第三章 向量组的线性相关性

主讲人： 柳顺义

长安大学理学院

本章概要

关于“向量”(vector)你知道多少？

定义：既有大小又有方向的量.　如力、速度、加速度等.

表示 $\begin{cases} \text{几何表示：有向线段} \\ \text{坐标表示：有序数组} \end{cases}$

线性运算：加法(平行四边形法则)、数乘

本章将平面向量和空间向量推广到 n 维向量，研究向量组的线性表示、线性相关性和最大线性无关组. 作为应用，给出线性方程组解的结构.

第3.1节 向量空间

柳顺义 | 长安大学理学院
liu@chd.edu.cn

本节概要

一、向量组及其线性运算
- 1. 相关定义
- 2. 线性运算

二、向量组的线性组合及线性表示
- 1. 线性组合/线性表示
- 2. 向量组等价

三、向量空间

本节概要

一、向量组及其线性运算
- 1. 相关定义
- 2. 线性运算

二、向量组的线性组合及线性表示
- 1. 线性组合/线性表示
- 2. 向量组等价

三、向量空间

一、向量组及其线性运算

1. 相关定义

【定义1】数域 P 上 n 个有次序的数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的数组称为 n **维向量**, 记作 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$. 数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 称为 α 的**分量**.

写法 行向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 或列向量 $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$.

用黑体小写字母 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 等表示向量.

约定 (1) 仅讨论实向量. $\mathbf{R}^n=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}\}$

(2) 在没有指明是行向量还是列向量时都当作列向量.

一、向量组及其线性运算

1. 相关定义

【定义2】由若干个维数相同的向量构成的集合称为**向量组**, 记作 $\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$、$\mathscr{C}$.

n 维单位坐标向量组：$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\varepsilon_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$

一、向量组及其线性运算

1. 相关定义

【定义2】由若干个维数相同的向量构成的集合称为**向量组**,
记作 $\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$、$\mathscr{C}$.

矩阵与向量组的关系：一一对应

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\end{pmatrix}}_{\text{列向量组}}=\begin{pmatrix}\beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3\end{pmatrix}$$ 行向量组

一、向量组及其线性运算

2. 线性运算

设$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$, $k\in\mathbf{R}$.

相等：　$\alpha=\beta\Leftrightarrow a_i=b_i(i=1,2,\cdots,n)$

向量的加法：　$\alpha+\beta=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$

数与向量的乘法 (数乘)：　$k\alpha=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)$

加法与数乘统称为向量的**线性运算**.

本节概要

一、向量组及其线性运算
- 1. 相关定义
- 2. 线性运算

二、向量组的线性组合及线性表示
- 1. 线性组合/线性表示
- 2. 向量组等价

三、向量空间

二、向量组的线性组合

1. 线性组合/线性表示

【定义】对向量组 $\alpha_1, \alpha_2,\cdots, \alpha_m \in \mathbf{R}^n$ 和向量 $\beta \in \mathbf{R}^n$, 若存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$, 使得

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m$$

则称β是$\alpha_1, \alpha_2,\cdots, \alpha_m$的**线性组合**, 也称$\beta$可由$\alpha_1, \alpha_2,\cdots, \alpha_m$**线性表示**. $k_1,k_2,\cdots,k_m$称为**组合系数**.

例 令 $e_1 = (1,0,0)^{\mathrm{T}}, e_2 = (0,1,0)^{\mathrm{T}}, e_3 = (0,0,1)^{\mathrm{T}}$, 则

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2e_1 + 3e_2 + 7e_3,$$ 则b可由 e_1,e_2,e_3 线性表示.

二、向量组的线性组合

1. 线性组合/线性表示

【定义】对向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \in \mathbf{R}^n$ 和向量 $\beta \in \mathbf{R}^n$, 若存在一组数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$, 使得

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m$$

则称 β 是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 的**线性组合**, 也称 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ **线性表示**. $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 称为**组合系数**.

(1) 零向量可由任意同维数的向量组线性表示. $\mathbf{0} = 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + \cdots + 0\alpha_m$.

(2) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 中任一向量可由该向量组线性表示.

$$\alpha_i = 0\alpha_1 + \cdots + 0\alpha_{i-1} + 1\alpha_i + 0\alpha_{i+1} + \cdots + 0\alpha_m$$

二、向量组的线性组合

1. 线性组合/线性表示

【定义】对向量组 $\alpha_1, \alpha_2,\cdots, \alpha_m \in \mathbf{R}^n$ 和向量 $\beta \in \mathbf{R}^n$, 若存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$, 使得

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m$$

则称 β 是 $\alpha_1, \alpha_2,\cdots, \alpha_m$ 的**线性组合**, 也称 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2,\cdots, \alpha_m$ **线性表示**. $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 称为**组合系数**.

(3) 任一向量可由同维数单位坐标向量组线性表示.

$$\alpha = (a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}} = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n$$

二、向量组的线性组合

线性方程组的三种表示形式

一般形式：
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

矩阵表示： $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$

向量表示：
$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \boldsymbol{b}$$

二、向量组的线性组合

【定理】设$\boldsymbol{b}, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \boldsymbol{R}^m$, 则$\boldsymbol{b}$可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表示

$\Longleftrightarrow$ 存在一组数$k_1, k_2, \cdots, k_n$, 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_n\alpha_n = \boldsymbol{b}$.

$\Longleftrightarrow$ 向量方程 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \ldots + x_n\alpha_n = \boldsymbol{b}$ 有解.

$\Longleftrightarrow$ 线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有解, 其中$\boldsymbol{A} = (\alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \ \cdots \ \ \alpha_n)_{m \times n}$

$\Longleftrightarrow$ $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A} \ \ \boldsymbol{b})$ 且当 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A} \ \ \boldsymbol{b}) = n$ 时, 表示法唯一;

当 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A} \ \ \boldsymbol{b}) < n$ 时, 表示法不唯一.

二、向量组的线性组合

例 设$\alpha_1=(1,1,2,2)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(1,2,1,3)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(1,-1,4,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{b}=(1,0,3,1)^{\mathrm{T}}$, 证明向量$\boldsymbol{b}$能由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示, 并求出表示式.

解 即证矩阵 $\boldsymbol{A}=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)$与$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{b})$有相同的秩.

$$B=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\1&2&-1&0\\2&1&4&3\\2&3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&3&2\\0&1&-2&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\Longrightarrow R(A)=R(B)=2\Longrightarrow \text{可表示}$$

线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}-3c+2\\2c-1\\c\end{pmatrix}$, 其中 c 可任意取值.

