第六章 地球椭球及其数学投影变换的基本理论

讲授：张双成　　　　测绘科学与工程系

大地测量学课程要解决的核心问题

1. 大地测量学的目的与任务是什么?
2. 空间大地测量未来的发展趋势?
3. 大地测量的时空基准是什么（参心、地心坐标、ITRF）？
4. 参考椭球、总地球椭球、正常椭球的目的是什么?
5. 为什么要进行大地坐标系的转换？转换方法有哪些?
6. 地球重力场在大地测量中发挥什么作用？水准原点?
7. 为什么要选择正常高作为我国的高程系统?
8. 为什么要选择大地水准面？大地水准面精化的目的是什么?
9. 正常高与GPS高如何转换?
10. 为什么要进行大地测量观测值的归算?
11. 为什么要进行高斯投影?

主要讲解内容

1、地球椭球的性质

（地球椭球的基本几何参数、椭球面上的常用坐标系）

2、地球椭球面的性质

（曲率半径、弧长计算、大地线、大地测量主题解算）

3、大地测量归算

（地面观测值归算至椭球面、方向归算、长度归算）

4、地图数学投影变换

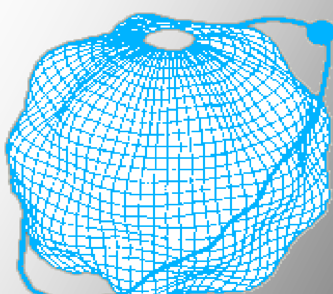
（地图投影变形与分类、高斯投影）

地球椭球及其数学投影变换

地球椭球及其数学投影变换

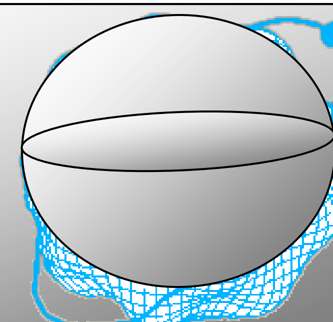
地球形状

自然表面



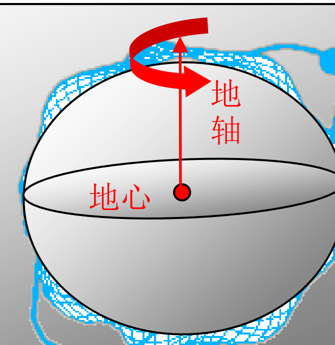
大地水准面

参考椭球面



大小

正常椭球面

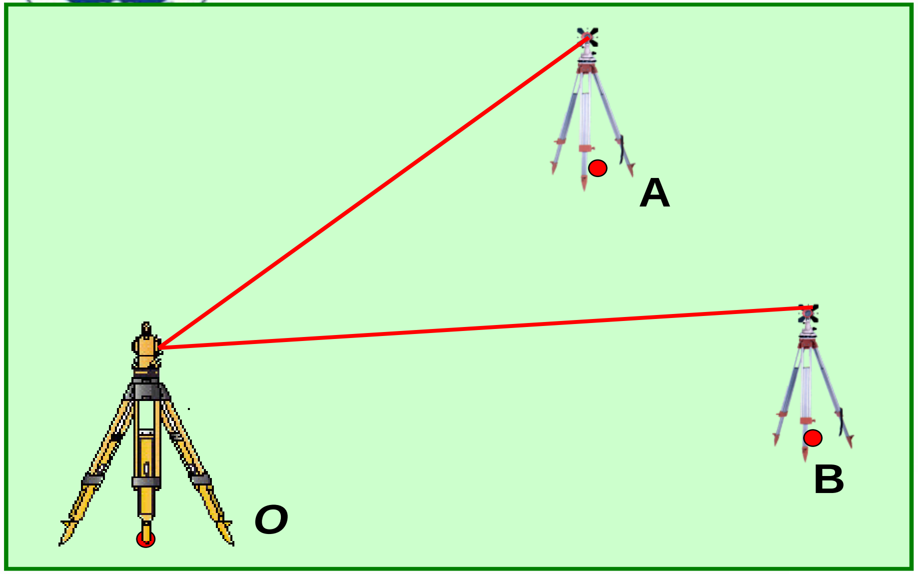


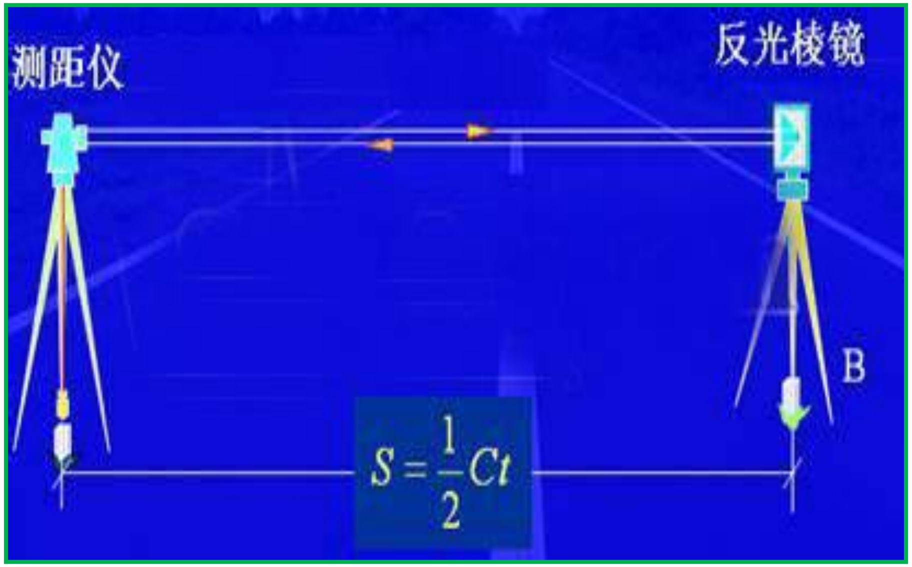
大小

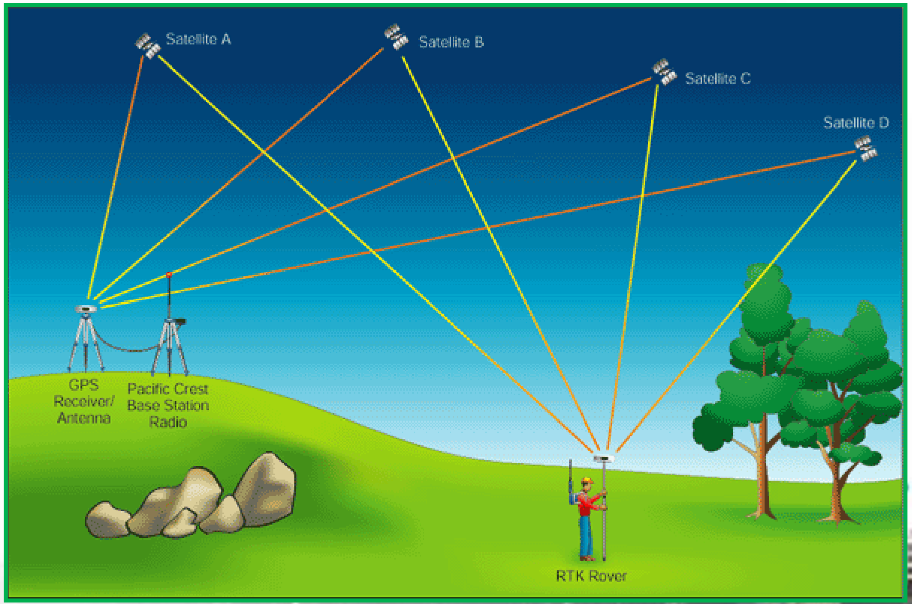
ω

fM

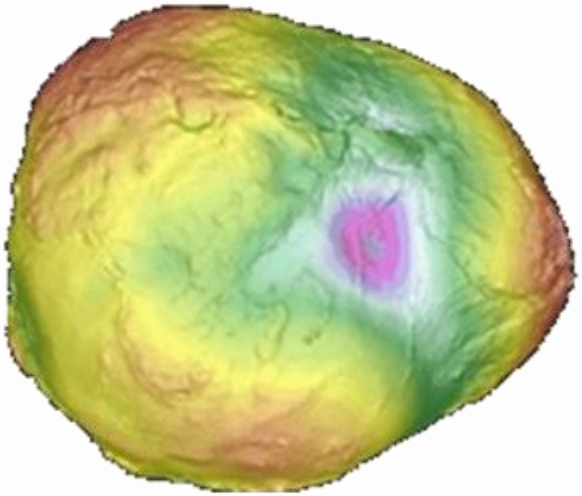
大地测量的外业观测值

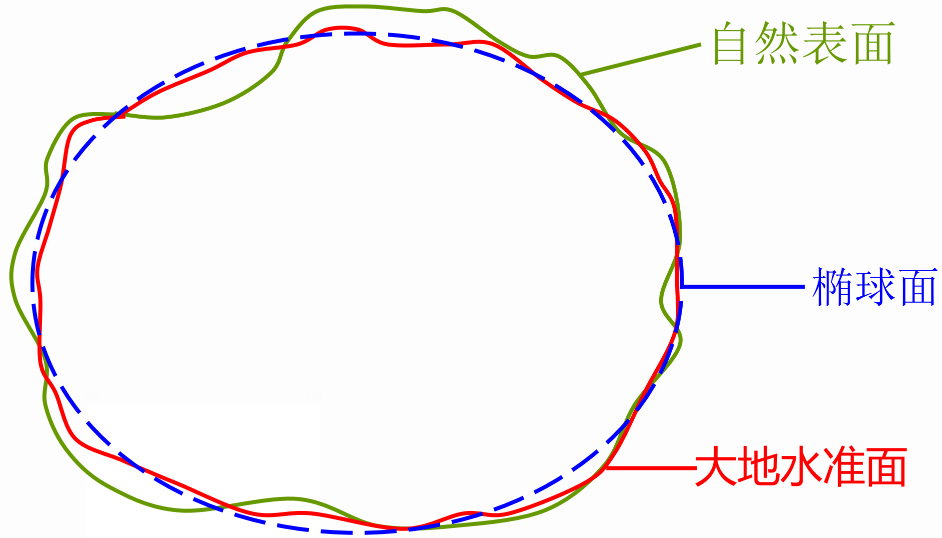

A
B
O


测距仪
反光棱镜
B
$S=\frac{1}{2}Ct$


Satellite A
Satellite B
Satellite C
Satellite D
GPS Receiver/ Antenna
Pacific Crest Base Station Radio
RTK Rover

地球椭球及其数学投影变换





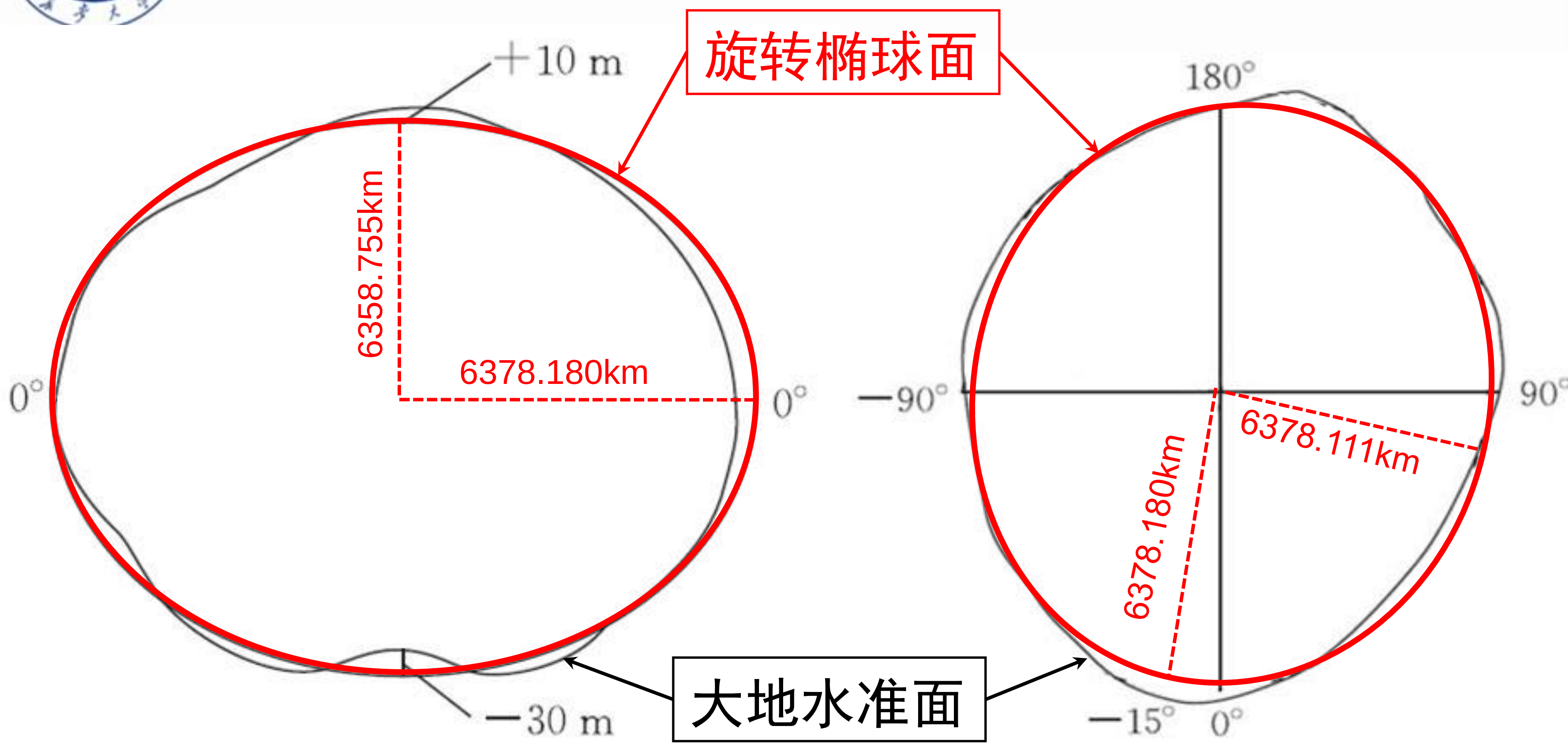
- **地球自然表面——凹凸不平的面，无法用数学公式表达，不能作为基准面。**
- **大地水准面——与平均海水面重合并延伸到大陆内部水准面。**
- **地球椭球——根据大地水准面形状和大小，拟合一个最为接近地球的椭球体**

大地测量计算的基准面要求

大地测量计算的基准面应满足以下要求:

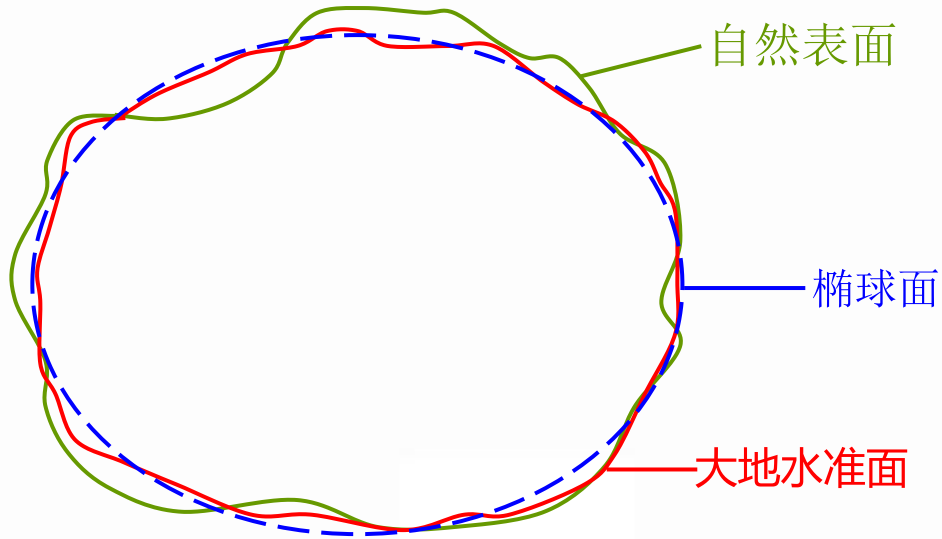
- 接近地球自然形体的曲面;
- 基准面应是一个便于计算的数学曲面;
- 基准面与大地体的位置要固定。

