的对应于特征值 λ 的全部特征向量为齐次线性方程组 $(A-\lambda E)X=0$ 的所有非零解向量.

【定义】 设λ_0为A的一个特征值, 则$(A-\lambda_0 E)x=0$的解空间称为矩阵 A 对应于λ_0的**特征子空间**, 记作 V_{λ_0}.

事实. 矩阵 A对应于λ_0的特征子空间 V_{λ_0}中的所有非零向量即为 A 对应于λ_0的全部特征向量.

特征值λ_i的**几何重数**: $\dim V_{\lambda_i} = n - R(A-\lambda_i E)$

$1 \le$ 特征值λ_i的 几何重数 $\le$代数重数

一、基本概念

例1 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量，并指出相应的代数重数和几何重数.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

解 **Step 1-由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程，求出特征值.**

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}=(-1-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda)+4(2-\lambda)$$

$$=(2-\lambda)(1-\lambda)^2$$

令 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=0$，得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2,\ \lambda_2=\lambda_3=1.$

所以 $\lambda_1=2$ 的代数重数为1，$\lambda_2=\lambda_3=1$的代数重数为2.

一、基本概念

Step 2-求出 $(A-\lambda_i E)\boldsymbol{x}=0$ 的基础解系,得到特征向量.

当 $\lambda_1=2$ 时,解线性方程组 $(A-2E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 0\\ -4 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

同解方程组为 $\begin{cases}x_1=0\\ x_2=0\end{cases}$

得基础解系 $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

因此,对应于特征值 $\lambda_1=2$ 的全部特征向量为$k_1\boldsymbol{p}_1$, $(k_1\neq 0)$.

且 $\lambda_1=2$ 的几何重数为1.

一、基本概念

当 $\lambda_2=\lambda_3=1$时, 解线性方程组 $(A-E)x=\mathbf{0}$

$$A-E=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -4 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

同解方程组为 $\begin{cases}x_1=-x_3\\ x_2=-2x_3\end{cases}$

得基础解系 $\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}-1\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$

故对应于特征值 $\lambda_2=\lambda_3=1$的全部特征向量为$k_2\boldsymbol{p}_2\ (k_2\neq0)$,

且 $\lambda_2=\lambda_3=1$的几何重数为1.

例2 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解 矩阵 A 的特征多项式为

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&2\\2&1-\lambda&2\\2&2&1-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{c_1+c_2+c_3}\begin{vmatrix}5-\lambda&2&2\\5-\lambda&1-\lambda&2\\5-\lambda&2&1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(5-\lambda)\begin{vmatrix}1&2&2\\1&1-\lambda&2\\1&2&1-\lambda\end{vmatrix}=(5-\lambda)(1+\lambda)^2$$

则 A 的特征值为$\lambda_1=5,\ \lambda_2=\lambda_3=-1.$

例3 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -4 & 1 & 3\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解 矩阵 A 的特征多项式为

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-2-\lambda & 1 & 1\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ -4 & 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix}-2-\lambda & 1\\ -4 & 3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=-(\lambda+1)(\lambda-2)^2$$

则 A 的特征值为$\lambda_1=-1,\ \lambda_2=\lambda_3=2.$

一、基本概念

例4 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解 矩阵 A 的特征多项式为

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & -2-\lambda & 4 \\ 2 & 4 & -2-\lambda \end{vmatrix}=-\lambda^3-3\lambda^2+24\lambda-28.$$

经试根知，2是一个根.

上式 $=-(\lambda-2)(\lambda^2+5\lambda-14)$ $=-(\lambda-2)(\lambda+7)(\lambda-2)$

则 A 的特征值为$\lambda_1=-7,\ \lambda_2=\lambda_3=2.$

本节概要

一、基本概念

1. 特征值和特征向量的定义
2. 特征值和特征向量的求法

二、重要性质

1. 特征值的性质
2. 不同特征值的特征向量之间的关系

二、重要性质

1. 特征值的性质

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

[分析]

$$f_A(\lambda) = |A-\lambda E| = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda) + \cdots$$

$$= (-\lambda)^n + (a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})(-\lambda)^{n-1} + \cdots \qquad (1)$$

设 $f_A(\lambda)=0$ 在 C 中的n个根为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 即$A$的 n 个特征值.