故 $\boldsymbol{b}=(-3c+2)\alpha_1+(2c-1)\alpha_2+c\alpha_3$.

二、向量组的线性组合

2. 向量组的等价

【定义】设有两个向量组$\mathscr{A}:\alpha_1, \alpha_2,\cdots, \alpha_m$与$\mathscr{B}: \beta_1, \beta_2,\cdots, \beta_s$,

若$\mathscr{A}$中每个向量都可由$\mathscr{B}$线性表示, 称$\mathscr{A}$**可由**$\mathscr{B}$ **线性表示**;

若$\mathscr{A}$与$\mathscr{B}$可互相线性表示, 称$\mathscr{A}$**与**$\mathscr{B}$ **等价**.

向量组的等价满足：反身性；对称性；传递性

二、向量组的线性组合

若 $\boldsymbol{C}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times s}\boldsymbol{B}_{s\times n}$，即 $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix}$

$$则\ (\boldsymbol{c}_1 \quad \boldsymbol{c}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{c}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_s)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{c}_1=b_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{21}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+b_{s1}\boldsymbol{\alpha}_s,\quad \boldsymbol{c}_2=b_{12}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+b_{s2}\boldsymbol{\alpha}_s,\quad \boldsymbol{c}_j=b_{1j}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{2j}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+b_{sj}\boldsymbol{\alpha}_s,$$

乘积矩阵 C 的列向量组能由左因子矩阵 A 的列向量组线性表示

二、向量组的线性组合

若 $C_{m\times n}=A_{m\times s}B_{s\times n}$，即

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix}$$

则

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{c}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{c}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_s \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{c}_1=a_{11}\boldsymbol{b}_1+a_{12}\boldsymbol{b}_2+\cdots+a_{1s}\boldsymbol{b}_s$， $\boldsymbol{c}_2=a_{21}\boldsymbol{b}_1+a_{22}\boldsymbol{b}_2+\cdots+a_{2s}\boldsymbol{b}_s$， $\boldsymbol{c}_i=a_{i1}\boldsymbol{b}_1+a_{i2}\boldsymbol{b}_2+\cdots+a_{is}\boldsymbol{b}_s$，

乘积矩阵 C 的行向量组能由右因子矩阵 B 的行向量组线性表示

二、向量组的线性组合

【定理】设有两个向量组$\mathscr{A}$: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$与$\mathscr{B}$: $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$, 则向量组$\mathscr{B}$可由$\mathscr{A}$线性表示

$\Longleftrightarrow$ 存在矩阵 $\boldsymbol{K}$, 使得 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{K}$, 其中

$$\boldsymbol{A} = (\alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \ \cdots \ \ \alpha_m), \boldsymbol{B} = (\beta_1 \ \ \beta_2 \ \ \cdots \ \ \beta_s)$$

$\Longleftrightarrow$ 矩阵方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ 有解

$\Longleftrightarrow$ $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A} \ \ \boldsymbol{B})$

二、向量组的线性组合

【定理】设有两个向量组$\mathscr{A}$:$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$与$\mathscr{B}$: $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$, 则向量组$\mathscr{B}$可由$\mathscr{A}$线性表示

$\Longleftrightarrow$ 矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解

$\Longleftrightarrow$ $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B})$

推论1　如果向量组$\mathscr{B}$可由$\mathscr{A}$线性表示, 则 $R(\boldsymbol{B}) \le R(\boldsymbol{A})$.

推论2　向量组$\mathscr{A}$与向量组$\mathscr{B}$等价 $\Longleftrightarrow R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B}) = R(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B})$.

二、向量组的线性组合

推论3 n维单位坐标向量组$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$可由$n$维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示 $\Leftrightarrow$ $R(A)=n$，其中 $A=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_m)$.

证 首先注意到 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$构成的矩阵是 n阶单位矩阵E.

$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示 $\Leftrightarrow$ $R(A)=R(A\ \ E_n)$

又$R(A\ \ E_n)=n$，故 $R(A)=n$.

二、向量组的线性组合

列向量$\boldsymbol{b}$可由列向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示 $\Leftrightarrow$ 线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有解 $\Leftrightarrow$ $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{b})$

向量组$\mathscr{B}$可由向量组$\mathscr{A}$线性表示 $\Leftrightarrow$ 矩阵方程$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$有解 $\Leftrightarrow$ $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B})$

向量组$\mathscr{A}$与向量组$\mathscr{B}$等价 $\Leftrightarrow$ $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B})$

本节概要

一、向量组及其线性运算
- 1. 相关定义
- 2. 线性运算

二、向量组的线性组合及线性表示
- 1. 线性组合/线性表示
- 2. 向量组等价

三、向量空间

三、向量空间

【定义1】设V是数域P上n维向量组成的非空集合，如果V对于向量的加法和数乘封闭，即

(1) 对任意的$\alpha \in V$, $\beta \in V$, 都有$\alpha+\beta \in V$; (对加法封闭)

(2) 对任意的$\alpha \in V$, $k \in P$, 都有 $k\alpha \in V$; (对数乘封闭)

则称V是数域 P上的**向量空间**.

例 全体 n 维实向量构成的集合 $\mathbf{R}^n$是实数域上的向量空间.

【定义2】若向量空间V的非空子集V_1按V 的线性运算也构成数域 P上的向量空间，则称V_1是V 的**子空间**.

事实 向量空间V总有两个平凡子空间：V 自身和零子空间$\{\mathbf{0}\}$.

三、向量空间

例 下列哪些集合是向量空间:

(1) 集合$V=\{\,\boldsymbol{x}=(0,x_2,\cdots,x_n)\mid x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}\}$. 是

(2) 集合$V=\{\,\boldsymbol{x}=(1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}\}$.

不是 <对加法和数乘都不封闭>

齐次方程组的解空间

(3) n元齐次线性方程组的解集$S=\{\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$.

因为$\boldsymbol{0}\in S$, 故S非空. 对任意的$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in S, k\in\boldsymbol{R}$,有:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0},\qquad \therefore \boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2\in S$$

$$\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{x}_1)=k(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1)=\boldsymbol{0},\qquad \therefore k\boldsymbol{x}_1\in S.$$

故S是向量空间

[思考题] n元非齐次线性方程组的解集$S=\{\,\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\,\}$是不是向量空间?

三、向量空间

例 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\in \boldsymbol{R}^n$, 试证由这$m$个向量的一切线性组合形成的集合

$$V=\{\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i,\lambda_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,m\}$$

是一个向量空间.