大地水准面与参考椭球



大地水准面与旋转椭球体面

大地水准面与参考椭球



- 总地球椭球：全球范围内和整个大地体最为密合——地球形状

$$\iint_{\sigma} N^2 d\sigma = \min$$ N为大地水准面与总地球椭球的差距

- 参考椭球：与局部地区内大地体最为密合——区域测绘

椭球归算的意义和要求

确定水平坐标的流程

已知坐标（L，B） ← - - → 已知坐标（X，Y）

天文	大地	平面
水平方向	水平方向	水平方向
垂直角	垂直角	垂直角
地面距离	地面距离	地面距离
天文经纬度	大地经纬度	
天文方位角	大地方位角	平面方位角

布设水平控制网 —观测→ 地面上观测元素 —归算→ 椭球面上的元素 - -归算- → 高斯平面的元素

椭球面上的元素：推算 ↓ 平差 → 大地坐标（L，B）

高斯平面的元素：推算 ↓ 平差 → 平面坐标（X，Y）

大地坐标（L，B） ← - - → 平面坐标（X，Y）

1、归算的意义

通过归算，为在椭球面上的水平坐标计算提供观测数据。

地球椭球的基本几何参数及其相互关系

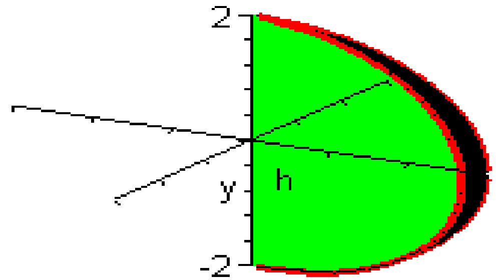
地球椭球（earth ellipsoid）

在大地测量中，用来代表地球的椭球叫做***地球椭球***（简称椭球），它是地球的数学代表。具有一定几何参数、定位及定向的用以代表某一地区大地水准面的地球椭球叫做***参考椭球***。

地面上一切观测元素都应归算到参考椭球面上，并在这个面上进行计算。***参考椭球面是大地测量计算的基准面***，同时又是研究地球形状和地图投影的参考面。地球椭球是经过适当选择的旋转椭球。

地球椭球（earth ellipsoid）

地球椭球： 用来代表地球形状和大小的旋转椭球，简称椭球，它是对地球形状的几何概括，是地球真实形状的数学化模型。



地球椭球

大地测量中，用以代表地球形状和大小的旋转椭球。

地球椭球是经过适当选择的旋转椭球，旋转椭球的形状和大小常用子午椭圆的五个基本几何参数（或称元素）表示。

几何参数

长半径	a
短半径	b
极曲率半径	$c=\dfrac{a^2}{b}$
扁率	$\alpha=\dfrac{a-b}{a}$
第一偏心率	$e=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$
第二偏心率	$e'=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}$

地球椭球

几何参数

长半径	a	表示椭球的大小
短半径	b	
极曲率半径	$c=\dfrac{a^2}{b}$	
扁率	$\alpha=\dfrac{a-b}{a}$	表示椭球的形状
第一偏心率	$e=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$	
第二偏心率	$e'=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}$	

地球椭球

地球椭球参数：

几何参数

- 长半径　a
- 短半径　b
- 极曲率半径　$c = \dfrac{a^2}{b}$
- 扁率　$\alpha = \dfrac{a-b}{a}$
- 第一偏心率　$e = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$
- 第二偏心率　$e' = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}$

第一辅助函数*W*

$$\left.\begin{aligned} W &= \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B} \\ V &= \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B} \end{aligned}\right\}$$

第二辅助函数*V*

地球椭球

参数之间的关系：

$b=a\sqrt{1-e^2},a=b\sqrt{1+e'^2}$	规 律
$a=c\sqrt{1-e^2},c=a\sqrt{1+e'^2}$	小值=大值 $\times\sqrt{1-e^2}$
$e=e'\sqrt{1-e^2},e'=e\sqrt{1+e'^2}$	
$W=V\sqrt{1-e^2},V=W\sqrt{1+e'^2}$	大值=小值 $\times\sqrt{1+e'^2}$

$$\alpha=1-\sqrt{1-e^2},e^2=2\alpha-\alpha^2$$

地球椭球

克拉索夫斯基椭球：

近似估算

$$a \approx b \approx c \approx 6400km$$

$$\alpha \approx 1:300$$

$$e^2 \approx e'^2 \approx 0.007 \approx 1:150$$

a = 6 387 245.00000m

b = 6 356 863.01877m

c = 6 399 698.90178m

α = 1 : 298.3

e^2= 0.00669 34216 2297

= 0.00673 85254 1468

决定旋转椭球的形状和大小，只需知道五个参数中的两个参数足够，但其中至少有一个长度元素。

地球椭球

我国采用的地球椭球参数表

椭球名称	年代	a(m)	α
克拉索夫斯基	1940	6378245	1：298.3
IUGG-1975	1975	6378140	1：298.257
WGS-84	1996	6378137	1：298.257223563
GRS80	1980	6378137	1：298.2572

传统大地测量采用天文大地测量和重力测量资料推求地球椭球的几何参数，空间大地测量的兴起和发展，为研究地球形状和引力场开辟了新途径。

Selected Reference Ellipsoids

Ellipse	Semi-Major Axis (meters)	1/Flattening
Airy 1830	6377563.396	299.3249646
Everest 1830	6377276.345	300.8017
Bessel 1841	6377397.155	299.1528128
Clarke 1866	6378206.4	294.9786982
Clarke 1880	6378249.145	293.465
Krassovsky 1940	6378245.0	298.3
Hough 1956	6378270.0	297.0
Fischer 1960 (Mercury)	6378166.0	298.3
Fischer 1968	6378150.0	298.3
G R S 1967	6378160.0	298.247167427
G R S 1975	6378140.0	298.257
G R S 1980	6378137.0	298.257222101
International	6378388.0	297.0
South American 1969	6378160.0	298.25
WGS 60	6378165.0	298.3
WGS 66	6378145.0	298.25
WGS 72	6378135.0	298.26
WGS 84	6378137.0	298.257223563

经典大地测量

空间大地测量

Peter H. Dana 9/1/94

地球椭球参数

地球椭球

- 长半径　a
- 短半径　b
- 极曲率半径　$c=\frac{a^2}{b}$
- 扁率　$\alpha=\frac{a-b}{a}$
- 第一偏心率　$e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$
- 第二偏心率　$e'=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}$

＋ 定位 ＝ 参考椭球

在大地测量中，用来代表地球的椭球叫做地球椭球，它是地球的数学代表。具有一定几何参数、定位及定向的用以代表某一地区大地水准面的地球椭球叫做参考椭球。地面上一切观测元素都应归算到参考椭球面上，并在这个面上进行计算。参考椭球面是大地测量计算的**基准面**，同时又是研究地球形状和地图投影的参考面。

地球椭球参数

测量技术在不断发展和进步，地球椭球基本参数发展分为两个阶段：

一、传统大地测量技术（Before 1950s）——地球椭球的几何特征

长半轴、短半轴、扁率、第一偏心率和第二偏心率

二、卫星大地测量（after 1960s）——地球椭球的几何和物理特征

地心引力常数GM、地球自转角速度ω、二阶球谐系数J_2、长半轴a

——1967年14届国际大地测量协会（IAG）

地球椭球参数

卫星大地测量（after 1960s）——地球椭球的几何和物理特征

- 卫星大地测量克服了海洋的障碍，扩大了对地球表面的测量范围
- 利用卫星的动力性能来测定地球椭球参数，显著地提高测定精度

1967年14届国际大地测量协会（IAG）建议用下面四个大地测量基本常数来表示地球的几何和物理特征。

地心引力常数GM

地球自转角速度ω

二阶球谐系数J_2

长半轴a

$$\alpha = \frac{3}{2}J_2 + \frac{q}{2}$$

$$q = \frac{\omega^2 a^3}{GM}$$

赤道上的离心力与重力之比

长半轴 a **短半轴** b

$$\alpha = \frac{a-b}{a}$$

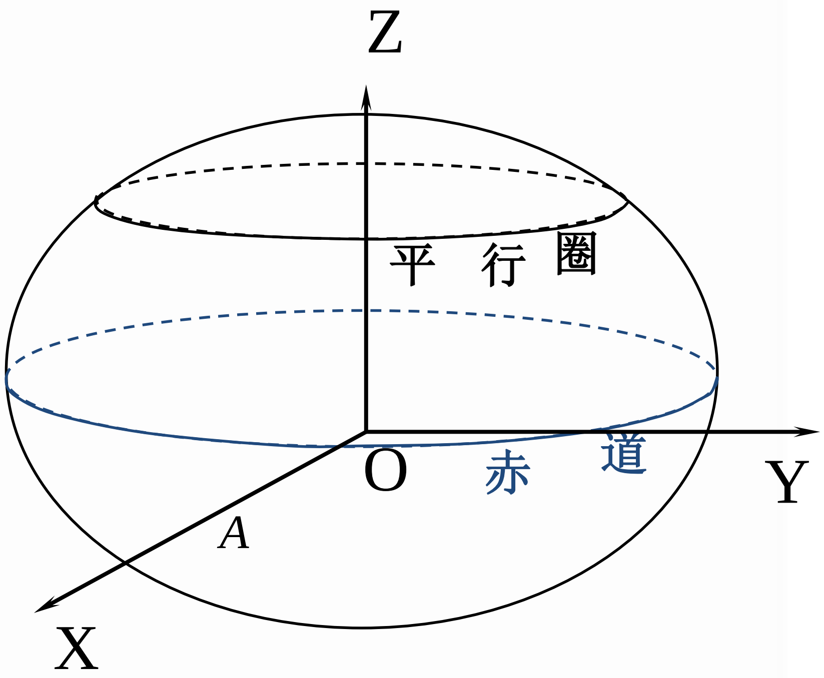
$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \qquad e' = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}$$