$$f_A(\lambda) = |A-\lambda E| = (\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda)$$

$$= (-\lambda)^n + (\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)(-\lambda)^{n-1} + \cdots \qquad (2)$$

二、重要性质

$$f_A(\lambda) = |A-\lambda E| = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda) + \cdots$$
$$= (-\lambda)^n + \underline{(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})}(-\lambda)^{n-1} + \cdots \qquad \textbf{(1)}$$

$$f_A(\lambda) = |A-\lambda E| = (\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda)$$
$$= (-\lambda)^n + \underline{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)}(-\lambda)^{n-1} + \cdots \qquad \textbf{(2)}$$

【特征值的和与积】设n阶方阵A的所有特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则:

（1） $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n = a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn} = \mathrm{tr}(A)$ 　A的**迹**

对比式 (1) 和 (2) 中 $(-\lambda)^{n-1}$ 的系数

（2） $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = |A|$

考查式 (2) 中 $\lambda = 0$ 的情形

【定理】 方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow A$ 的特征值全都不为 0.

二、重要性质

若非零向量 p 是矩阵 A 对应于特征值 λ 的特征向量，则

- $k\lambda$ 是 kA 的特征值，对应的特征向量也是 p .
- λ^k 是 A^k 的特征值，对应的特征向量也是 p .
- 设 $f(x)=a_m x^m+\ldots+a_1 x+a_0$,则 $\varphi(\lambda)$ 是矩阵多项式

$$\varphi(A)=a_m A^m+\ldots+a_1 A+a_0 E$$

的特征值，对应的特征向量也是 p .

- λ 是 A^{T} 的特征值.

二、重要性质

若非零向量 $\boldsymbol{p}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ 的特征向量，则

- 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，$\mathbf{1}/\lambda$ 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值，对应的特征向量仍然是 $\boldsymbol{p}$.
- 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，$|A|/\lambda$ 是 A^{*} 的特征值，对应的特征向量也是 $\boldsymbol{p}$.

二、重要性质

例　设3 阶方阵 A 的特征值为$1, -2, -3$，求

(1)　$|A| = ?$

(2)　A^{-1} 的特征值为？

(3)　A^* 的特征值为？

(4)　$A^3+3A-2E$ 的特征值为？

(5)　$|A^3+3A-2E| = ?$

二、重要性质

2. 不同特征值的特征向量之间的关系

【定理】 设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$是方阵$A$的$m$个互不相等的特征值，$\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_m$依次是与之对应的特征向量，则$\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_m$线性无关.

属于不同特征值的特征向量线性无关

[推论] 设λ_1,λ_2是方阵A的两个不同的特征值，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$和$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$分别是对应于$\lambda_1,\lambda_2$的线性无关的特征向量，则：$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$线性无关.