证 设 $\boldsymbol{x}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m\in V$, $\boldsymbol{y}=\mu_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\mu_m\boldsymbol{\alpha}_m\in V$, 则

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(\lambda_1+\mu_1)\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+(\lambda_m+\mu_m)\boldsymbol{\alpha}_m\in V,$$

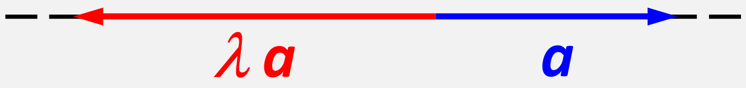
$$k\boldsymbol{x}=(k\lambda_1)\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+(k\lambda_m)\boldsymbol{\alpha}_m\in V,\quad \forall k\in\mathbf{R}$$

【定义】称V为由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$**生成的向量空间**, 记$V$=span$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$

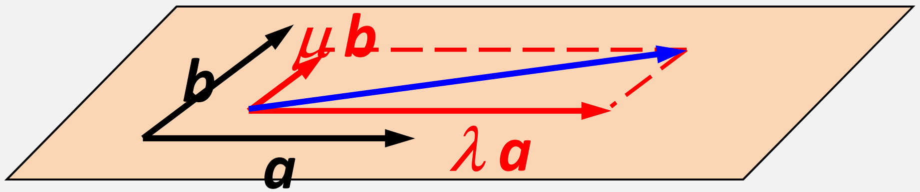
[练习] 证明等价的向量组所生成的向量空间相等.

三、向量空间

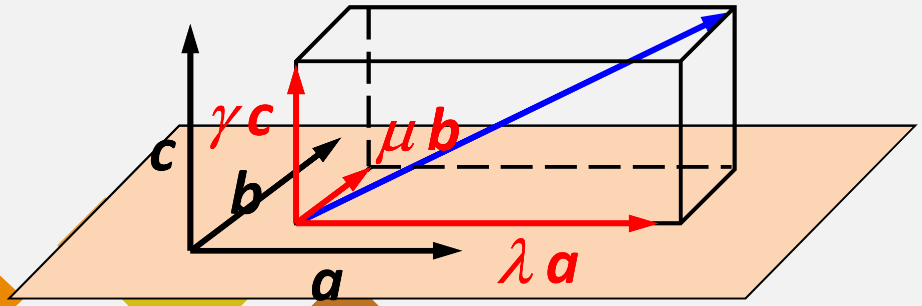
$V=\mathrm{span}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$的几何意义：



$$R=\mathrm{span}(\boldsymbol{a})=\{\lambda\boldsymbol{a}\mid\lambda\in R\}$$



$$R^2=\mathrm{span}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$$
$$=\{\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}\mid\lambda,\mu\in R\}$$



$$R^3=\mathrm{span}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$$
$$=\{\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}\mid\lambda,\mu,\gamma\in R\}$$

谢 谢！

第3.2节 向量组的线性相关性

柳顺义 | 长安大学理学院
liu@chd.edu.cn

本节概要

向量组的线性相关性是向量在线性运算下的一种性质，在研究<u>向量空间的结构与分类</u>中起着极为重要的作用，也是进一步研究线性方程组理论的基础.

一、线性相关性的定义

二、线性相关性的几何意义

三、线性相关性的判定

四、线性相关性的性质

本节概要

向量组的线性相关性是向量在线性运算下的一种性质，在研究向量空间的结构与分类中起着极为重要的作用，也是进一步研究线性方程组理论的基础.

一、线性相关性的定义

二、线性相关性的几何意义

三、线性相关性的判定

四、线性相关性的性质

问题引入

问题: 给定向量组$\mathscr{A}$, 零向量$\mathbf{0}$是否可以由向量组$\mathscr{A}$线性表示?

答: 可以, 组合系数全取为0即可

追问: 零向量$\mathbf{0}$ 可以由向量组$\mathscr{A}$线性表示, 组合系数能否不全为零?

一、线性相关性的定义

【定义】设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \in \mathbf{R}^n$, 若存在不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m \in \mathbf{R}$,
使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = \mathbf{0}$，称$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ **线性相关**.
否则, 称$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ **线性无关**.
(即: 若 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = \mathbf{0}$ 成立, 必有 $k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$)

[说明]

(1) 一个向量组要么线性相关，要么线性无关，二者只具其一.

(2) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 的线性相关性通常指 $m \geq 2$ 的情形.

一、线性相关性的定义

【定义】设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \in \mathbf{R}^n$, 若存在不全为零的数$k_1, k_2, \cdots, k_m \in \mathbf{R}$,
使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = \mathbf{0}$， 称$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ **线性相关.**
否则, 称$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ **线性无关.**

[简单情形]

(1) 向量α线性相关 $\Leftrightarrow$ $\alpha = \mathbf{0}$.

(2) 向量α与 β线性相关 $\Leftrightarrow$ α与β 的对应分量成比例.

(3) 任意包含零向量的向量组必线性相关.

本节概要

一、线性相关性的定义

二、线性相关性的几何意义

三、线性相关性的判定

四、线性相关性的性质

二、线性相关性的几何意义

在 R^3 中： 两个向量 α, β 共线

$\Leftrightarrow$ 存在不全为 0 的数 k_1, k_2，使得 $k_1\alpha + k_2\beta = \mathbf{0}$.

$\Leftrightarrow$ α 与 β 线性相关.

三个向量 α, β, γ 共面

$\Leftrightarrow$ 三阶行列式 $\det\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma\end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组 $x_1\alpha + x_2\beta + x_3\gamma = 0$ 有非零解

$\Leftrightarrow$ 存在不全为0的数 k_1, k_2, k_3，使得 $k_1\alpha + k_2\beta + k_3\gamma = 0$

$\Leftrightarrow$ α, β, γ 线性相关.

本节概要

一、线性相关性的定义

二、线性相关性的几何意义

三、线性相关性的判定

四、线性相关性的性质

三、线性相关性的判定

【定理】向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关

$\Longleftrightarrow$ 存在一组不全为0的$k_1, k_2,\cdots, k_m$, 使$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\mathbf{0}$.

$\Longleftrightarrow$ 齐次线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=\mathbf{0}$ 有非零解.

$\Longleftrightarrow$ $R(A)<m$ 即矩阵 $A=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_m)$ 的秩小于向量个数

向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关

$\Longleftrightarrow$ 如果$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\mathbf{0}$, 则必有$k_1=k_2=\cdots=k_m=0$

$\Longleftrightarrow$ 齐次线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=\mathbf{0}$ 只有零解.