地球椭球的定义

■ 0是椭球中心

■ 赤道

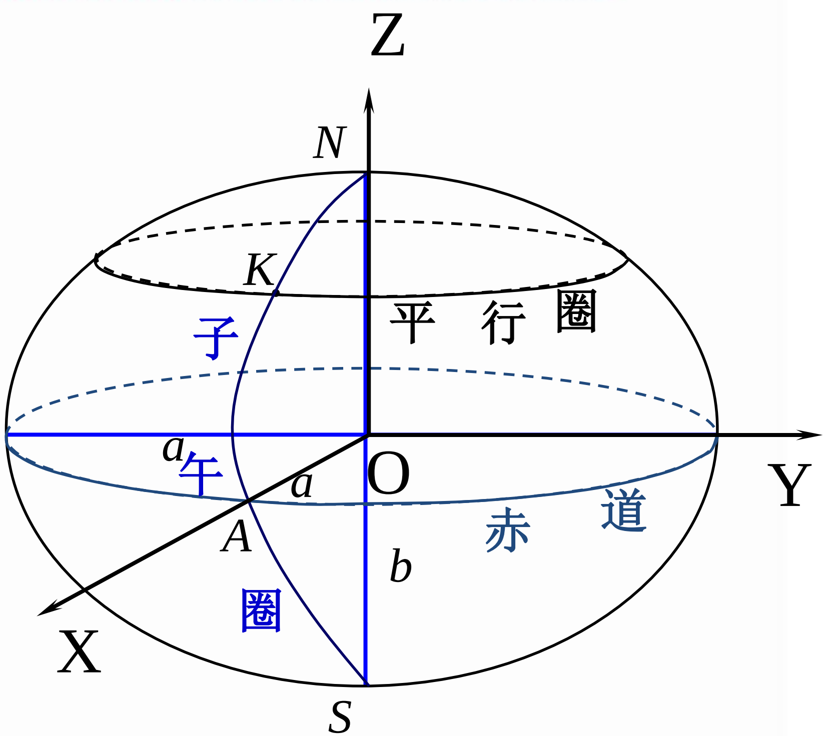
通过椭球中心的平行圈



■ 平行圈/纬圈

垂直于旋转轴的平面与椭球面相截所得的圆

地球椭球的定义



■ NS为旋转轴

■ 南、北极点

最小的平行圈

■ 子午圈/经圈/子午椭圆

包含旋转轴的平面与椭球面相截所得椭圆

■ a为长半轴

■ b为短半轴

地球椭球的作用

1）一定的参考椭球确定了一定的大地坐标系；

2）地面点水平坐标（大地经纬度）的参考面，

高程　（大地高）的基准面；

3）描述大地水准面形状的参考面；

4）地图投影的参考面；

5）参考椭球面及其法线分别是大地测量计算的基本面和基本线。

椭球面上的常用坐标系及相互关系

椭球面上常用坐标系及相互关系

为了表示椭球面上点的位置，必须建立相应的坐标系。

- 大地坐标系
- 空间直角坐标系
- 子午面直角坐标系
- 地心纬度坐标系
- 大地极坐标系

椭球面上常用坐标系及相互关系

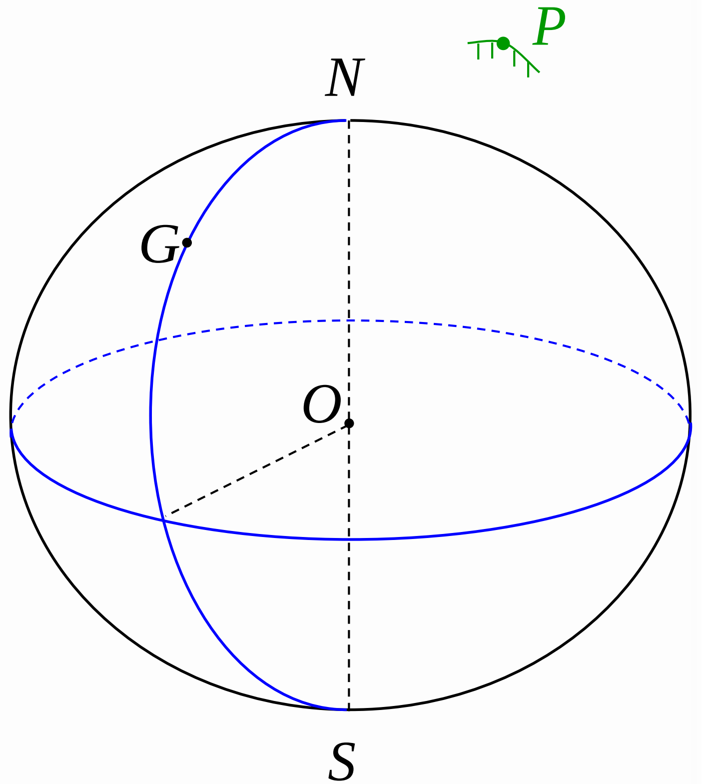
大地坐标系（geodetic coordinate system）

- **基本面、线**

赤道面

起始大地子午面：*NGS*

椭球面法线



参考椭球

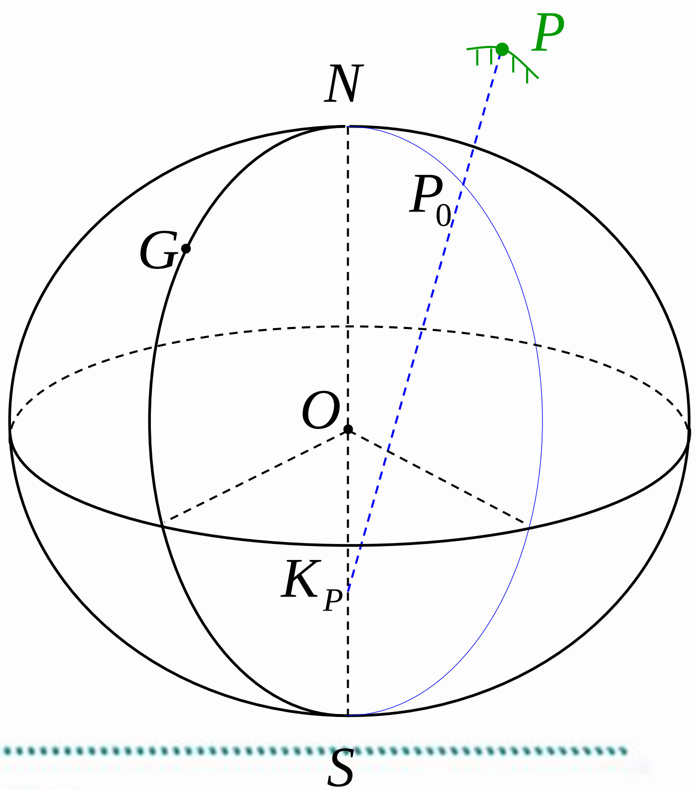
椭球面上常用坐标系及相互关系

大地坐标系（geodetic coordinate system）

- **大地坐标（*B*，*L*，*H*）**

测站法线： PK_P

测站大地子午面： NP_0S



参考椭球

椭球面上常用坐标系及相互关系

大地坐标系（geodetic coordinate system）

- **大地坐标（*B*，*L*，*H*）**

地面点大地经度：*L*，

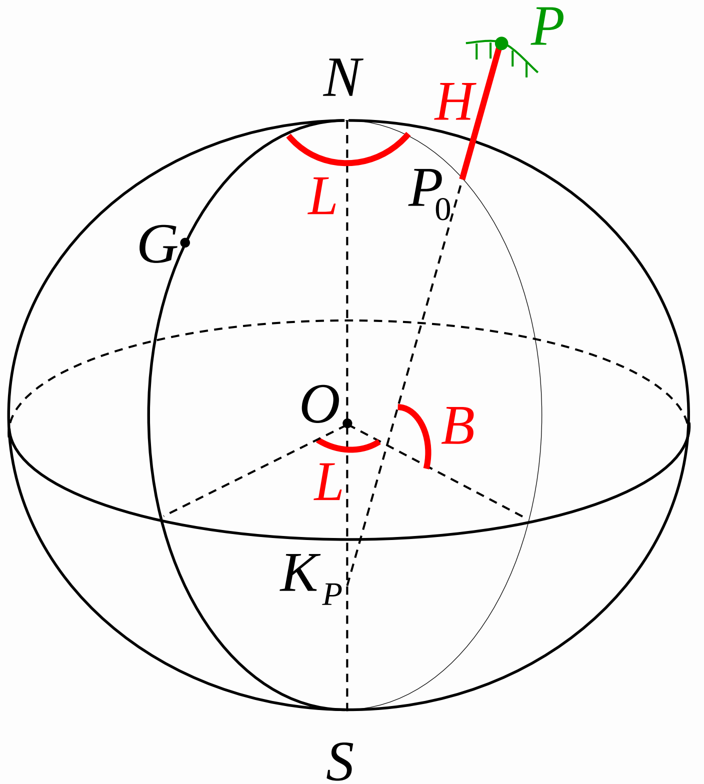
0° ~360°或0° ~±180°

地面点大地纬度：*B*，

0° ~±90°

地面点大地高：*H*，

可正可负。



参考椭球

椭球面上常用坐标系及相互关系

大地坐标系是大地测量的基本坐标系，具有如下优点：

① 它是整个椭球体上统一的坐标系，是全世界公用的最方便的坐标系统。经纬线是地形图的基本线，所以在地形测绘中应用很广泛。

② 它与同一点的天文坐标（天文经纬度）比较，可以确定该点的垂线偏差的大小。

③ 大地坐标系对于空间大地测量坐标的全球统一非常重要。

椭球面上常用坐标系及相互关系

➢ **大地空间直角坐标系（space rectangular coordinate system）**

坐标原点位于总地球椭球(或参考椭球)质心；Z轴与地球平均自转轴相重合，亦即指向某一时刻的平均北极点；X轴指向平均自转轴与平均格林尼治天文台所决定的子午面与赤道面的交点G；Y轴与此平面垂直，且指向东为正。

地心空间直角系与参心空间直角坐标系之分。

椭球面上常用坐标系及相互关系

➢ 大地空间直角坐标系

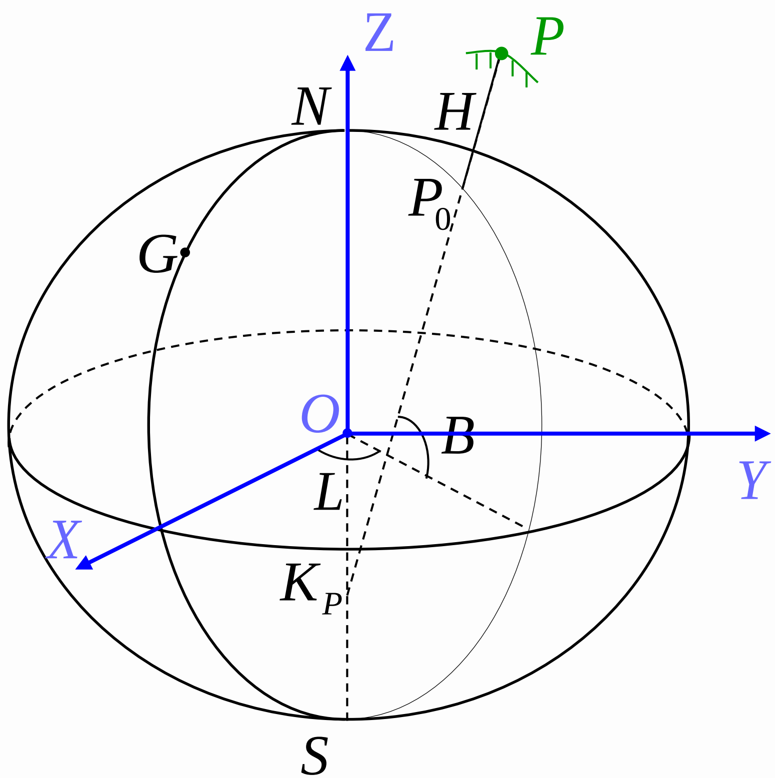
■ 原点及轴向

原点：椭球中心*O*

***Z* 轴**：与椭球短轴重合，指 向北极方向

***X*轴**：指向起始大地子午面与椭球赤道的交点方向

***Y*轴**：构成右手坐标系



参考椭球

椭球面上常用坐标系及相互关系

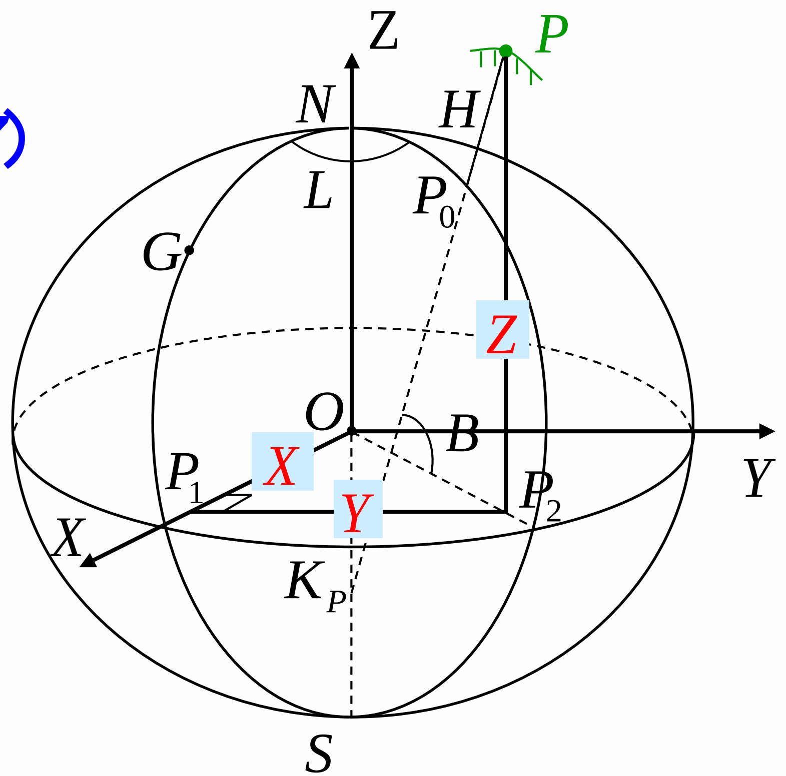
➢ 大地空间直角坐标系

■ **大地空间直角坐标（*X*, *Y*, *Z*）**

地面点*X*坐标： $\overline{OP_1}$

地面点Y坐标： $\overline{P_1P_2}$

地面点Z坐标： $\overline{PP_2}$



参考椭球

椭球面上常用坐标系及相互关系

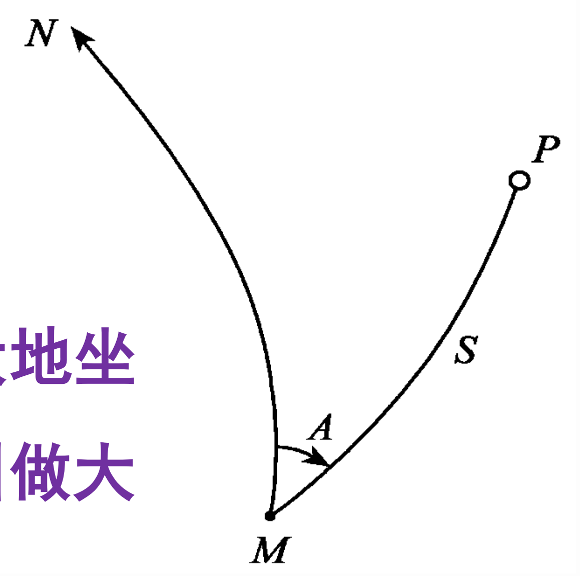
➢ 大地极坐标系

M是椭球面上一点，MN是过M的子午线，S为连接MP的大地线长，A为大地线在M点的方位角。

以M为极点；

MN为极轴；

P点极坐标为（S， A）



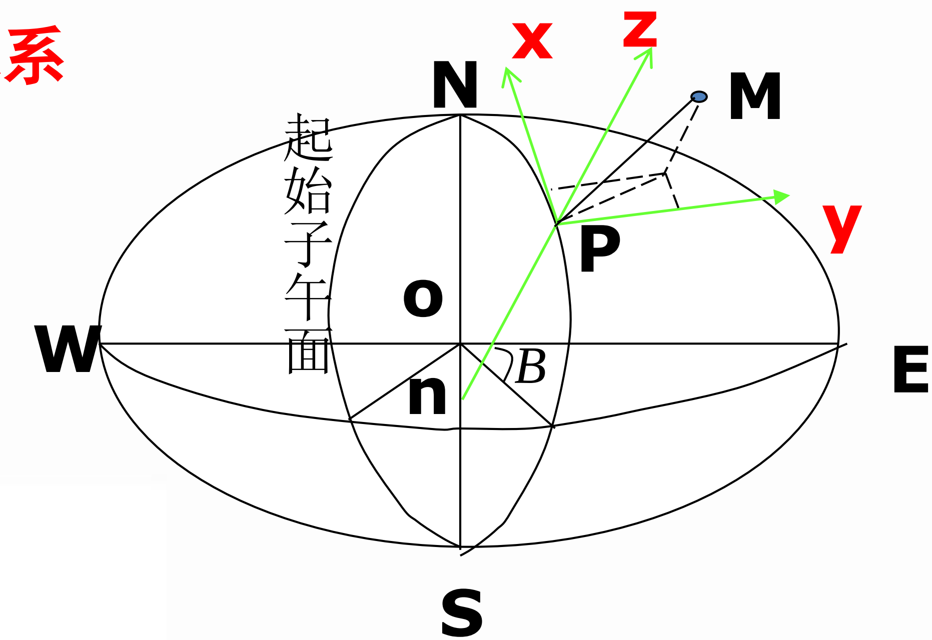
椭球面上点的极坐标（S,A）与大地坐标（L,B）可以互相换算，这种换算叫做大地主题解算。

椭球面上常用坐标系及相互关系

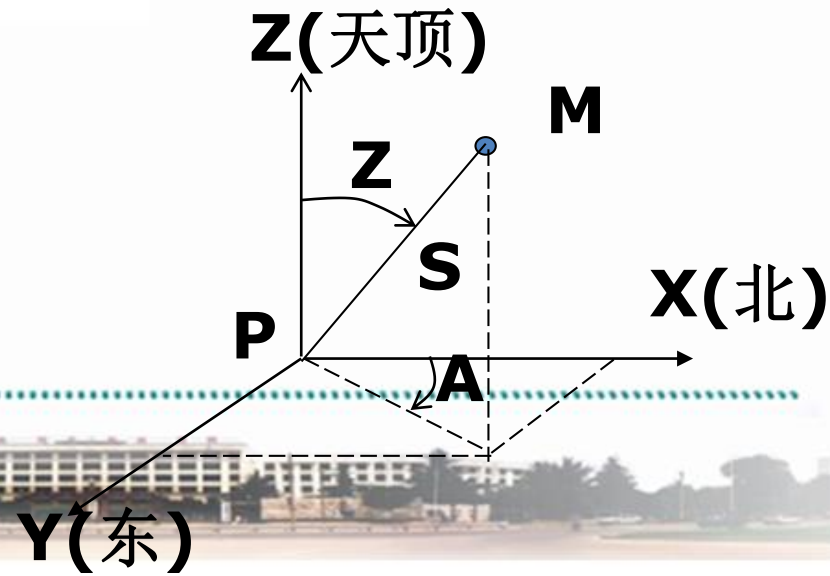
➢ 大地站心地平坐标系

以测站P为原点，以P点法线为Z轴，天顶方向为正，以子午线切线方向为X轴，向北为正，Y轴与XPZ平面垂直，向东为正.