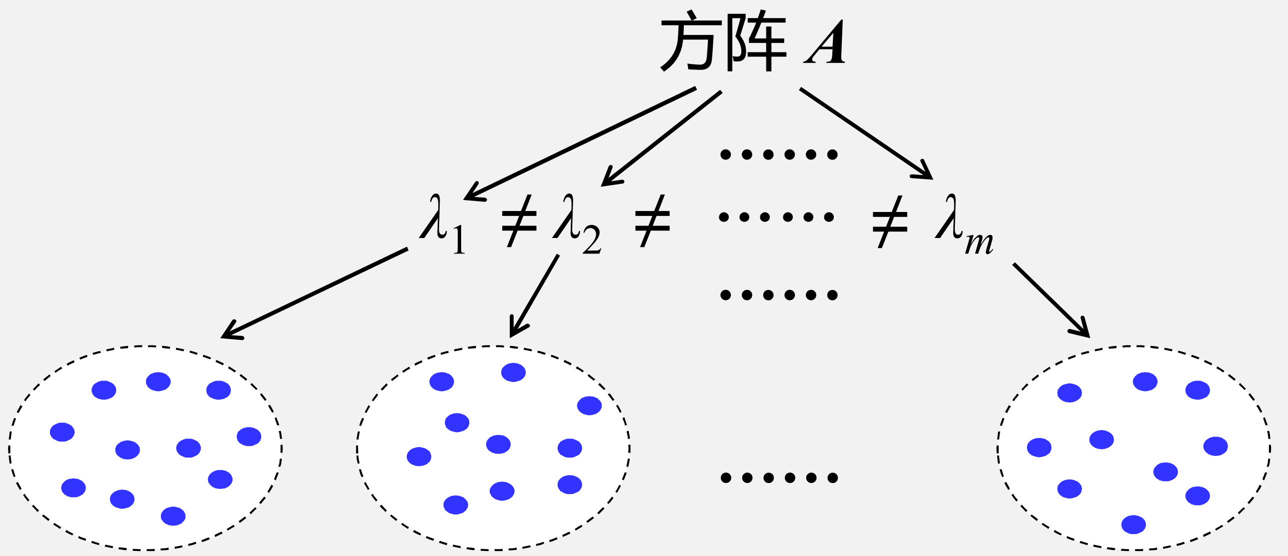
属于不同特征值的线性无关的特征向量合起来仍线性无关

【注：该结论对多于两个的特征值仍然成立】

二、重要性质

$|A-\lambda E|=0$

$(A-\lambda_i E)x=0$



基础解系 $\underbrace{p_{11}, p_{12}, \cdots, p_{1r}\ , p_{21}, p_{22}, \cdots, p_{2s}\ , \cdots\cdots\ , p_{m1}, p_{m2}, \cdots, p_{mt}}_{\text{线性无关}}$

谢 谢！

第4.3节 相似矩阵

柳顺义| 长安大学理学院

liu@chd.edu.cn

本节概要

本节讨论矩阵在相似关系下的对角化问题：对于方阵 A，能否找到可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 成为对角矩阵？

一、相似矩阵
- 1. 相似矩阵的定义
- 2. 相似矩阵的性质

二、方阵的对角化
- 1. 方阵可对角化的定义
- 2. 方阵可对角化的判定定理

本节概要

一、相似矩阵
- 1. 相似矩阵的定义
- 2. 相似矩阵的性质

二、方阵的对角化
- 1. 方阵可对角化的定义
- 2. 方阵可对角化的判定定理

一、相似矩阵

1. 相似矩阵的定义

【定义】设 A, B 都是 n 阶方阵，如果存在可逆矩阵 P 使得

$$P^{-1}AP = B,$$

则称矩阵 A 与 B 相似，并称 B 为矩阵 A 的相似矩阵.

- 相似关系具有反身性、对称性和传递性.
- “相似”与“等价”的关系：相似必等价，但等价未必相似.

A 与 B 等价 $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 P 和 Q, 使得 $PAQ = B$.

A 与 B 相似 $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP = B$.

一、相似矩阵

2. 相似矩阵的性质

【定理】相似矩阵有相同的特征多项式、特征值、行列式、迹.

证明: 设 A 和 B 相似, 则存在可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP=B$

$$f_B(\lambda)=|B-\lambda E|=|P^{-1}AP-P^{-1}(\lambda E)P|=|P^{-1}||(A-\lambda E)||P|=|A-\lambda E|=f_A(\lambda)$$

[注意] 有相同特征多项式的矩阵不一定相似

反例 $E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ 和 $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$ 具有相同的特征多项式, 但对任意的可逆矩阵P, 都有 $P^{-1}EP=E$, 即E只能和自己相似, 故 E 和 A 不相似.

[推论] 若矩阵 A与对角矩阵$\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ 相似, 则$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 就是 A 的n个特征值.

对角矩阵的特征值即为其主对角线上的元素

本节概要

一、相似矩阵

1. 相似矩阵的定义
2. 相似矩阵的性质

二、方阵的对角化

1. 方阵可对角化的定义
2. 方阵可对角化的判定定理

二、方阵的对角化

1. 可对角化的定义

【定义】 若方阵 A 能与某对角矩阵相似, 则称 A 可对角化.

即存在可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP=\Lambda$ (Λ为对角矩阵).

问题 (1) n 阶方阵 A 可对角化的条件是什么?

(2) 如果方阵 A 可对角化, 与哪个对角矩阵相似?

相应的相似变换矩阵 P 是什么?