$\Longleftrightarrow$ $R(A)=m$ 即矩阵 $A=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_m)$ 的秩等于向量个数

三、线性相关性的判定

例 已知 $\alpha_1=(1,0,2,1)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(1,2,0,1)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(2,1,3,2)^{\mathrm{T}},\alpha_4=(2,5,-1,4)^{\mathrm{T}}$, 分别讨论向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$、$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 及 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的线性相关性.

解 用初等行变换把矩阵 $A=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \alpha_4)$ 化为阶梯形:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2&2\\0&2&1&5\\2&0&3&-1\\1&1&2&4\end{pmatrix}\xrightarrow{\mathrm{r}}\begin{pmatrix}1&1&2&2\\0&2&1&5\\0&0&0&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$R(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)=2<3 \Longrightarrow \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关;

$R(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_4)=3=3 \Longrightarrow \alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 线性无关;

$R(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \alpha_4)=3<4 \Longrightarrow \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关.

三、线性相关性的判定

例 证明：$\boldsymbol{n}$ 维单位坐标向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 线性无关.

证法一 设

$$k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2 + \cdots + k_n\varepsilon_n = k_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \cdots + k_n\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

即 $\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$. 从而 $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0.$

证法二 令 $\boldsymbol{A} = (\varepsilon_1 \ \ \varepsilon_2 \ \ \cdots \ \ \varepsilon_n)$. 显然 $R(A) = R(E_n) = n = n$.

三、线性相关性的判定

【定理】向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\ (m\geq 2)$ 线性相关

$\Longleftrightarrow$ 其中至少有一个向量可以由其余 $m-1$ 个向量线性表示.

证 必要性

设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关，则存在不全为0的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$，

使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = \mathbf{0}$.

不妨设 $k_1 \neq 0$，则

$$\alpha_1 = -\frac{k_2}{k_1}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_m}{k_1}\alpha_m.$$

三、线性相关性的判定

【定理】向量组$\alpha_1, \alpha_2,\cdots, \alpha_m\ (m\geq 2)$ 线性相关

$\Longleftrightarrow$ 其中至少有一个向量可以由其余 $m-1$个向量线性表示.

证 充分性

设 $\alpha_i\ (1\leq i\leq m)$ 可用$\alpha_1,\cdots\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_m$ 线性表示，则

$$\alpha_i = k_1\alpha_1+\cdots+k_{i-1}\alpha_{i-1}+k_{i+1}\alpha_{i+1}+\cdots+k_m\alpha_m,$$

即 $k_1\alpha_1+\cdots+k_{i-1}\alpha_{i-1}-\alpha_i+k_{i+1}\alpha_{i+1}+\cdots+k_m\alpha_m=\mathbf{0}.$

由于 $k_1,\cdots,k_{i-1},-1,k_{i+1},\cdots,k_m$ 不全为0，故$\alpha_1, \alpha_2,\cdots, \alpha_m$ 线性相关.

三、线性相关性的判定

【定理】向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\ (m \geq 2)$ 线性相关

“有冗余”

$\Longleftrightarrow$ 其中至少有一个向量可以由其余 $m-1$个向量线性表示.

【定理】向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\ (m \geq 2)$ 线性无关

“无冗余”

$\Longleftrightarrow$ 其中任何向量都不能由其余 $m-1$个向量线性表示.

本节概要

一、线性相关性的定义

二、线性相关性的几何意义

三、线性相关性的判定

四、线性相关性的性质

四、线性相关性的性质

[性质1] 若向量组有线性相关的部分组, 则该向量组线性相关.

证 设向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_t,\alpha_{t+1},\cdots,\alpha_m$ 的部分组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_t$ 线性相关，则存在不全为0的数 $k_1,\cdots,k_t$ ， 使得

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_t\alpha_t=\mathbf{0}.$$

从而 $k_1\alpha_1+\cdots+k_t\alpha_t+\boxed{0\alpha_{t+1}+\cdots+0\alpha_m}=\mathbf{0}.$

由于 $k_1,\cdots,k_t$ 不全为0，故 $\alpha_1,\cdots,\alpha_t,\alpha_{t+1},\cdots,\alpha_m$ 线性相关.

[推论1] 线性无关向量组的任何非空部分组都线性无关.

(部分相关, 整体相关; 整体无关, 部分无关)

四、线性相关性的性质

[性质2] 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbf{R}^n$线性相关

$$\Leftrightarrow |A| = 0, \text{其中 } A = (\alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \cdots \ \ \alpha_n).$$

证 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbf{R}^n$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ $R(A) < n$ $\Leftrightarrow$ $|A| = 0$

[性质3] 向量组向量个数大于向量维数时必线性相关.

证 $A = (\alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \cdots \ \ \alpha_m)$ 为 $n \times m$的, 故 $R(A) \le n < m$.

[推论] $n+1$个n维向量一定线性相关.

四、线性相关性的性质

[性质4] 已知$\alpha_1, \alpha_2,\cdots, \alpha_m$线性无关, 而$\alpha_1, \alpha_2,\cdots, \alpha_m, \beta$线性相关,

求证: β可由$\alpha_1, \alpha_2,\cdots, \alpha_m$唯一地线性表示.

证 由$\alpha_1, \alpha_2,\cdots, \alpha_m, \beta$ 线性相关，则存在不全为0的数$k_1,\cdots,k_m,l$，使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m + l\beta = \mathbf{0}.$$

易见 $l \neq 0$. 否则 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = \mathbf{0}$，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，矛盾.

从而 $\beta = -\dfrac{k_1}{l}\alpha_1 - \dfrac{k_2}{l}\alpha_2 - \cdots - \dfrac{k_m}{l}\alpha_m.$

再证唯一性. 设$\beta = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_m\alpha_m = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \cdots + b_m\alpha_m.$

则 $(a_1 - b_1)\alpha_1 + (a_2 - b_2)\alpha_2 + \cdots + (a_m - b_m)\alpha_m = \mathbf{0}.$

由 $\alpha_1, \alpha_2,\cdots, \alpha_m$ 线性无关，则 $a_i - b_i = 0$. 故 $a_i = b_i, i = 1,2,\cdots,m.$

四、线性相关性的性质

[性质5] 向量组$\mathscr{A}$: $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{ir})^T \quad (i=1,2,\cdots,m)$,

向量组$\mathscr{B}$: $\beta_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{ir}, a_{i,r+1}, \cdots, a_{i,r+k})^T \quad (i=1,2,\cdots,m)$

若$\mathscr{A}$线性无关, 则$\mathscr{B}$亦线性无关.