Z为天顶距，A为大地方位角，S为M点到站心点的斜距. M点直角坐标(x, y, z)或（n, e, h），极坐标为(S, A, Z)



$$x = S\sin Z\cos A$$
$$y = S\sin Z\sin A$$
$$z = S\cos Z$$
$$conZ = \frac{Z}{S}, \tan A = \frac{Y}{X}$$
$$S = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



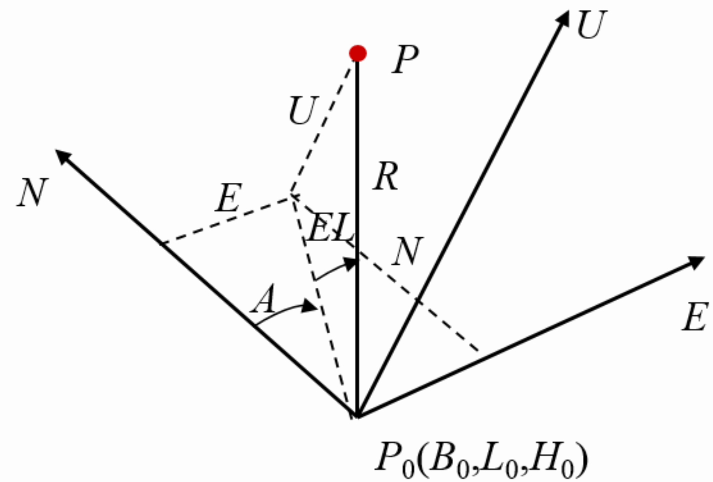
椭球面上常用坐标系及相互关系

大地站心地平坐标系

站心极坐标系[NEU]:在站心地平坐标系下，将站心地平坐标表示为方位角A，高度角EL和极距R

$$\begin{cases} R = \sqrt{N^2 + E^2 + U^2} \\ A = \arctan(E/N) \\ EL = \arcsin(U/R) \end{cases}$$

$$\begin{cases} N = R\cos EL \cos A \\ E = R\cos EL \sin A \\ U = R\sin EL \end{cases}$$

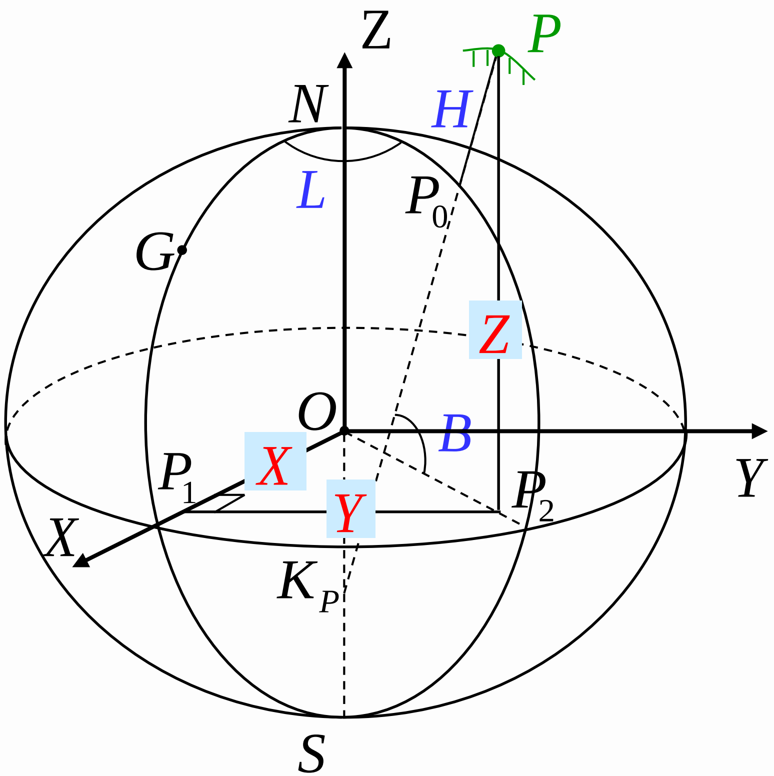


进行GPS观测时，采用GPS卫星相对于测站的高度角、方位角来描述其在空间中的方位。实际上，如果再加上测站到卫星的距离，就是一个完整的站心坐标

大地坐标系与空间直角坐标系

＊ 补充说明

■ 一个参考椭球（大小+定位）可以确定一套大地坐标系和一套大地空间直角坐标系，这些坐标系之间必有一定的关系，坐标系的关系也即同一点的两套坐标之间的关系。

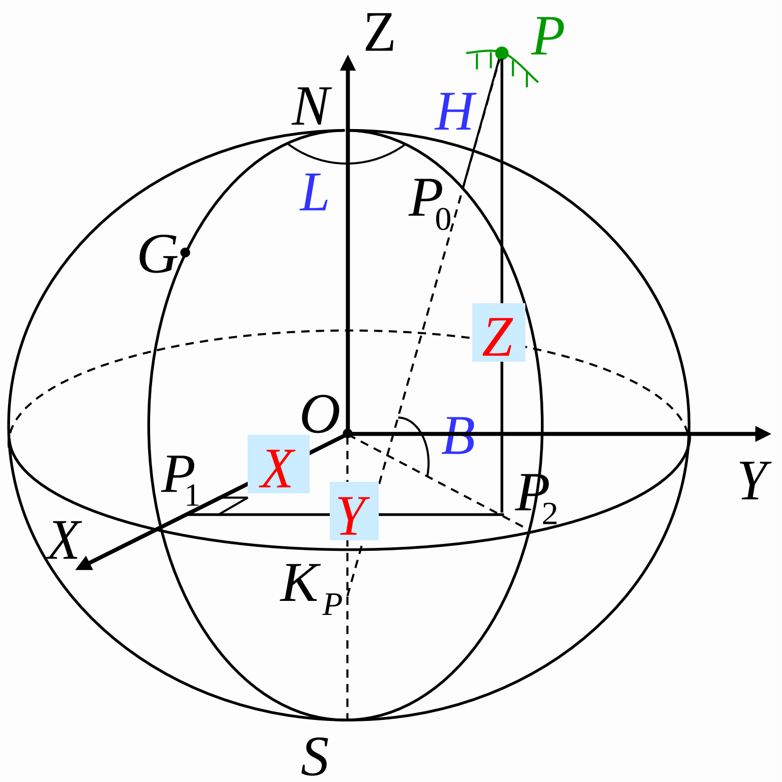


参考椭球

大地坐标系与空间直角坐标系

＊　补充说明

■ 大地测量学中，所说的地面点的大地坐标和大地空间直角坐标都隐含着一个参考椭球，没有参考椭球也就没有这些坐标。

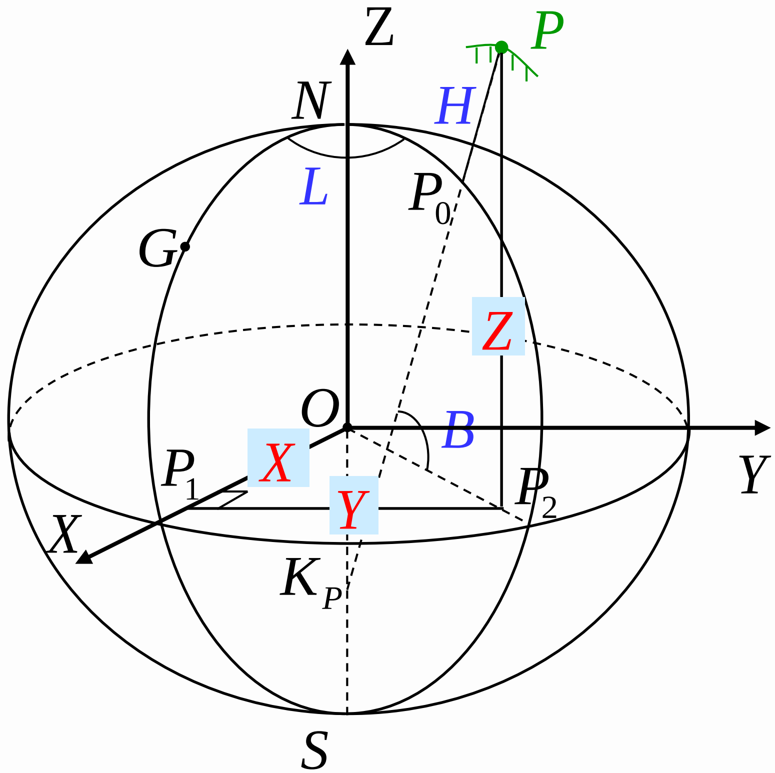


参考椭球

大地坐标系与空间直角坐标系

＊ 补充说明

■ 实用中，经常说的某个点的某一坐标系下的坐标，也意味着有一个参考椭球，坐标是相对该参考椭球的。因此，大地测量学中，坐标系与参考椭球是等价的。

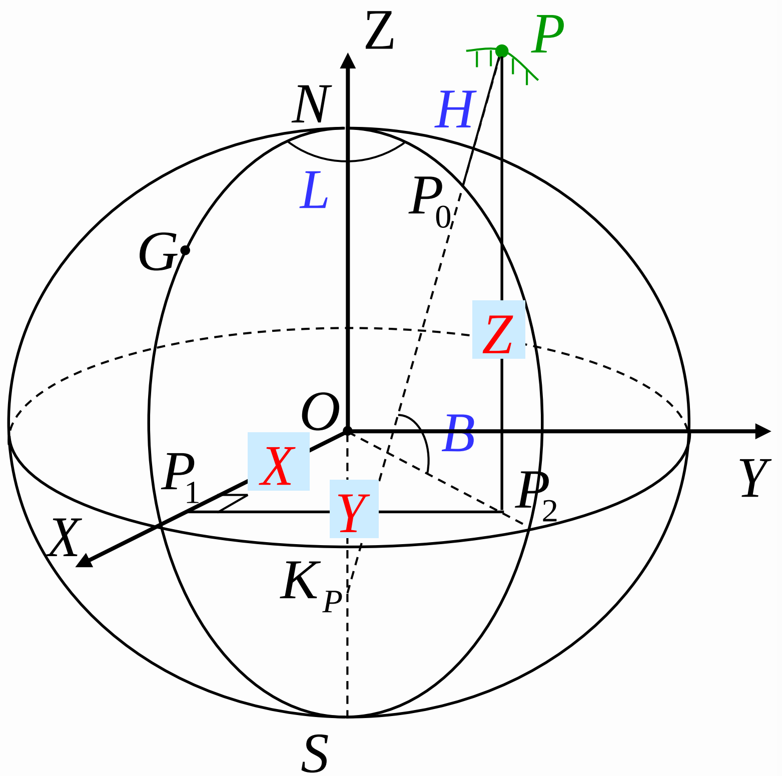


参考椭球

大地坐标系与空间直角坐标系

* 补充说明

■ 地面点沿法线在参考椭球面上都有一个投影点，这两点的B、L相同，如果知道了投影点的B、L，也就知道了地面点的水平坐标，这是今后在椭球面上推算地面点B、L的思想。

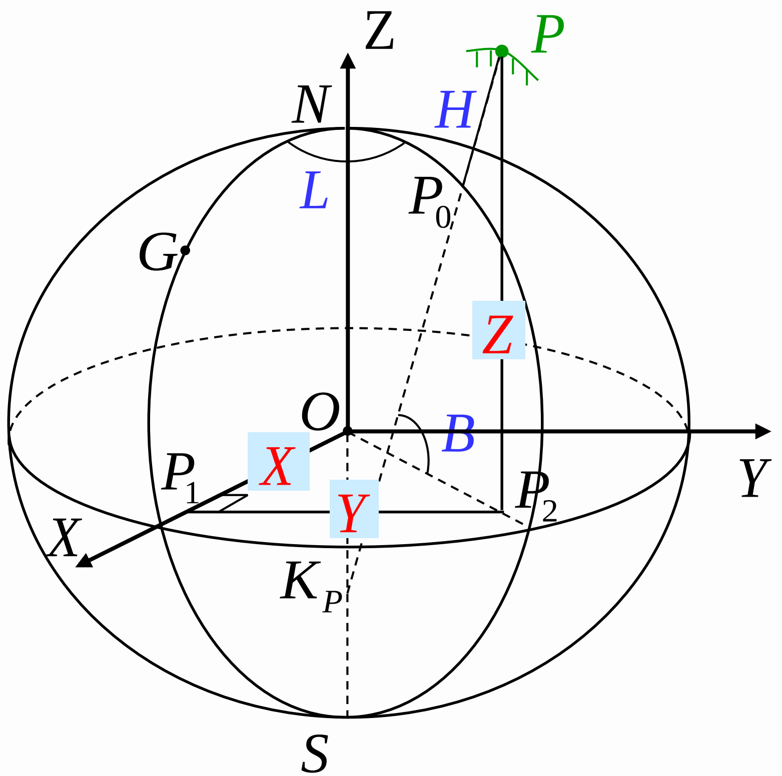


参考椭球

大地坐标系与空间直角坐标系

＊ 补充说明

■ 相对参考椭球的坐标系也称为参心坐标系或相对坐标系；相对总地球椭球的坐标系也称为地心坐标系或绝对坐标系。



参考椭球

同一参考椭球下大地坐标

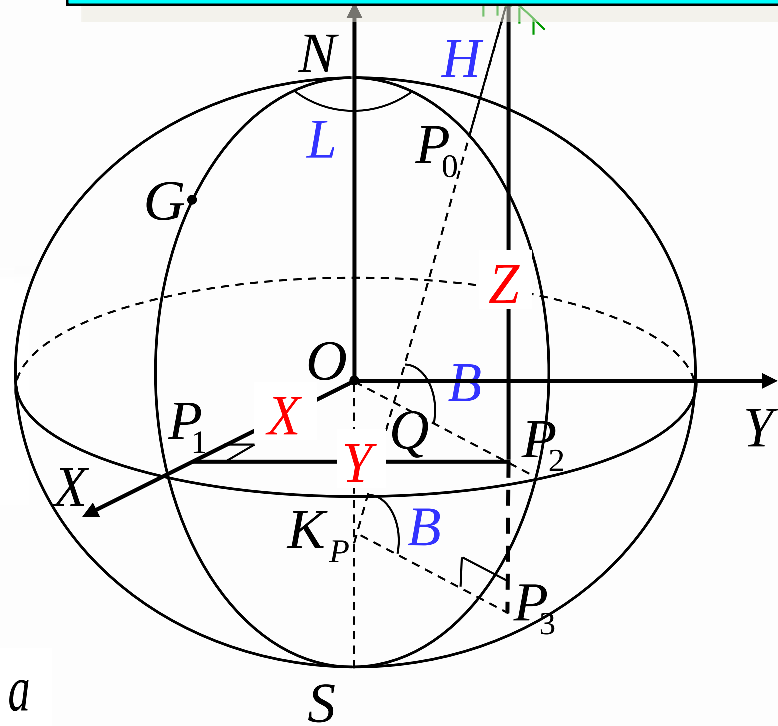
$$OP_2=(N+H)\cos B$$
$$PP_3=(N+H)\sin B$$
$$P_2P_3=Ne^2\sin B$$

1、（B，L，H）→（X，

$$\left.\begin{aligned} X &= OP_2\cos L \\ Y &= OP_2\sin L \\ Z &= PP_3\text{-}P_2P_3 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} X &= (N+H)\cos B\cos L \\ Y &= (N+H)\cos B\sin L \\ Z &= (N(1-e^2)+H)\sin B \end{aligned}\right\}$$

$$N=\frac{a}{W}$$

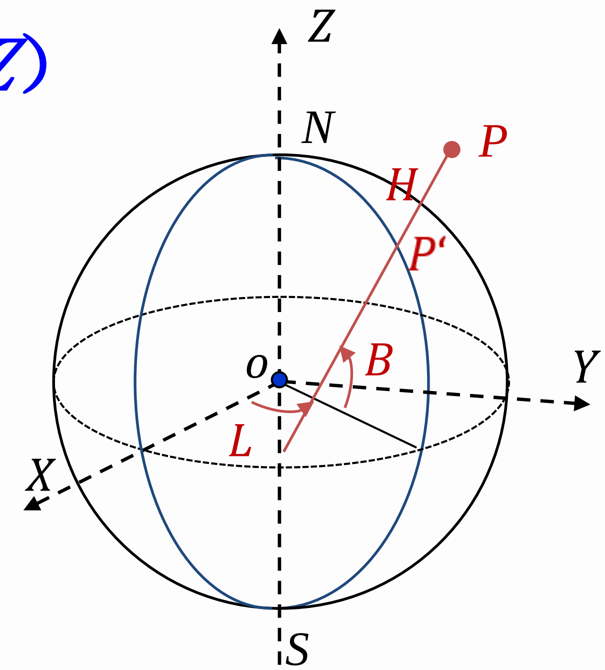


参考椭球

$$\left.\begin{aligned} W &= \sqrt{1-e^2\sin^2 B} \\ V &= \sqrt{1+e'^2\cos^2 B} \end{aligned}\right\}$$