二、方阵的对角化

2. 可对角化的判定定理

n 阶方阵 A 可对角化 $\Leftrightarrow$ A 有 n 个线性无关的特征向量

证明: $(\Leftarrow)$ 设 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ 为矩阵 A 的 n 个线性无关的特征向量, 其对应的特征值分别为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则: $A\boldsymbol{p}_i = \lambda_i \boldsymbol{p}_i (i = 1, 2, \cdots, n)$

令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1 \ \boldsymbol{p}_2 \cdots \boldsymbol{p}_n)$, 则 $A\boldsymbol{P} = A(\boldsymbol{p}_1 \ \ \boldsymbol{p}_2 \ \ \cdots \ \ \boldsymbol{p}_n) = (A\boldsymbol{p}_1 \ \ A\boldsymbol{p}_2 \ \ \cdots \ \ A\boldsymbol{p}_n)$

$$= (\lambda_1\boldsymbol{p}_1 \ \ \lambda_2\boldsymbol{p}_2 \ \ \cdots \ \ \lambda_n\boldsymbol{p}_n)$$

$$= (\boldsymbol{p}_1 \ \ \boldsymbol{p}_2 \ \ \cdots \ \ \boldsymbol{p}_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$= \boldsymbol{P}\Lambda$$

因为 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ 线性无关,

因此矩阵 $\boldsymbol{P}$ 可逆.

所以 $\boldsymbol{P}^{-1}A\boldsymbol{P} = \Lambda$, 故 A 可对角化.

以上证明也是方阵对角化的具体做法

二、方阵的对角化

n 阶方阵 A 可对角化 $\Leftrightarrow$ A 有 n 个线性无关的特征向量

$(\Rightarrow)$

依题意，存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$

$\therefore\ \boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P\Lambda}$

记 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2\ \cdots\ \boldsymbol{p}_n)$，则由上式可得

$\left(\boldsymbol{Ap}_1\quad \boldsymbol{Ap}_2\quad \cdots\quad \boldsymbol{Ap}_n\right)=\left(\lambda_1\boldsymbol{p}_1\quad \lambda_2\boldsymbol{p}_2\quad \cdots\quad \lambda_n\boldsymbol{p}_n\right)\quad \therefore\ \boldsymbol{Ap}_i=\lambda_i\boldsymbol{p}_i\,(i=1,2,\cdots,n)$

因此，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的 n 个特征值，$\boldsymbol{p}_i$ 是对应于 λ_i 的特征向量.

因为矩阵 $\boldsymbol{P}$ 可逆，故 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n$ 线性无关.

即：矩阵 A 有 n 个线性无关的特征向量.

二、方阵的对角化

问题: (1) n 阶方阵 A 可对角化的条件是什么?

答: A有n个线性无关的特征向量.

问题: (2) 如果矩阵 A 可对角化, 与哪个对角矩阵相似?

相应的相似变换矩阵 P 是什么?

答: 与以 A 的特征值为主对角元构成的对角矩阵相似;

相似变换矩阵P 由 A的 n 个线性无关的特征向量为列向量构成.

[注意] (1) P 中特征向量的位置与对角阵中特征值的位置一一对应;

(2) 对角矩阵 Λ不唯一; 相似变换矩阵 P 不唯一.

二、方阵的对角化

定理 n 阶方阵 A 可对角化 $\Longleftrightarrow$ A 有 n 个线性无关的特征向量

推论1 如果 n 阶方阵 A 有 n 个不同的特征值，则 A 可对角化.

[回顾] 设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$是方阵$A$的$m$个互不相等的特征值，$p_1,p_2,\cdots,p_m$依次是与之对应的特征向量，则 $p_1,p_2,\cdots,p_m$ 线性无关.

当 n 阶方阵 A 的特征方程有重根时，就不一定有 n 个线性无关的特征向量，从而不一定能对角化.

推论2 方阵 A 可对角化当且仅当它的每个特征值的代数重数与几何重数相等.

二、方阵的对角化

推论2 n 阶方阵 A 可对角化当且仅当它的每个特征值的代数重数与几何重数相等.