若$\mathscr{B}$线性相关, 则$\mathscr{A}$亦线性相关.

证 $\boldsymbol{A} = (\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_m)$ 为 $r \times m$ 的, $\boldsymbol{B} = (\beta_1\ \beta_2\ \cdots\ \beta_m)$ 为 $(r+k) \times m$ 的,

且矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的前 r 行即为矩阵 $\boldsymbol{A}$, 故 $R(\boldsymbol{A}) \le R(\boldsymbol{B})$.

若$\mathscr{A}$线性无关, 则$R(\boldsymbol{A}) = m \le R(\boldsymbol{B}) \le m$. 则$R(\boldsymbol{B}) = m$, 故$\mathscr{B}$线性无关.

(无关向量组“加长”亦无关; 相关向量组“缩短”亦相关)

四、线性相关性的性质

[性质6] 若$\mathscr{A}:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\in\mathbf{R}^n$可由$\mathscr{B}:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\in\mathbf{R}^n$线性表示且$r>s$，则$\mathscr{A}$线性相关.

证 $\boldsymbol{A}=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \cdots\ \ \alpha_r)$为$n\times r$的，$\boldsymbol{B}=(\beta_1\ \ \beta_2\ \cdots\ \ \beta_s)$为$n\times s$的，

因为$\mathscr{A}$可由$\mathscr{B}$线性表示，则$R(\boldsymbol{A})\le R(\boldsymbol{B})\le s<r$，故$\mathscr{A}$线性相关.

[推论1] $\mathscr{A}$可由$\mathscr{B}$线性表示且$\mathscr{A}$线性无关，则$r\le s$.

[推论2] 两个等价的线性无关向量组所含向量个数相同.

例题

例 证明向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关的充分必要条件是向量组

$\beta_1 = \alpha_1+\alpha_2, \beta_2 = \alpha_2+\alpha_3, \beta_3 = \alpha_3+\alpha_1$ 线性无关.

证法1

[必要性]

设 $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 = \mathbf{0}$, 则 $k_1(\alpha_1+\alpha_2) + k_2(\alpha_2+\alpha_3) + k_3(\alpha_3+\alpha_1) = \mathbf{0}$

即 $(k_1+k_3)\alpha_1 + (k_1+k_2)\alpha_2 + (k_2+k_3)\alpha_3 = \mathbf{0}$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 故

$$\begin{cases} k_1 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \end{cases} \quad \text{解之得:} \quad \begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 = 0 \\ k_3 = 0 \end{cases}$$

故 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关.

例题

例 证明向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关的充要条件是向量组

$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2, \beta_2=\alpha_2+\alpha_3, \beta_3=\alpha_3+\alpha_1$ 线性无关.

证法1

[充分性]

依题: $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

记 $\boldsymbol{A}=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3), \boldsymbol{B}=(\beta_1\ \ \beta_2\ \ \beta_3)$, 则 $R(\boldsymbol{B}) \leq R(\boldsymbol{A})$.

因为 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关, 故 $R(\boldsymbol{B})=3$.

所以 $3=R(\boldsymbol{B}) \leq R(\boldsymbol{A}) \leq 3$, 故 $R(\boldsymbol{A})=3$.

因此 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

例题

例 证明向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关的充要条件是向量组

$$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\ \beta_2=\alpha_2+\alpha_3\ ,\ \beta_3=\alpha_3+\alpha_1\ \text{线性无关}.$$

证法2 依题可得 $(\beta_1\ \ \beta_2\ \ \beta_3)=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AK}$$

记 $\boldsymbol{A}=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3), \boldsymbol{B}=(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3), \boldsymbol{K}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$. 因为 $|\boldsymbol{K}|=2\neq 0$, 故 $\boldsymbol{K}$ 可逆.

所以 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$.

$$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$$

故:

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关 $\Leftrightarrow R(\boldsymbol{A})=3 \overset{\Downarrow}{\Leftrightarrow} R(\boldsymbol{B})=3 \Leftrightarrow \beta_1, \beta_2, \beta_3$线性无关

四、线性相关性的性质

[性质] 对向量组$\mathscr{A}$: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s \in \mathbf{R}^n$和$\mathscr{B}$: $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s \in \mathbf{R}^n$,
若 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B})$, 则$\mathscr{A}$与$\mathscr{B}$有相同的线性相关性.

证 $\mathscr{A}$线性相关 $\Leftrightarrow$ $R(\boldsymbol{A})<s$ $\Leftrightarrow$ $R(\boldsymbol{B})<s$ $\Leftrightarrow$ $\mathscr{B}$线性相关

$\Uparrow$

因为$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$

一个等价表述:

[性质] 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的列数并且 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B})$, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组有相同的线性相关性.

谢 谢！

第3.3节 向量组的秩

柳顺义 | 长安大学理学院

liu@chd.edu.cn

本节概要

对于给定的一个向量组，其中哪些向量是重要的？如何找出其中最重要的一部分向量？

一、最大无关组与向量组的秩

二、向量组的秩及最大无关组的计算

三、向量空间的基、维数与坐标

本节概要

对于给定的一个向量组，其中哪些向量是重要的？如何找出其中最重要的一部分向量？

一、最大无关组与向量组的秩

二、向量组的秩及最大无关组的计算

三、向量空间的基、维数与坐标

一、最大无关组与向量组的秩

1. 定义

【定义】设有向量组$\mathscr{A}$, 若在$\mathscr{A}$中存在 r 个向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$, 满足:

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性无关;

(2) $\mathscr{A}$中任意$r+1$个向量（如果有的话）都线性相关,

则称向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$是向量组$\mathscr{A}$的一个**最大线性无关组**，简称**最大无关组**. **(也称为极大线性无关组)**

最大无关组所含向量的个数称为向量组$\mathscr{A}$的秩, 记为 $R(\mathscr{A})$.

[规定] 若$\mathscr{A}$中只有零向量, 规定其秩为0.

一、最大无关组与向量组的秩

例　n 维单位坐标向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是向量组 $\boldsymbol{R}^n$ 的一个最大无关组，$\boldsymbol{R}^n$ 的秩等于n .

[思考] 一个向量组的最大无关组是否唯一？　不唯一

例　向量组 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ 也是 $\boldsymbol{R}^n$ 的一个最大无关组.