同一参考椭球下大地坐标与空间直角坐标的转换

1、（B，L，H）→（X，Y，Z）



$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N+H)\cos B\cos L \\ (N+H)\cos B\sin L \\ \left[N\left(1-e^2\right)+H\right]\sin B \end{bmatrix}$$

$$N=\frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}},\qquad e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}$$

N：卯酉圈半径

a：地球椭球的长半轴

b：地球椭球的短半轴

同一参考椭球下大地坐标与空间直角坐标的转换

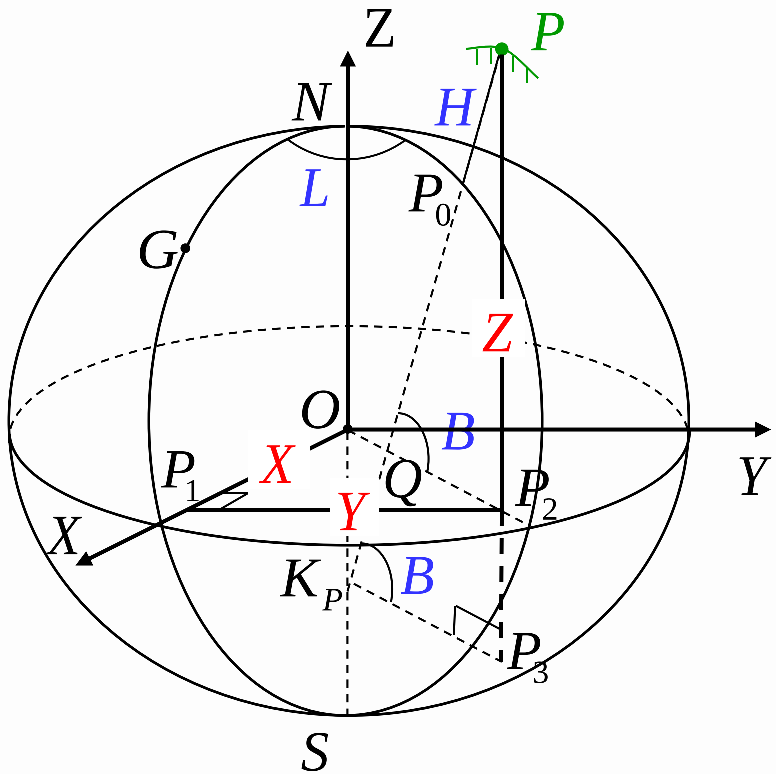
2、（X，Y，Z）→（B，L，H）

$$\left.\begin{aligned} X &= (N+H)\cos B\cos L \\ Y &= (N+H)\cos B\sin L \\ Z &= (N(1-e^2)+H)\sin B \end{aligned}\right\}$$

⇓

$$\tan L = \frac{Y}{X} \Leftrightarrow L = a\tan\frac{Y}{X}$$

$$H = \frac{\sqrt{X^2+Y^2}}{\cos B} - N$$



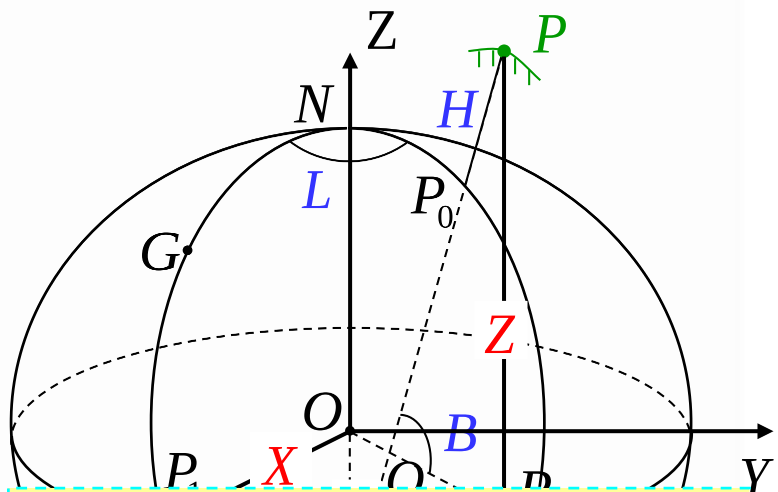
参考椭球

同一参考椭球下大地坐标与

$$N=\frac{a}{W}=\frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}$$

2、（*X*, *Y*, *Z*） → （*B*, *L*

$$\tan B=\frac{Z+N\cdot e^2\sin B}{\sqrt{X^2+Y^2}}$$



$$\tan B=\frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2}}\left(Z+\frac{ae^2\tan B}{\sqrt{1+\tan^2 B-e^2\tan^2 B}}\right)$$

迭代求解法，初始值： $\tan B_0=\dfrac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}}$

收敛条件为： $\left|\tan B_i-\tan B_{i-1}\right|<\varepsilon, i=1,\ldots$

迭代收敛解为： $B=\operatorname{atan}(\tan B_J)$

说明：

1）ε 为一小正数，如 ε =5×10^{-10}；

2）*J* 为迭代收敛时的迭代次数。

同一参考椭球下大地坐标与空间直角坐标的转换

1、（B，L，H）→（X，Y，Z）

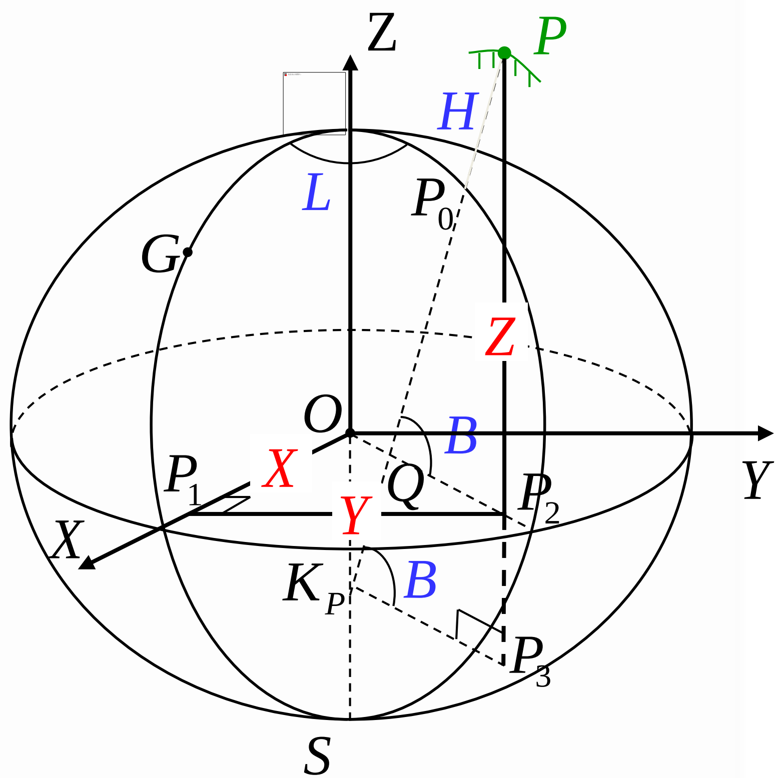
$$\left.\begin{aligned} X &= (N+H)\cos B\cos L \\ Y &= (N+H)\cos B\sin L \\ Z &= (N(1-e^2)+H)\sin B \end{aligned}\right\}$$

2、（X，Y，Z） → （B，L，H）

$$\tan L = \frac{Y}{X} \Leftrightarrow L = a\tan\frac{Y}{X}$$

$$\tan B = \frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2}}\left(Z + \frac{ae^2\tan B}{\sqrt{1+\tan^2 B - e^2\tan^2 B}}\right)$$

$$H = \frac{\sqrt{X^2+Y^2}}{\cos B} - N$$



参考椭球

同一参考椭球下大地坐标与空间直角坐标的转换

1、（**B**，**L**，**H**）→（*X*，*Y*，*Z*）

- **算例：**

已知某点1954年北京坐标系的大地坐标为：

$$\begin{cases} B = 33^\circ 44' 55.666'' \\ L = 77^\circ 11' 22.333'' \\ H = 5555.660m \end{cases}$$

试编程求该点1954年北京坐标系的大地空间直角坐标。（以米为单位输出到屏幕，保留小数点后3位）

注：1954年北京坐标系使用的是克拉索夫斯基椭球。

同一参考椭球下大地坐标与空间直角坐标的转换

2、 （X, Y, Z） → （B, L, H）

- **算例**

已知某点1954年北京坐标系的大地空间直角坐标为：

$$
\begin{cases}
X = 1178143.532m \\
Y = 5181238.388m \\
Z = 3526461.538m
\end{cases}
$$

试编程求该点1954年北京坐标系的大地坐标？（角度以度、分、秒形式输出到屏幕，长度以米单位输出到屏幕，均保留小数点后3位）

注：1954年北京坐标系使用的是克拉索夫斯基椭球。

思考题

点 号	三维空间直角坐标（单位：m ）		
	X	Y	Z
BJFS	-2148744.2580	4426641.2470	4044655.8790
BJSH	-2154109.4234	4373150.5330	4099357.1061
JIXN	-2259012.3602	4333892.0191	4084475.2137

思考与练习：

1、什么是站心坐标系？

2、如何求取站心坐标？

3、如何求取以BJFS为站心原点，BJSH的站心坐标？

点 号	以BJFS为站心原点的站心坐标系（单位：m ）		
	N	E	U
BJFS			
BJSH	71328.1837	28185.1135	-394.1048
JIXN	53173.9317	139700.9321	-1798.7830

站心坐标练习题

表1：ITRF2008参考框架下各点空间直角坐标

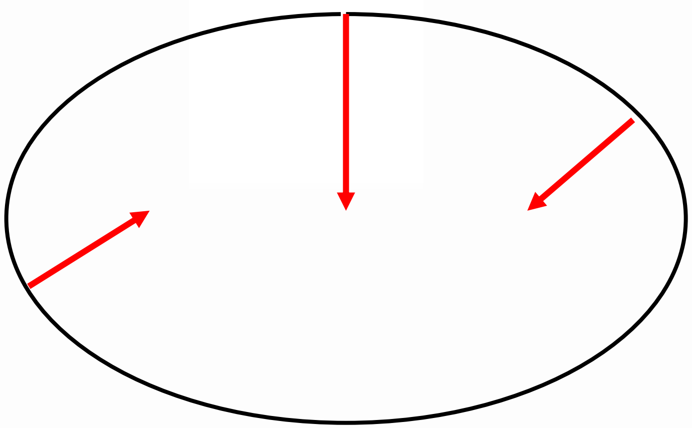
点名	X	Y	Z
BJFS	-2148744.322313	4426641.374988	4044656.021979
JIXN	-2259012.415334	4333892.124923	4084475.344899
TIAN	-2183162.619988	4370876.690603	4086285.637212
YUFA	-2183585.322099	4418186.962680	4035185.798453

1、求各站点在ITRF08参考框架下的大地坐标；

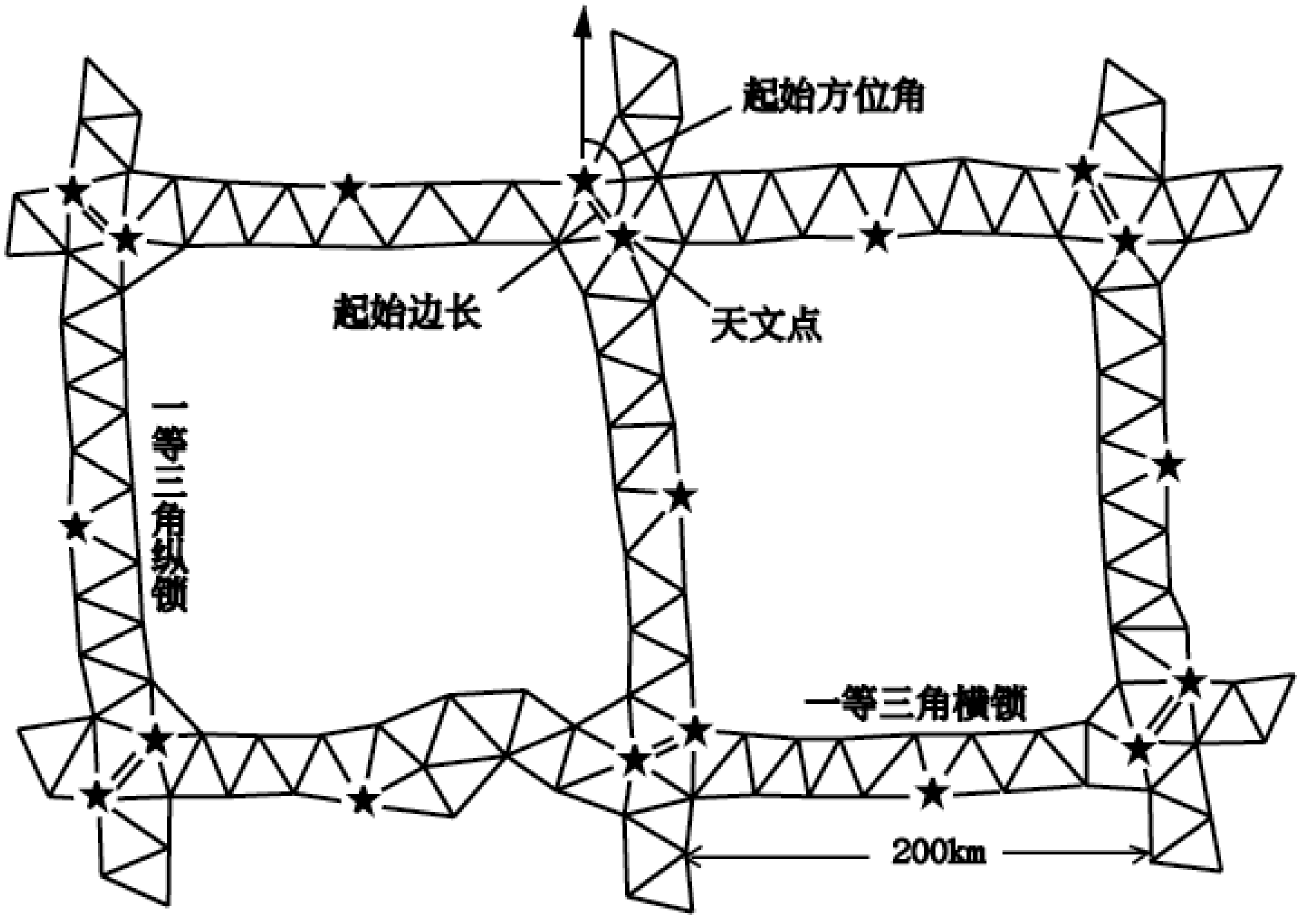
2、以BJFS为原点，求其它点相对BJFS的站坐标NEU;