证明:

设 A 的不同特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$　　$|A-\lambda E|=(\lambda_1-\lambda)^{p_1}(\lambda_2-\lambda)^{p_2}\cdots(\lambda_s-\lambda)^{p_s}$

代数重数为 $p_1,p_2,\cdots,p_s$　　$p_1+p_2+\cdots+p_s=n$

几何重数为 $q_1,q_2,\cdots,q_s$　　$q_i=n-R(A-\lambda_i E)$

$$q_1\le p_1,q_2\le p_2,\cdots,q_s\le p_s$$

$$n=q_1+q_2+\cdots+q_s\le p_1+p_2+\cdots+p_s=n$$

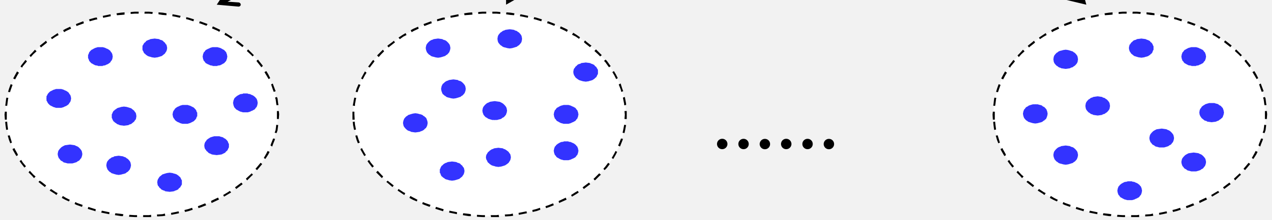
$$\Rightarrow\quad q_1=p_1,q_2=p_2,\cdots,q_s=p_s.$$

二、方阵的对角化

n 阶方阵 A可对角化

$|A-\lambda E|=0$ $\qquad$ $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \cdots\cdots \neq \lambda_s$

$(A-\lambda_i E)\boldsymbol{x}=0$



基础解系

线性无关

$$\underbrace{\boldsymbol{p}_{11}, \boldsymbol{p}_{12}, \cdots, \boldsymbol{p}_{1,q1} \quad \boldsymbol{p}_{21}, \boldsymbol{p}_{22}, \cdots, \boldsymbol{p}_{2,q2} \cdots\cdots \quad \boldsymbol{p}_{s1}, \boldsymbol{p}_{s2}, \cdots, \boldsymbol{p}_{s,qs}}$$

$n=$ 几何重数之和 $\leq$ 代数重数之和 $=n$

二、方阵的对角化

例1　判断矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & -2 & 4\\ 2 & 4 & -2\end{pmatrix}$ 能否对角化？

解　第一步，计算矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}\mathbf{1}-\lambda & -\mathbf{2} & \mathbf{2}\\ -\mathbf{2} & -\mathbf{2}-\lambda & \mathbf{4}\\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & -\mathbf{2}-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-\mathbf{2})^2(\lambda+\mathbf{7})$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2, \lambda_3=-7.$

第二步，计算矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值的代数重数和几何重数.

二、方阵的对角化

解 第二步，计算矩阵 A 的每个特征值的代数重数和几何重数.

对于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2$ ： $A-2E=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 2\\ -2 & -4 & 4\\ 2 & 4 & -4\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

因为 $R(A-2E)=1$, 所以 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 的几何重数为3 - 1 = 2.

因此 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 的代数重数与几何重数相等.

对于特征值 $\lambda_3=-7$ ： $A+7E=\begin{pmatrix}8 & -2 & 2\\ -2 & 5 & 4\\ 2 & 4 & 5\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-2 & 5 & 4\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$,

因为 $R(A+7E)=2$, 所以 $\lambda_3=-7$ 的几何重数为3 - 2 = 1.

因此 $\lambda_3=-7$ 的代数重数与几何重数也相等. 故 A 可对角化.

二、方阵的对角化

例2 判断矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ 能否对角化？

解 第一步，计算矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 1 & 0\\ -4 & 3-\lambda & 0\\ 1 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(1-\lambda)^2$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=1.$

第二步，计算矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值的代数重数和几何重数.

二、方阵的对角化

解　第二步，计算矩阵 A 的每个特征值的代数重数和几何重数.

对于特征值 $\lambda_1 = 2$： $A-2E=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

因为 $R(A-2E)=2$，所以 $\lambda_1 = 2$ 的几何重数为 $3-2=1$.

因此 $\lambda_1 = 2$ 的代数重数与几何重数相等.

对于特征值 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ ： $A-E=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

因为 $R(A-E)=2$ ，所以 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 的几何重数为 $3-2=1$.

因此 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 的代数重数与几何重数不相等.　故 A 不可对角化.

二、方阵的对角化

例3 设 $A=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$，问 $\boldsymbol{A}$ 能否对角化？

若 $\boldsymbol{A}$ 能对角化，求出可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵；

并计算 $\boldsymbol{A}^{100}$.