[思考] 向量组的任两个最大无关组所含向量个数是否相等？

一、最大无关组与向量组的秩

最大线性无关组的等价定义

【定义】设有向量组$\mathscr{A}$, 若在$\mathscr{A}$中存在r个向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$, 满足:

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性无关;

(2) $\mathscr{A}$中任意$r+1$个向量（如果有的话）都线性相关,

$\Updownarrow$

(2') $\mathscr{A}$中任意向量都能由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性表示,

则称向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$是向量组$\mathscr{A}$的一个**最大线性无关组**.

一、最大无关组与向量组的秩

2. 性质

【定义】设有向量组$\mathscr{A}$, 若在$\mathscr{A}$中存在r个向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$, 满足:

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性无关;

(2) $\mathscr{A}$中任意向量都能由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性表示,

则称向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$是向量组$\mathscr{A}$的一个**最大线性无关组**,

(1) 向量组的最大无关组与向量组本身等价. (研究最大无关组的意义)

(2) 向量组的最大无关组未必唯一, 但向量组的秩是唯一确定的.

(3) 若向量组$\mathscr{A}$的秩为r, 则$\mathscr{A}$中任意 r 个线性无关的向量都是它的一个最大无关组.

本节概要

对于给定的一个向量组，如何找出其中最重要的一部分向量？

一、最大无关组与向量组的秩

二、向量组的秩及最大无关组的计算

三、向量空间的基、维数与坐标

二、向量组的秩及最大无关组的计算

定理 矩阵的秩等于它的列秩，也等于它的行秩.

设 $R(A_{m\times n}) = r$

A 有 r 阶子式 $D_r \neq 0$ $\Rightarrow$ D_r 所在的 r 列构成的 $m \times r$ 矩阵的秩为 r $\Rightarrow$ D_r 所在的 r 列线性无关

A 中所有 $r+1$ 阶子式全为 0 $\Rightarrow$ A 中任 $r+1$ 列构成的 $m\times(r+1)$ 矩阵的秩 $< r+1$ $\Rightarrow$ A 中任 $r+1$ 列线性相关

$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关 $\Leftrightarrow R(\alpha_1 \ \cdots \ \alpha_m)=m$

$\Rightarrow$ D_r 所在的 r 列是 A 的列向量组的一个最大无关组

$\Rightarrow$ A 的列向量组的秩等于 r

二、向量组的秩及最大无关组的计算

设 $R(\boldsymbol{A}_{m\times n})=r$

$\boldsymbol{A}$ 有 r 阶子式 $D_r\neq 0$

D_r 所在的 r 列构成的 $m\times r$ 矩阵的秩为 r

D_r 所在的 r 列线性无关

$\boldsymbol{A}$ 中所有 $r+1$ 阶子式全为 0

$\boldsymbol{A}$ 中任 $r+1$ 列构成的 $m\times(r+1)$ 矩阵的秩 $< r+1$

$\boldsymbol{A}$ 中任 $r+1$ 列线性相关

$\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow R(\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n)=n$

D_r 所在的 r 列是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个最大无关组

$\boldsymbol{A}$ 的列向量组的秩等于 r

由上述过程可见：

$\boldsymbol{A}$的最高阶非零子式$\boldsymbol{D}_r$所在的r列（行）是$\boldsymbol{A}$的列（行）向量组的最大无关组

二、向量组的秩及最大无关组的计算

向量组的秩及最大无关组的求法

第一步：以 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为列构成矩阵 $A=(\alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \ \cdots \ \ \alpha_n)$;

第二步：将 A 经过初等行变换化为阶梯形矩阵 B.

则（1）$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的秩(A 的列秩) $=$ A 的秩 $=$ B 的非零行数.

(2) 矩阵 B 的主元所在的列为 B 的列向量组的一个最大无关组，则其对应的 A 的列向量为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的一个最大无关组.

注：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 也可为行来构造矩阵(作初等列变换)

二、向量组的秩及最大无关组的计算

例 已知 $\alpha_1=(3,3,2,1),\alpha_2=(2,-2,0,6),\alpha_3=(0,3,1,-4),\alpha_4=(5,6,5,-1),\alpha_5=(0,-1,-3,4).$ 求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的秩及一个最大无关组.

解

$$A=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}\alpha_1^{\mathrm{T}} & \alpha_2^{\mathrm{T}} & \alpha_3^{\mathrm{T}} & \alpha_4^{\mathrm{T}} & \alpha_5^{\mathrm{T}}\end{array}\\ \begin{pmatrix}3 & 2 & 0 & 5 & 0\\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1\\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3\\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4\end{pmatrix}\end{array}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1 & 6 & -4 & -1 & 4\\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=B.$$

则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的秩 $=$ A 的列秩 $=$ A 的秩 $=B$ 的秩 $=3.$

求最大无关组只需找到 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 中3个线性无关的向量.

二、向量组的秩及最大无关组的计算

解

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\alpha}_5^{\mathrm{T}} \end{array} \\ \boldsymbol{A}= & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}.$$

则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 的秩 $=$ $\boldsymbol{A}$ 的列秩 $=$ $\boldsymbol{A}$ 的秩 $=$ $\boldsymbol{B}$ 的秩 $=3$.

求最大无关组只需找到 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 中3个线性无关的向量.

矩阵$\boldsymbol{B}$的主元所在列对应的$\boldsymbol{A}$的列向量便为一个最大无关组.

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 的一个最大无关组.

本节概要

对于给定的一个向量组，如何找出其中最重要的一部分向量？

一、最大无关组与向量组的秩

二、向量组的秩及最大无关组的计算

三、向量空间的基、维数与坐标

二、向量空间的基、维数与坐标

【定义】对向量空间V, 若在 V 中能选出r 个向量$\alpha_1, \alpha_2,\cdots, \alpha_r$, 满足

(1) $\alpha_1, \alpha_2,\cdots, \alpha_r$ 线性无关;

(2) V 中任意一个向量都能由$\alpha_1, \alpha_2,\cdots, \alpha_r$ 线性表示;

则称 $\alpha_1, \alpha_2,\cdots, \alpha_r$ 为 V 的一个**基**; 称 r 为V 的**维数**, 记为$\dim V$;

称V为r **维向量空间**.

向量空间	→	向量组
向量空间的基	→	向量组的最大无关组
向量空间的维数	→	向量组的秩

二、向量空间的基、维数与坐标

例 求向量空间 $\boldsymbol{R}^n$ 的一个基和维数?