3、将四个点的位置绘制在平面上。

椭球面上的几种曲率半径



三角锁（网）观测数据归算与平面投影

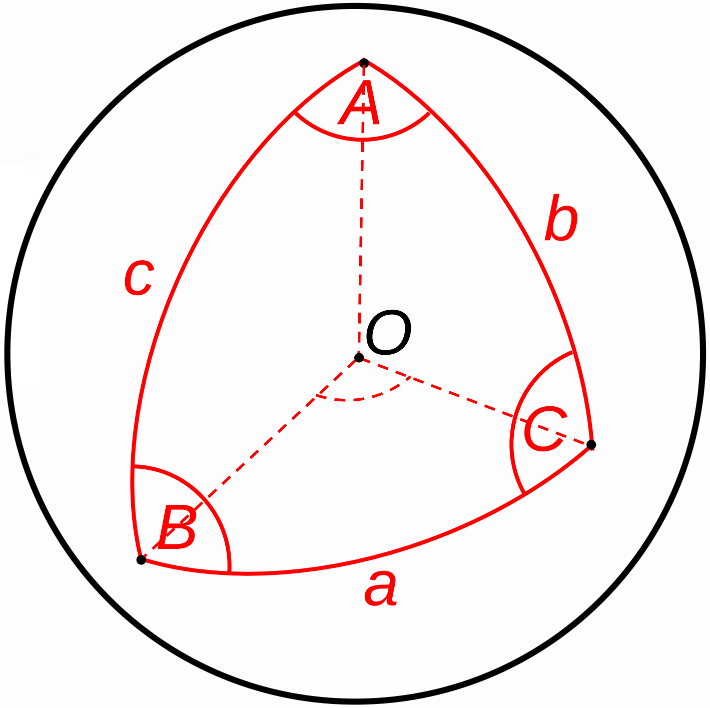


椭球面上的几种曲率半径

为了在椭球面上进行大地测量计算（**主要是传统大地测量的三角网**），就必须了解椭球面上有关曲线的性质。

球面三角形

(spherical triangle)



卯酉圈半径N如何确定？

椭球面上的几种曲率半径

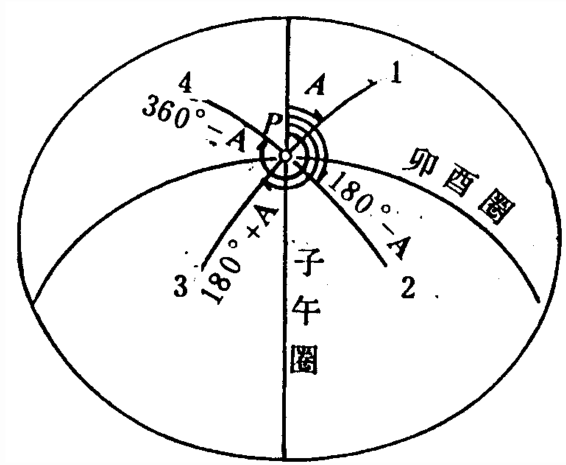
过椭球面上任意一点可作一条垂直于椭球面的法线，包含这条法线的平面叫做法截面；法截面同椭球面交线叫法截线（或法截弧）。

因此，要研究椭球面上曲线的性质，就要研究法截线的性质，而法截线的曲率半径便是一个基本内容。

椭球面上的几种曲率半径

包含椭球面一点的法线，可作无数多个法截面，相应有无数多个法截线。椭球面上的法截线曲率半径不同与球面上的法截线曲率半径。球面上的法截线曲率半径都等于圆球的半径，而椭球面上不同方向的法截弧的曲率半径都不相同。

- 任意方向曲率半径
- 子午线曲率半径
- 卯酉线曲率半径
- 平均曲率半径



椭球面上法截弧的曲率半径可用于后续的弧长计算、大地线计算和高斯投影等。

任意方向法截线曲率半径

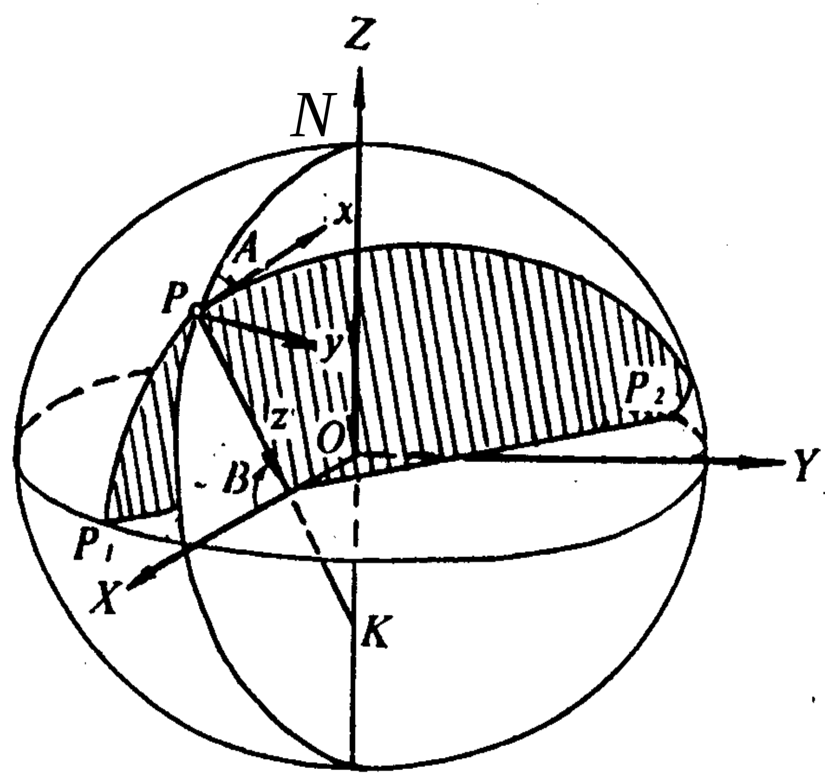
1、有关定义

法截面：包含椭球面某点法线的平面。

法截线：法截面与参考椭球面的交线。

斜截面：不包含椭球面某点法线的平面。

斜截线：斜截面与参考椭球面的交线。



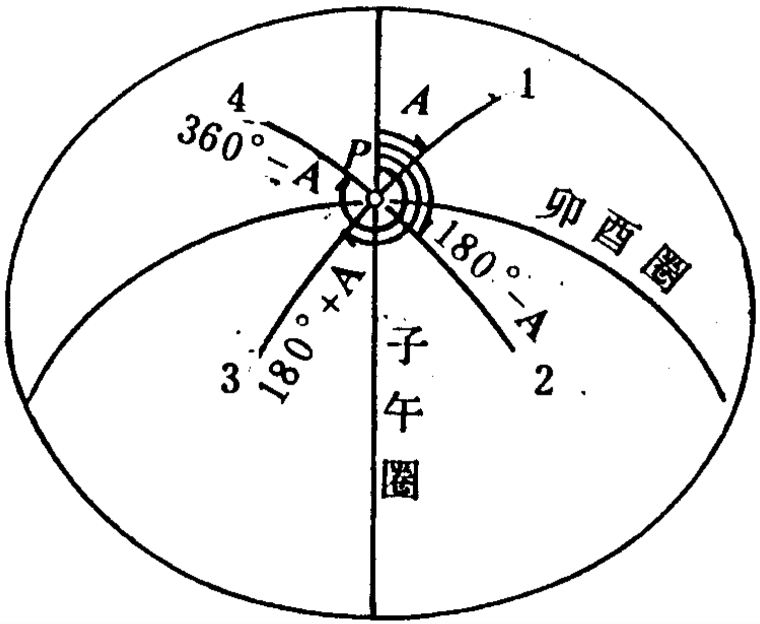
任意方向法截线曲率半径

1、有关定义

大地方位角：过椭球面曲线上一点的子午线与该曲线的夹角，从子午线北方向起，瞬时针量取， 0度~360度。可理解为切线的夹角。

子午圈：A=0度或180度

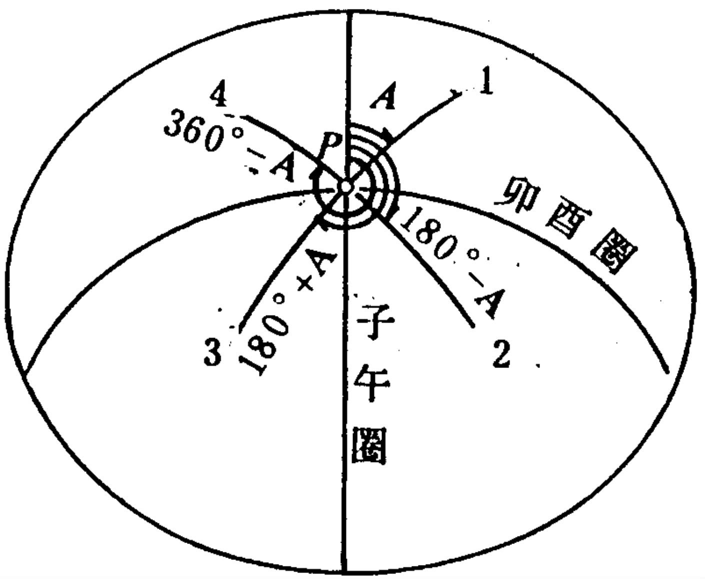
卯酉圈：A=90度或270度



任意方向法截线曲率半径

1、有关定义

卯酉圈：过椭球面上一点的法线，可作无限个法截面，其中一个与该点子午面相垂直的法截面同椭球面相截形成的闭合圈称为卯酉圈（卯酉圈不同于平行圈）。方位角为A=90度或270度。卯酉圈的曲率半径用N表示。



子午圈：A=0度或180度。子午圈的曲率半径用M表示。

任意方向法截线曲率半径

$$R_A = \frac{N}{1 + e'^2 \cos^2 B \cos^2 A}$$

$$N = \frac{a}{W}$$

任意方向法截线曲率半径与哪些因素有关？

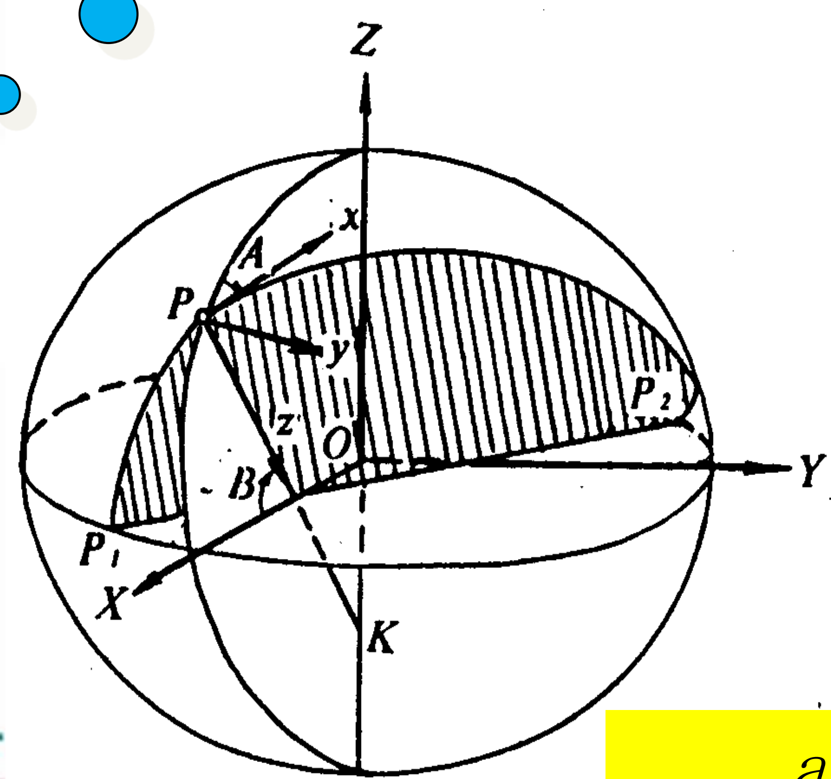
4）任意方向法截线曲率半径特点

A=0º、180º
A=90º、270º

- 与经度无关，即平行圈上任一点的法截线曲率半径情况类似

- 与纬度和方位角有关，当点固定时，仅与方位角有关

$$R_A=\frac{N}{1+e'^2\cos^2 B\cos^2 A}$$

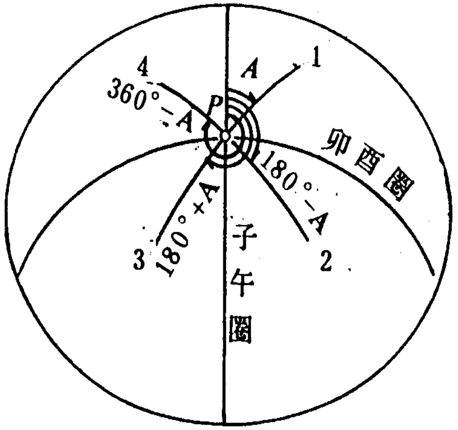


$$N=\frac{a}{W}$$

子午圈与卯酉圈曲率半径

任意方向法截线曲率半径

$$R_A = \frac{N}{1+e'^2\cos^2 B\cos^2 A}$$



$$N = \frac{a}{W}$$

$A=90^\circ,270^0$

$A=0^\circ,180^0$

卯酉圈曲率半径N

$$R_{90^\circ} = N = \frac{a}{W} = \frac{c}{V}$$

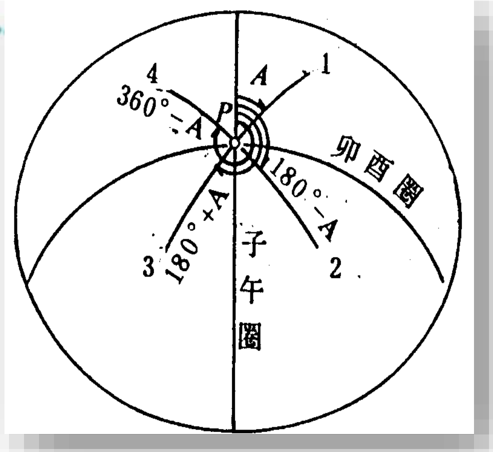
子午圈曲率半径M

$$R_{0^\circ} = M = \frac{N}{V^2} = \frac{a(1-e^2)}{W^3} = \frac{c}{V^3}$$

卯酉圈的曲率半径N与子午圈的曲率半径M，是两个互相垂直的法截弧的曲率半径，在微分几何中统称为主曲率半径。极曲率半径c的几何意义就是椭球体在极点（两极）的曲率半径。

卯酉圈曲率半径N

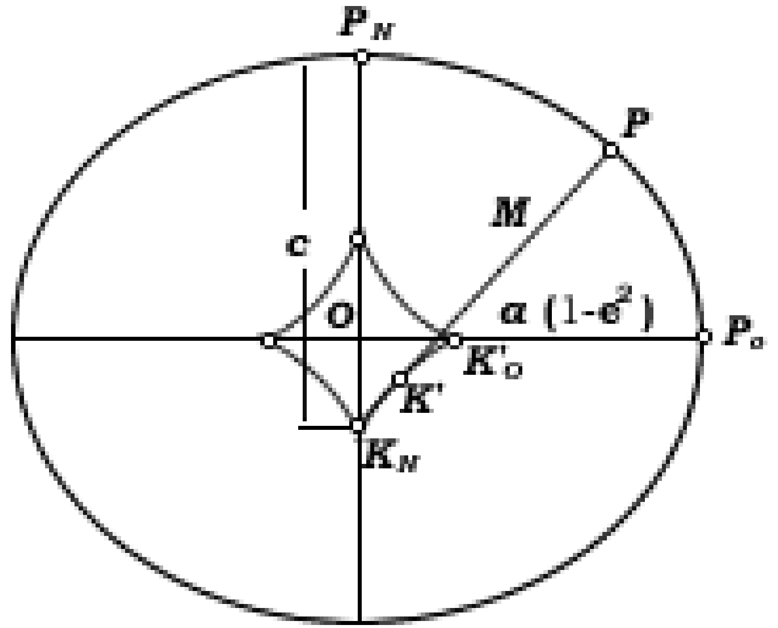
$$R_{90^\circ} = N = \frac{a}{W} = \frac{c}{V}$$