解

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix} \mathbf{4}-\lambda & \mathbf{6} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{3} & -\mathbf{5}-\lambda & \mathbf{0} \\ -\mathbf{3} & -\mathbf{6} & \mathbf{1}-\lambda \end{vmatrix}=-(\lambda-\mathbf{1})^2(\lambda+\mathbf{2})$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=-2.$

二、方阵的对角化

将$\lambda_1=\lambda_2=1$代入$(A-\lambda E)x=0$，解之得基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

将$\lambda_3=-2$代入$(A-\lambda E)x=0$，解之得基础解系 $\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

所以 A 可对角化.

令 $P=(\xi_1\quad\xi_2\quad\xi_3)=\begin{pmatrix}-2&0&-1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$.

注意：矩阵P的列向量和对角矩阵中特征值的位置要相互对应.

二、方阵的对角化

$A^{100}=?$

由 $P^{-1}AP=\Lambda$，得 $A=P\Lambda P^{-1}$，且易知 $P^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ -1 & -2 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$，

$$A^{100}=\underbrace{(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})\cdots(P\Lambda P^{-1})}_{100\text{项}}=P\Lambda^{100}P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}-2 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1^{100} & & \\ & 1^{100} & \\ & & (-2)^{100}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ -1 & -2 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2-2^{101} & 2-2^{101} & 0\\ 2^{100}-1 & 2^{100}-1 & 0\\ 2^{100}-1 & 2^{101}-2 & 1\end{pmatrix}.$$

二、方阵的对角化

例4 设三阶方阵 A 的特征值为1, 2, –3, 求 $|A^3-3A+E|$.

解法1 利用特征值.

因为 A 的特征值为1, 2, –3, 则 $\varphi(A)=A^3-3A+E$ 的特征值分别为:

$$\varphi(1)=1^3-3\times1+1=-1;$$

$$\varphi(2)=2^3-3\times2+1=3;$$

$$\varphi(-3)=(-3)^3-3\times(-3)+1=-17$$

故 $|A^3-3A+E|=(-1)\times3\times(-17)=51.$

二、方阵的对角化

例4 设三阶方阵 A 的特征值为1, 2, −3, 求 $|A^3-3A+E|$.

解法2 由已知, A与对角阵 $\Lambda=\mathrm{diag}(1,2,-3)$ 相似, 即存在可逆矩阵 P, 使 $P^{-1}AP=\Lambda$.

$$A=P\Lambda P^{-1}, A^3=P\Lambda^3P^{-1}$$

$$\left|A^3-3A+E\right|=\left|P\Lambda^3P^{-1}-3P\Lambda P^{-1}+PEP^{-1}\right|$$

$$=\left|P(\Lambda^3-3\Lambda+E)P^{-1}\right|=\left|\Lambda^3-3\Lambda+E\right|=\left|\begin{pmatrix}-1 & & \\ & 3 & \\ & & -17\end{pmatrix}\right|=51.$$

谢 谢！

第4.4节 实对称矩阵的相似矩阵

柳顺义| 长安大学理学院
liu@chd.edu.cn

本节概要

一、实对称矩阵能否相似对角化?

二、实对称矩阵对角化的步骤

本节概要

一、实对称矩阵能否相似对角化?

二、实对称矩阵对角化的步骤

一、实对称矩阵能否相似对角化?

[引理1] 实对称矩阵的特征值全是实数.

[引理2] 实对称矩阵的对应于不同特征值的特征向量**正交**.

【定理】 设 A为 n 阶实对称阵, 则必存在正交矩阵 P, 使得

$$P^{-1}AP = P^{\mathrm{T}}AP = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的 n 个特征值.

实对称阵一定可以对角化, 且其相似变换矩阵可为正交阵

[推论] 实对称矩阵特征值的几何重数必等于其代数重数.

本节概要

一、实对称矩阵能否相似对角化?

二、实对称矩阵对角化的步骤

二、实对称矩阵对角化的步骤

例　设 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，求正交矩阵 P，使 $P^{-1}AP=\Lambda$ 为对角阵.

解　因为 A 是实对称阵，所以 A 可以对角化.

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

则 A 的特征值 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$.