解 n维单位坐标向量组是 $\boldsymbol{R}^n$ 的一个基，故 $\boldsymbol{R}^n$ 的维数等于 n .

例 求向量空间 $V_1 = \{ (0, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_2, \dots, x_n \in R \}$的一个基和维数?

解

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \alpha_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

是V_1的一个基. 故 V_1的维数等于$n-1$.

[注] 向量空间的维数和向量空间中向量的维数是两个概念.

二、向量空间的基、维数与坐标

事实 若$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$为向量空间$V$的一组基，则$V$可表示为：

$$V = \mathrm{span}\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$$

[反过来] 设$V = \mathrm{span}\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$

- 若$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性无关，则$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$是向量空间$V$的一组基，$r$是$V$的维数.

- 若$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性相关，设其最大无关组为$\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{is}$，

  则：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$与$\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{is}$等价

  从而：$V = \mathrm{span}\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\} = \mathrm{span}\{\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{is}\}$

  故：$\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{is}$就是$V$的一组基，$s$是$V$的维数.

二、向量空间的基、维数与坐标

【定义】如果在向量空间 V 中取定一个基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$，那么 V 中任意一个向量 x 可唯一表示为

$$x = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_r\alpha_r,$$

则数组 $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ 称为向量 x 在基 $a_1, a_2, ..., a_r$ 中的坐标.

例 $E = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的列向量组是 R^3 的一个基，则

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2e_1 + 5e_2 + 7e_3$$

b 在基 e_1, e_2, e_3 中的坐标

二、向量空间的基、维数与坐标

矩阵 $A=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$的列向量组也是 $\boldsymbol{R}^3$ 的一个基.

$$b=\begin{pmatrix}2\\5\\7\end{pmatrix}=(-3)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+(-2)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+7\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=-3\alpha_1-2\alpha_2+7\alpha_3$$

$$b=\begin{pmatrix}2\\5\\7\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+7\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=2e_1+5e_2+7e_3$$

注意：同一个向量在不同基中的坐标一般是不同的.

谢 谢!

第3.4节 线性方程组解的结构

柳顺义 | 长安大学理学院
liu@chd.edu.cn

本节概要

问题：什么是线性方程组的解的结构？

答：所谓线性方程组的解的结构，就是当线性方程组有无穷多个解时，解与解之间的相互关系.

- 当方程组存在唯一解时，无须讨论解的结构.
- 下面的讨论都是假设线性方程组有无穷多个解.

一、齐次线性方程组解的结构

二、非齐次线性方程组解的结构

本节概要

一、齐次线性方程组解的结构

二、非齐次线性方程组解的结构

一、齐次线性方程组解的结构

1. 齐次线性方程组解的性质

[性质1] 若 $x=\xi_1$， $x=\xi_2$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解，

则 $x=\xi_1+\xi_2$ 还是 $Ax=0$ 的解.

证明 $A(\xi_1+\xi_2)=A\xi_1+A\xi_2=0+0=0$.

[性质2] 若 $x=\xi$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解，k 为实数，

则 $x=k\xi$ 还是 $Ax=0$ 的解.

证明 $A(k\xi)=k(A\xi)=k\,0=0$.

一、齐次线性方程组解的结构

- 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的全体解向量构成的集合是一个向量空间, 称为 $Ax = 0$ 的解空间.
- 若求得 $Ax = 0$ 的解空间的一个基：$x = \xi_1, x = \xi_2, \ldots, x = \xi_t$，那么 $Ax = 0$ 的通解可表示为

$$x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \ldots + k_t\xi_t .$$

- 齐次线性方程组的解空间的一个基称为该齐次线性方程组的基础解系.

一、齐次线性方程组解的结构

2. 基础解系

【定义】 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_t$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解, 若满足:

(1) $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_t$ 线性无关;

(2) $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的任一解都可以由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_t$ 线性表示.

则称 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_t$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的一个**基础解系**.

若 $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_t$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系，则 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解空间是由它的基础解系所生成的向量空间，即

$$\boldsymbol{S}=\operatorname{span}\left(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_t\right)=\left\{\boldsymbol{x}=c_1\xi_1+c_2\xi_2+\cdots+c_t\xi_t \mid c_1,c_2,\cdots,c_t\in\boldsymbol{R}\right\}.$$

一、齐次线性方程组解的结构

3. $Ax=0$ 的基础解系的计算

设 $R(A)=r<n$，为叙述方便，不妨设 A 的行最简形矩阵为

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & \cdots & b_{2,n-r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r,1} & \cdots & b_{r,n-r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0}_{\text{前 } r \text{ 列}} & & & & \underbrace{0 \quad \cdots \quad 0}_{\text{后 } n-r \text{ 列}} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

对应的齐次线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + b_{11}x_{r+1} + \cdots + b_{1,n-r}x_n = 0, \\ \quad x_2 \qquad + b_{21}x_{r+1} + \cdots + b_{2,n-r}x_n = 0, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad\quad x_r + b_{r1}x_{r+1} + \cdots + b_{r,n-r}x_n = 0. \end{cases}$$

令 $x_{r+1}, \ldots, x_n$ 为自由未知量，则

$$\begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1} - \cdots - b_{1,n-r}x_n, \\ x_2 = -b_{21}x_{r+1} - \cdots - b_{2,n-r}x_n, \\ \qquad \cdots\cdots \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1} - \cdots - b_{r,n-r}x_n. \end{cases}$$

一、齐次线性方程组解的结构

令 $x_{r+1}=c_1,\ x_{r+2}=c_2,\ \ldots,\ x_n=c_{n-r}$， 则

齐次线性方程组的通解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{11}c_1-\cdots-b_{1,n-r}c_{n-r} \\ \vdots \\ -b_{r1}c_1-\cdots-b_{r,n-r}c_{n-r} \\ c_1 \\ \ddots \\ c_{n-r} \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + c_{n-r}\begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

记作 $x=c_1\xi_1+c_2\xi_2+\ldots+c_{n-r}\xi_{n-r}$. (满足基础解系(2))

问：$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-r}$ 会不会是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系？

一、齐次线性方程组解的结构

下证 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线性无关.

$$(\xi_1 \quad \xi_2 \quad \cdots \quad \xi_{n-r}) = \begin{pmatrix} -b_{11} & -b_{12} & \cdots & -b_{1,n-r} \\ -b_{21} & -b_{22} & \cdots & -b_{2,n-r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -b_{r,1} & -b_{r,2} & \cdots & -b_{r,n-r} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{前 } r \text{ 行} \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{后 } n-r \text{ 行} \end{array}$$

$n-r$ 列

故 $R(\xi_1 \ \xi_2 \ \dots \ \xi_{n-r}) = n-r$.