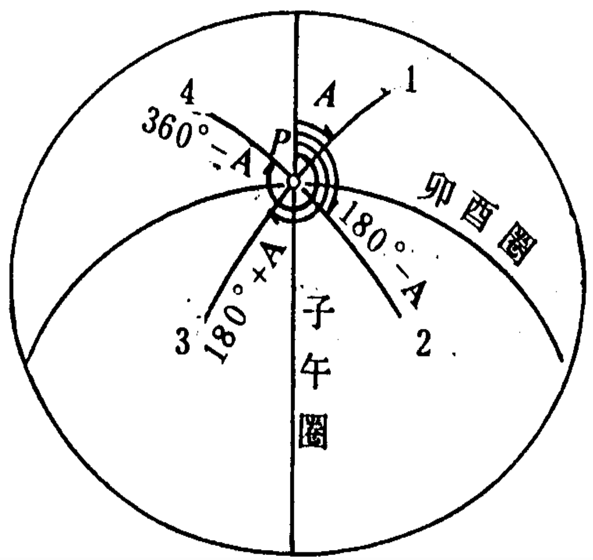


B	N	说明
$B=0^\circ$	$N_0=\begin{cases} a \\ \dfrac{c}{\sqrt{1+e'^2}} \end{cases}$	在赤道上卯酉圈即为赤道，N为赤道半径
$0^\circ<B<90^\circ$	$a<N<c$	N 随纬度增大而增大，其值介于 a 和 c 之间。
$B=90^\circ$	$N_{90}=\begin{cases} \dfrac{a}{\sqrt{1-e^2}} \\ c \end{cases}$	在极点上卯酉圈即为子午圈，N为极曲率半径。

子午圈曲率半径M

$$R_{0^\circ} = M = \frac{N}{V^2} = \frac{a(1-e^2)}{W^3} = \frac{c}{V^3}$$



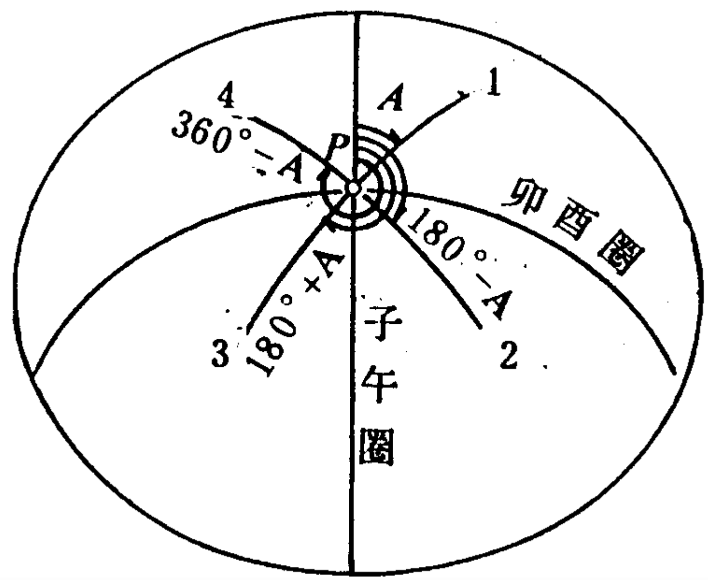


平均曲率半径R

椭球面上一点所有方向法截线曲率半径的平均值，就叫该点的平均曲率半径，用R表示。

任意方向法截线曲率半径

$$R_A = \frac{N}{1+e'^2\cos^2 B\cos^2 A}$$

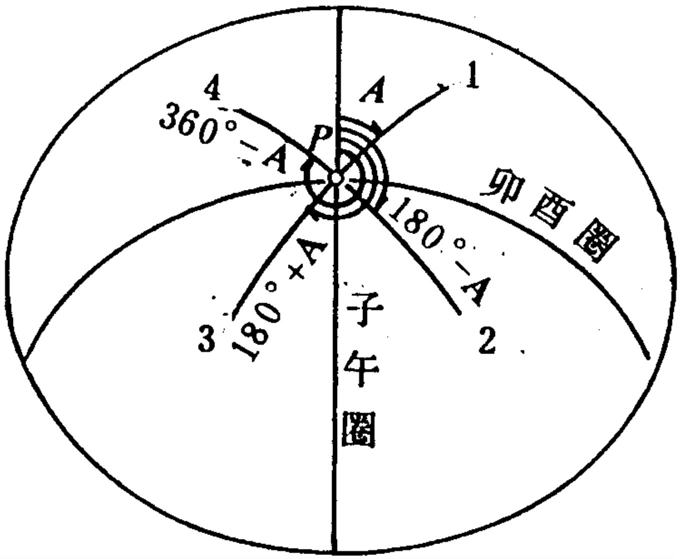


平均曲率半径R

任意方向法截线曲率半径

$$R_A = \frac{N}{1+e'^2\cos^2 B\cos^2 A}$$

$$R_A = \frac{MN}{N\cos^2 A + M\sin^2 A}$$



平均曲率半径

$$R = \frac{1}{\frac{\pi}{2}-0}\int_0^{\frac{\pi}{2}} R_A dA = \sqrt{MN} = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{W^2} = \frac{c}{V^2}$$

椭球曲面上任意一点的平均曲率半径是该点上主曲率半径N、M的几何平均值。

子午圈、卯酉圈曲率半径、平均曲率半径的关系

任意方向法截线曲率半径

$$R_A=\frac{N}{1+e'^2\cos^2B\cos^2A}$$

$A=90^\circ/270^\circ$

$A=0^\circ/180^\circ$

卯酉圈曲率半径

$$N=\frac{a}{W}=\frac{c}{V}$$

平均曲率半径

$$R=\sqrt{MN}=\frac{a\sqrt{1-e^2}}{W^2}=\frac{c}{V^2}$$

子午圈曲率半径

$$M=\frac{N}{V^2}=\frac{a(1-e^2)}{W^3}=\frac{c}{V^3}$$

$$N>R>M,(B\neq 90^0);\quad N_{90^\circ}=R_{90^\circ}=M_{90^\circ}=c,(B=90^0)$$

子午圈、卯酉圈曲率半径、平均曲率半径的关系

子午圈M、卯酉圈N曲率半径统称为**主曲率半径**，与平均曲率半径R都是随着B的增大而增大，且在极点上都等于极曲率半径c。

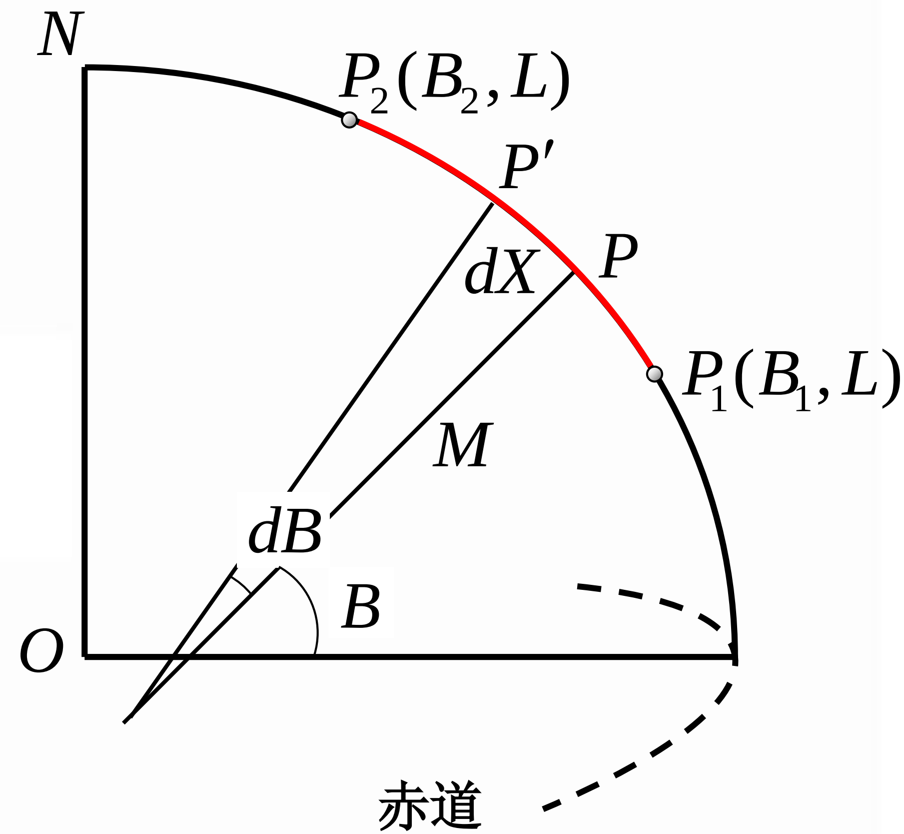
椭球面上的弧长计算

椭球面上弧长的计算

在研究与椭球体有关的一些测量计算时，如地图上梯形面积计算、高斯投影计算及弧度测量计算等，常用到子午线弧长或平行圈弧长。

子午线弧长

思想：子午椭圆的一半，它的端点与极点相重合，而赤道又把子午线分成对称的两部分。因此，获取从赤道开始到已知纬度B1和B2的子午线弧长计算公式，然后即可获取纬度B1和B2间的子午线弧长P1P2。



子午线弧长

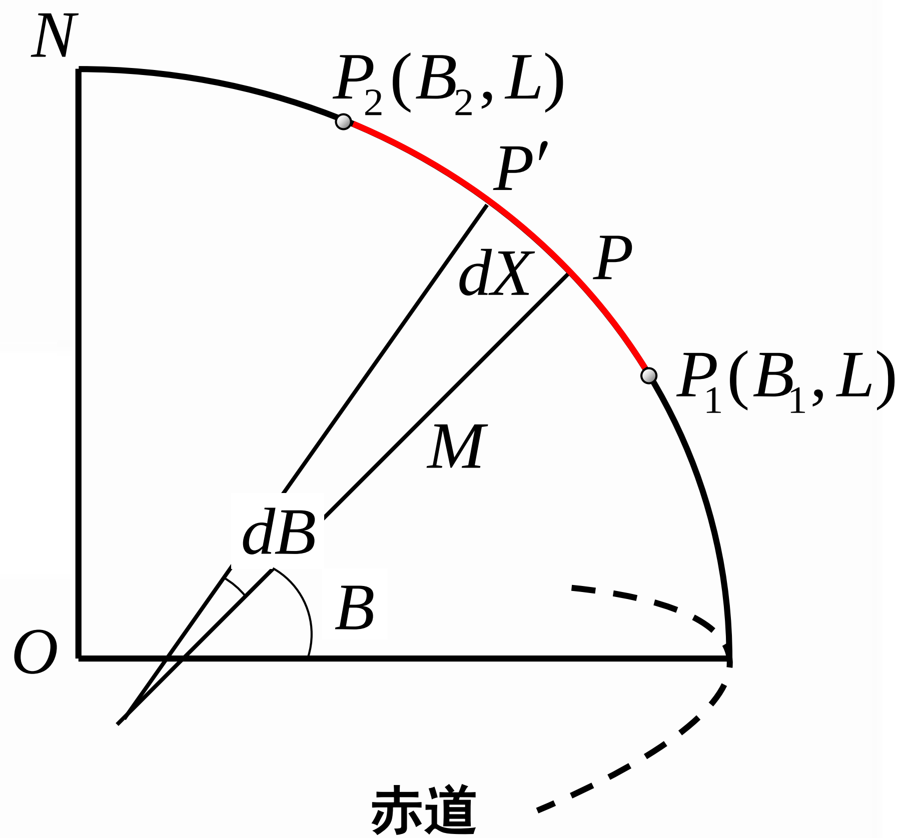
1）两点间子午线弧长公式

子午线弧素公式 $dX = MdB$

⇓

$$X = \int_{B_1}^{B_2} MdB$$

$$= a(1-e^2)\int_{B_1}^{B_2} \underline{(1-e^2\sin^2 B)^{-\frac{3}{2}}} dB$$



子午线弧长

$$X=\int_{B_1}^{B_2}MdB=a(1-e^2)\int_{B_1}^{B_2}\underline{(1-e^2\sin^2B)^{-\frac{3}{2}}}dB$$

$$\because (1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^2+\cdots$$

$$\therefore\quad (1-e^2\sin^2B)^{-\frac{3}{2}}=1+\frac{3}{2}e^2\sin^2B+\frac{15}{8}e^4\sin^4B+\frac{35}{16}e^6\sin^6B+\cdots\cdots$$

$$又\because\quad \sin^2B=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2B$$

$$\sin^4B=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2B+\frac{1}{8}\cos 4B$$

$$\sin^6B=\frac{5}{16}-\frac{15}{32}\cos 2B+\frac{3}{16}\cos 4B-\frac{1}{32}\cos 6B$$

……

子午线弧长

$$X=\int_{B_1}^{B_2} M dB=a(1-e^2)\int_{B_1}^{B_2}\underline{(1-e^2\sin^2 B)^{-\frac{3}{2}}}dB$$

$$\therefore\ (1-e^2\sin^2 B)^{-\frac{3}{2}}=1+\frac{3}{4}e^2-\frac{3}{4}e^2\cos 2B+\frac{45}{64}e^4-\frac{15}{16}e^4\cos 2B$$

$$+\frac{15}{64}e^4\cos 4B+\frac{175}{256}e^6-\frac{525}{512}e^6\cos 2B$$

$$+\frac{105}{256}e^6\cos 4B-\frac{35}{512}e^6\cos 6B$$

$$+\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots$$

略去具体推导，最后可得

$$X=a(1-e^2)[\mathbf{A}'\frac{B_2-B_1}{\rho}-\mathbf{B}'(\sin 2B_2-\sin 2B_1)+\mathbf{C}'(\sin 4B_2-\sin 4B_1)$$

$$-\mathbf{D}'(\sin 6B_2-\sin 6B_1)+\mathbf{E}'(\sin 8B_2-\sin 8B_1)-\mathbf{F}'(\sin 10B_2-\sin 10B_1)+\cdots]$$

$$X=a(1-e^2)[\mathbf{A}'\frac{B_2-B_1}{\rho}-\mathbf{B}'(\sin 2B_2-\sin 2B_1)+\mathbf{C}'(\sin 4B_2-\sin 4B_1)$$
$$-\mathbf{D}'(\sin 6B_2-\sin 6B_1)+\mathbf{E}'(\sin 8B_2-\sin 8B_1)-\mathbf{F}'(\sin 10B_2-\sin 10B_1)+\cdots]$$

其中，

$$\mathbf{A}'=1+\frac{3}{4}e^2+\frac{45}{64}e^4+\frac{175}{256}e^6+\frac{11025}{16384}e^8+\frac{43659}{65536}e^{10}$$

$$\mathbf{B}'=\frac{3}{8}e^2+\frac{15}{32}e^4+\frac{525}{1024}e^6+\frac{2205}{4096}e^8+\frac{72765}{131072}e^{10}$$

$$\mathbf{C}'=\frac{15}{256}e^4+\frac{105}{1024}e^6+\frac{2205}{16384}e^8+\frac{10395}{65536}e^{10}$$

$$\mathbf{D}'=\frac{35}{3072}e^6+\frac{105}{4096}e^8+\frac{10395}{262144}e^{10}$$

$$\mathbf{E}'=\frac{315}{131072}e^8+\frac{3465}{524288}e^{10}$$

$$\mathbf{F}'=\frac{639}{1310720}e^{10}$$

$$X = a(1-e^2)[\mathbf{A}'\frac{B_2 - B_1}{\rho} - \mathbf{B}'(\sin 2B_2 - \sin 2B_1) + \mathbf{C}'(\sin 4B_2 - \sin 4B_1)$$
$$- \mathbf{D}'(\sin 6B_2 - \sin 6B_1) + \mathbf{E}'(\sin 8B_2 - \sin 8B_1) - [illegible] \cdots]$$