二、实对称矩阵对角化的步骤

当 $\lambda_1=-2$ 时， 解方程组 $(A+2E)x=0$.

$$A+2E=\begin{pmatrix}2&-1&1\\-1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$，得基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时， 解方程组 $(A-E)x=0$.

$$A-E=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\-1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$，得基础解系 $\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

令 $P=(\xi_1\quad\xi_2\quad\xi_3)=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. 这样的解法对吗？

二、实对称矩阵对角化的步骤

当 $\lambda_1=-2$时，对应的线性无关的特征向量为$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$；

当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时，对应的线性无关的特征向量为 $\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

此时必有$\xi_1\perp\xi_2$， $\xi_1\perp\xi_3$，但 $\xi_2\perp\xi_3$ 未必成立.

把 ξ_2,ξ_3 正交化：$\eta_2=\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\eta_3=\xi_3-\dfrac{[\xi_3,\eta_2]}{[\eta_2,\eta_2]}\eta_2=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

η_2,η_3仍是对应于特征值 1 的特征向量（为什么？）.

此时 $\xi_1\perp\eta_2$， $\xi_1\perp\eta_3$， $\eta_2\perp\eta_3$.

二、实对称矩阵对角化的步骤

当 $\lambda_1=-2$时，对应的两两正交的特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$；

单位化得：$p_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$

当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时，对应的两两正交的特征向量为 $\eta_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\eta_3=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.

单位化得：$p_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$p_3=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

单位化后的向量仍是特征向量（为什么？）.

二、实对称矩阵对角化的步骤

当$\lambda_1=-2$时，对应的两两正交单位特征向量为$p_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$；

当$\lambda_2=\lambda_3=1$时，对应的两两正交单位特征向量 $p_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$p_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

此时 p_1,p_2,p_3 两两正交且均为单位特征向量.

以 p_1,p_2,p_3 为列构作正交矩阵： 则

$$P=(p_1\quad p_2\quad p_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP=P^{\mathrm{T}}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

二、实对称矩阵对角化的步骤

注：如果所求出的线性无关的特征向量已正交化，则只需单位化.

例 4.4.1 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&1\\0&1&2\end{pmatrix},$$

求正交阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角阵.

解 由

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}3-\lambda&0&0\\0&2-\lambda&1\\0&1&2-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)^2(1-\lambda)$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=3$.

二、实对称矩阵对角化的步骤

当 $\lambda_1=1$ 时，解方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_2]{\frac{1}{2}r_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$. 将 ξ_1 单位化，得 $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.

当 $\lambda_2=\lambda_3=3$ 时，解方程组 $(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系

$$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \xi_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},$$

两者已正交，故只需单位化，于是取

$$\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},$$

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&&\\&3&\\&&3\end{pmatrix}$.

二、实对称矩阵对角化的步骤

Step 1 求出实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 所有不同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$, 设其代数重数分别为 $r_1,r_2,\cdots,r_m$, 则 $r_1+r_2+\cdots+r_m=n$;

Step 2 对每个特征值$\lambda_i\,(i=1,2,\cdots,m)$, 求 $(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系, 得到 r_i 个对应于 λ_i 的线性无关的特征向量, 将其正交化、单位化, 得 r_i 个两两正交的单位特征向量;

Step 3 将 Step 2 中求出的 $r_1+r_2+\cdots+r_m=n$ 个两两正交的单位向量 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n$ 按列构成正交矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1\ \ \boldsymbol{p}_2\ \cdots\ \boldsymbol{p}_n)$, 则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda},$$

其中对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 中主对角线上元素顺序与$\boldsymbol{P}$的列向量顺序对应一致.

	一般方阵	实对称矩阵
特征向量的关系	**1.** 属于不同特征值的特征向量线性无关 **2.** 属于不同特征值的线性无关的特征向量合起来仍然线性无关。	**1.** 属于不同特征值的特征向量正交 **2.** 属于不同特征值的两两正交的特征向量合起来仍然两两正交。
能否相似对角化	【有条件的，需要判断】 可相似对角化 $\Leftrightarrow$ A有n个线性无关的特征向量 $\Leftrightarrow$ 特征值的几何重数等于其代数重数 $\Leftrightarrow$ 存在n阶可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$	【无条件的，不需判断】 必可正交相似对角化 必存在n个线性无关的特征向量 特征值的几何重数必等于其代数重数 必存在n阶正交矩阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$

$$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$

谢 谢！