所以 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线性无关. (满足基础解系(1))

一、齐次线性方程组解的结构

若 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-r}$ 是 $Ax=0$ 的解，则其为基础解系.

$$\begin{cases} x_1 = \boxed{-b_{11}} x_{r+1} \boxed{-b_{12}} x_{r+2} - \cdots \boxed{-b_{1,n-r}} x_n, \\ x_2 = \boxed{-b_{21}} x_{r+1} \boxed{-b_{22}} x_{r+2} - \cdots \boxed{-b_{2,n-r}} x_n, \\ \cdots\cdots \\ x_r = \boxed{-b_{r1}} x_{r+1} \boxed{-b_{r2}} x_{r+2} - \cdots \boxed{-b_{r,n-r}} x_n. \end{cases}$$

$$\boxed{\xi_1 = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \xi_{n-r} = \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}$$

令 $\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$，则 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ -b_{21} \\ \vdots \\ -b_{r1} \end{pmatrix}$，

结论：$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-r}$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系.

一、齐次线性方程组解的结构

【定理1】设n元齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的系数矩阵的秩$R(A)=r<n$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有基础解系，且基础解系中含$n-r$个向量，即：$\dim \boldsymbol{S}=n-r$.

【解的结构定理】 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 为齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的任一解都可以由$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$唯一地线性表示.

即对任意的 $\boldsymbol{x}\in \boldsymbol{S}$，有：$\boldsymbol{x}=c_1\xi_1+c_2\xi_2+\cdots+c_{n-r}\xi_{n-r}\ \ (c_i\in \boldsymbol{R})$

该式称为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解. $\longrightarrow$ 基础解系的所有线性组合

一、齐次线性方程组解的结构

例 求齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-2x_4=0 \\ 2x_1+3x_2-x_4=0 \\ x_1-x_2-5x_3+7x_4=0 \end{cases}$ 的基础解系与通解.

方法1：先求出通解，再从通解求得基础解系.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -5 & 7 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1-3x_3+4x_4=0 \\ x_2+2x_3-3x_4=0 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_1=3x_3-4x_4 \\ x_2=-2x_3+3x_4 \end{cases}$$

一、齐次线性方程组解的结构

例 求齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-2x_4=0 \\ 2x_1+3x_2-x_4=0 \\ x_1-x_2-5x_3+7x_4=0 \end{cases}$ 的基础解系与通解.

方法1：先求出通解，再从通解求得基础解系.

令$x_3=c_1$， $x_4=c_2$， 得通解表达式

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c_1-4c_2 \\ -2c_1+3c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1\xi_1 + c_2\xi_2$$

ξ_1, ξ_2 是原方程组的基础解系.

一、齐次线性方程组解的结构

方法2：先求出基础解系，再写出通解.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&-2\\2&3&0&-1\\1&-1&-5&7\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-3&4\\0&1&2&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x_1=\ \ 3x_3-4x_4\\x_2=-2x_3+3x_4\end{cases}$$

令 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ，得 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$

合起来便得到基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\\0\end{pmatrix},\ \xi_2=\begin{pmatrix}-4\\3\\0\\1\end{pmatrix}.$

还能找出其它基础解系吗？

本节概要

一、齐次线性方程组解的结构

二、非齐次线性方程组解的结构

二、非齐次线性方程组解的结构

1. $Ax = b$ 解的性质

[性质1] 若 η_1, η_2 都是 $Ax = b$ 的解，则 $\eta_1 - \eta_2$ 是 $Ax=0$ (导出组) 的解.

证　因为 η_1, η_2 都是 $Ax = b$ 的解，则 $A\eta_1=b$，$A\eta_2=b$，

所以 $A(\eta_1-\eta_2) = A\eta_1 - A\eta_2 = b-b=0$，故：$\eta_1-\eta_2$ 是 $Ax=0$ 的解.

[性质2] 若 η 是 $Ax = b$ 的解，ξ 是 $Ax = 0$ 的解，则 $\eta+\xi$ 是 $Ax=b$ 的解.

证　因为 η, ξ 分别是 $Ax=b$ 和 $Ax=0$ 的解，则 $A\eta=b$，$A\xi=0$

所以 $A(\eta+\xi) = A\eta + A\xi = b+0=b$，　故：$\eta+\xi$ 是 $Ax=b$ 的解.

二、非齐次线性方程组解的结构

2. $Ax=b$ 解的结构

【分析】设η^*为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个解, 则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的任一解 $\boldsymbol{x}$ 可表示为

$$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}-\eta^*)+\eta^* \triangleq \xi+\eta^*$$

根据性质1, ξ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，因此有 $\xi=c_1\xi_1+c_2\xi_2+\cdots+c_{n-r}\xi_{n-r}$,

其中 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系. 故

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的特解

通解 $\leftarrow$ $\boxed{\boldsymbol{x}=c_1\xi_1+c_2\xi_2+\cdots+c_{n-r}\xi_{n-r}+\eta^* \quad (c_i\in \boldsymbol{R})}$

"$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$"的通解 = "$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$"的通解 + "$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$"的特解

二、非齐次线性方程组解的结构

例 利用解的结构求线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$ 的通解.

解 对增广矩阵施行初等行变换

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_4 = \dfrac{1}{2}, \\ x_3 - 2x_4 = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

可见 $R(A) = R(\overline{A}) = 2 < 4$, 方程组有无穷多个解.

取 $x_2 = x_4 = 0$, 则 $x_1 = x_3 = \dfrac{1}{2}$, 得方程组的一个特解: $\eta^* = \left(\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{2}, 0\right)^{\mathrm{T}}$

二、非齐次线性方程组解的结构

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1&1&0\\1&-1&1&-3&1\\1&-1&-2&3&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&0&-1&\frac{1}{2}\\0&0&1&-2&\frac{1}{2}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

对应的齐次线性方程组为

$$\begin{cases}x_1-x_2-x_4=0,\\x_3-2x_4=0.\end{cases}$$

取 $\begin{pmatrix}x_2\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 及 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，则 $\begin{pmatrix}x_1\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 及 $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

得对应的齐次方程组的基础解系为：

$$\xi_1=(1,1,0,0)^T,\ \xi_2=(1,0,2,1)^T.$$

则原方程组的通解为 $x=c_1\xi_1+c_2\xi_2+\eta^* \quad (c_1,c_2\in R)$

谢 谢!