利用该公式怎么求P_1、P_2间的子午线弧长？

1、子午线弧长公式

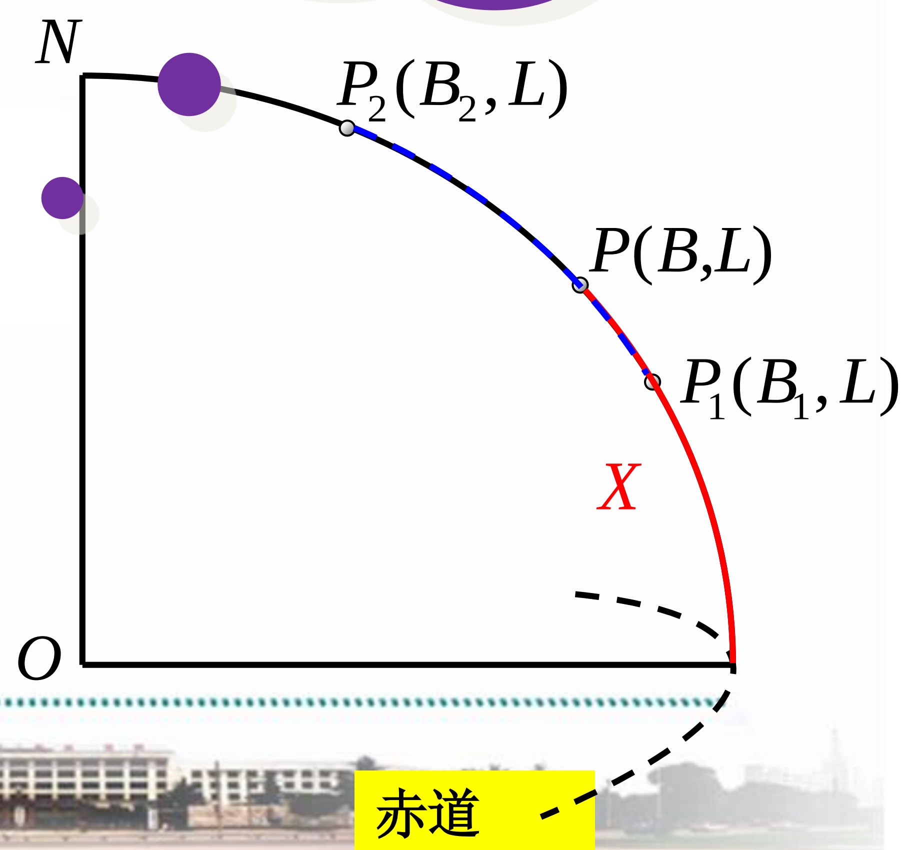
2）由赤道起算的子午线弧长公式

$$X = a(1-e^2)[\mathbf{A}'\frac{B}{\rho} - \mathbf{B}'\sin 2B$$

$$+ \mathbf{C}'\sin 4B - \mathbf{D}'\sin 6B$$

$$+ \mathbf{E}'\sin 8B - \mathbf{F}'\sin 10B + \cdots]$$

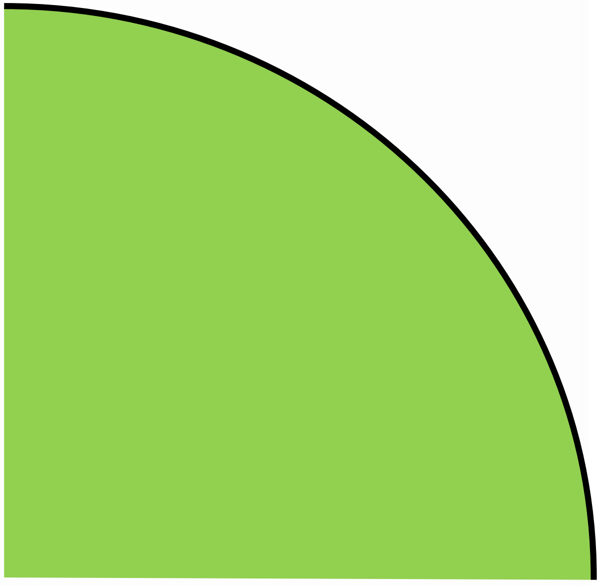
其中，系数 A'、B'、…同前



子午线弧长

如果B=90°，则得子午椭圆在一个象限内的弧长约为10,002,137m，旋转椭球的子午圈的整个弧长约为40,008,549.995m。

地球周长约为40,000km。



…反算纬度（高斯投影）

利用该公式，已知X，怎么求B？

1、…

2）由赤道起算的子午线弧长公…

$$X = a(1-e^2)[\mathbf{A}'\frac{B}{\rho} - \mathbf{B}'\sin 2B$$

$$+\mathbf{C}'\sin 4B - \mathbf{D}'\sin 6B$$

$$+\mathbf{E}'\sin 8B - \mathbf{F}'\sin 10B + \cdots]$$

其中，系数 A'、B'、…同前

初始值：

$$\mathrm{B} = \frac{X}{a(1-e^2)\mathbf{A}'}\text{(单位：弧度)}$$

迭代公式：

$$\mathrm{B_i} = \frac{1}{\mathbf{A}'}\left[\frac{X}{a(1-e^2)} + \mathbf{B}'\sin 2B_{\mathrm{i}-1}\right.$$

$$-\mathbf{C}'\sin 4B_{\mathrm{i}-1} + \mathbf{D}'\sin 6B_{\mathrm{i}-1}$$

$$\left.-\mathbf{E}'\sin 8B_{\mathrm{i}-1} + \mathbf{F}'\sin 10B_{\mathrm{i}-1} + \cdots\right]$$

迭代收敛条件：

$$|B_i - B_{i-1}| < \varepsilon, i = 1, \ldots, \varepsilon = 10^{-20}$$

迭代收敛解为： B_J(弧度)

● 短子午线弧长公式

可能会遇到的近似公式：子午线较短（<45km）、精确至0.001m。

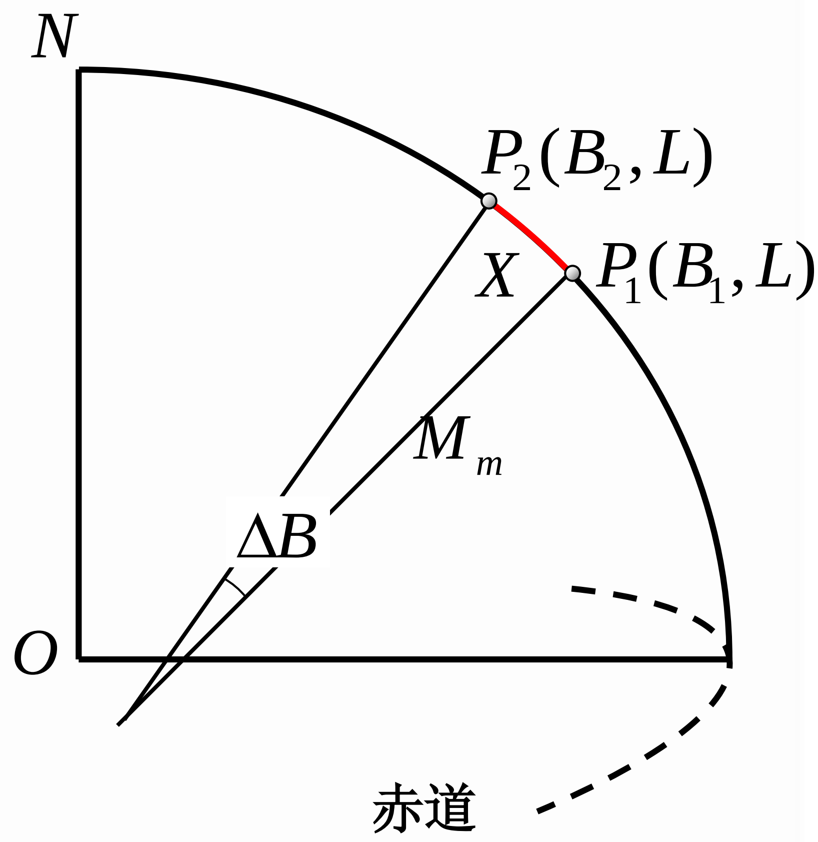
$$\boxed{X = M_m \frac{\Delta B}{\rho}}$$

$$M_m \Leftarrow B_m = \frac{B_1 + B_2}{2}$$

(平均纬度处的子午线曲率半径)

$\Delta B = B_2 - B_1$（秒）

（纬度差）



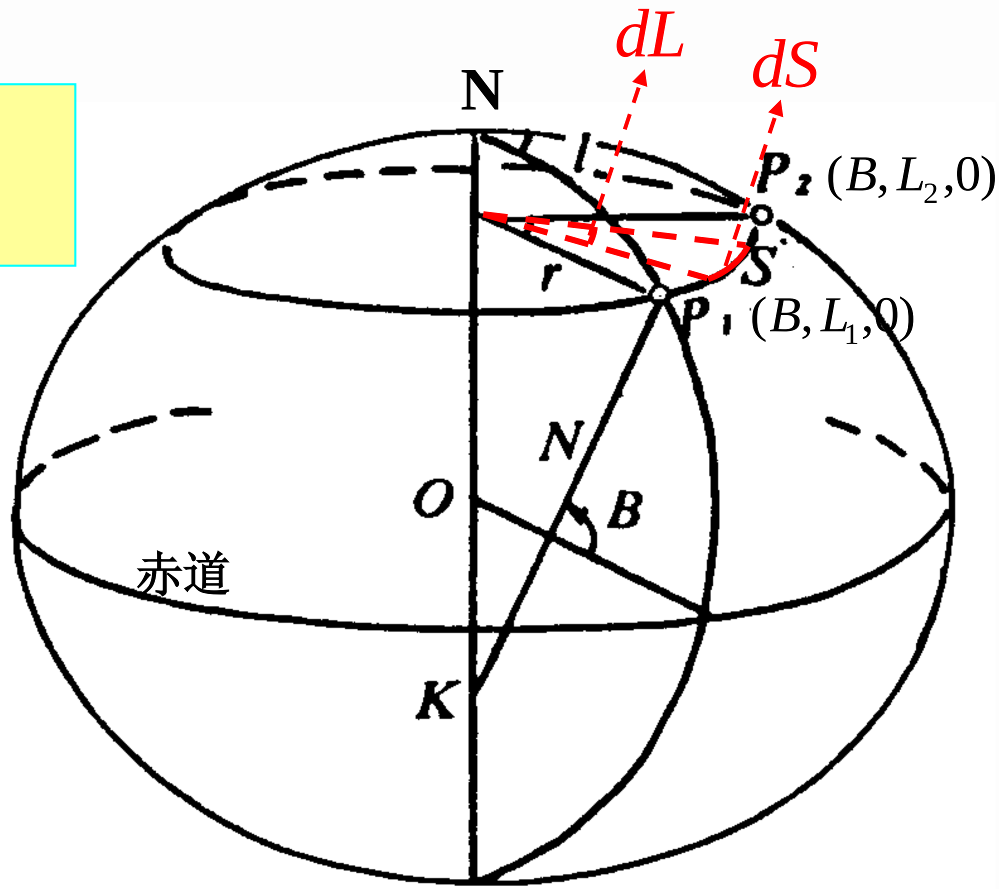
● 平行圈弧长

平行圈弧素公式 $dS = r dL$

$$r = N\cos B$$

平行圈弧长

$$S = r \cdot \frac{l}{\rho} = N\cos B \cdot \frac{l}{\rho}$$



显然，同一个经度差，在不同纬度的平行圈上的弧长是不相同的。

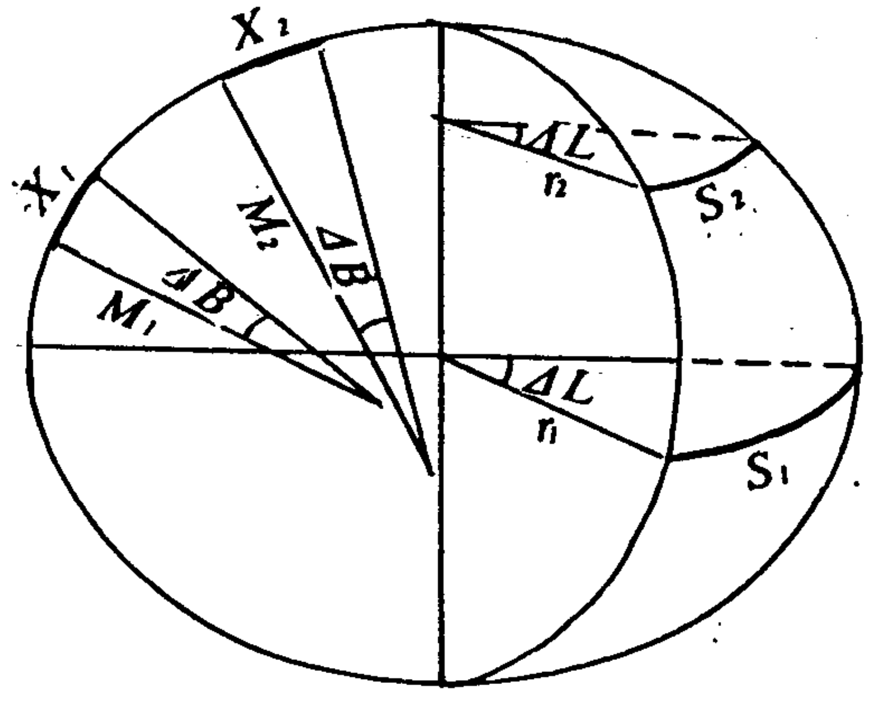
单位子午线、平行圈弧长变化情况

子午线弧素公式 $dX = MdB$

$$\Delta X \approx M\Delta B$$

平行圈弧素公式 $dS = rdL$

$$\Delta S \approx r\Delta L$$



子午线弧长和平行圈弧长随纬度的变化

B	子午线弧长			平行圈弧长		
	$\triangle B=1°$	$1'$	$1''$	$l=1°$	$1'$	$1''$
0°	110 576	1842.94	30.716	111 321	1855.36	30.923
15	110 656	1844.26	30.738	107 552	1792.54	29.876
30	110 863	1847.26	30.795	96 488	1608.13	26.802
45	111 143	1852.39	30.873	78 848	1341.14	21.902
60	111 423	1857.04	30.951	55 801	930.02	15.500
75	111 625	1860.42	31.007	28 902	481.71	8.028
90	111 696	1861.60	31.027	0	0.00	0.000

变化规律（北半球）：单位子午线弧长随纬度升高缓慢增长，曾南短北长；单位平行圈弧长随纬度升急剧缩短，曾南长北短。

子午线弧长和平行圈弧长随纬度的变化

B	子午线弧长			平行圈弧长		
	$\triangle B=1°$	$1'$	$1''$	$l=1°$	$1'$	$1''$
0°	110 576	1842.94	30.716	111 321	1855.36	30.923
15	110 656	1844.26	30.738	107 552	1792.54	29.876
30	110 863	1847.26	30.795	96 488	1608.13	26.802
45	111 143	1852.39	30.873	78 848	1341.14	21.902
60	111 423	1857.04	30.951	55 801	930.02	15.500
75	111 625	1860.42	31.007	28 902	481.71	8.028
90	111 696	1861.60	31.027	0	0.00	0.000

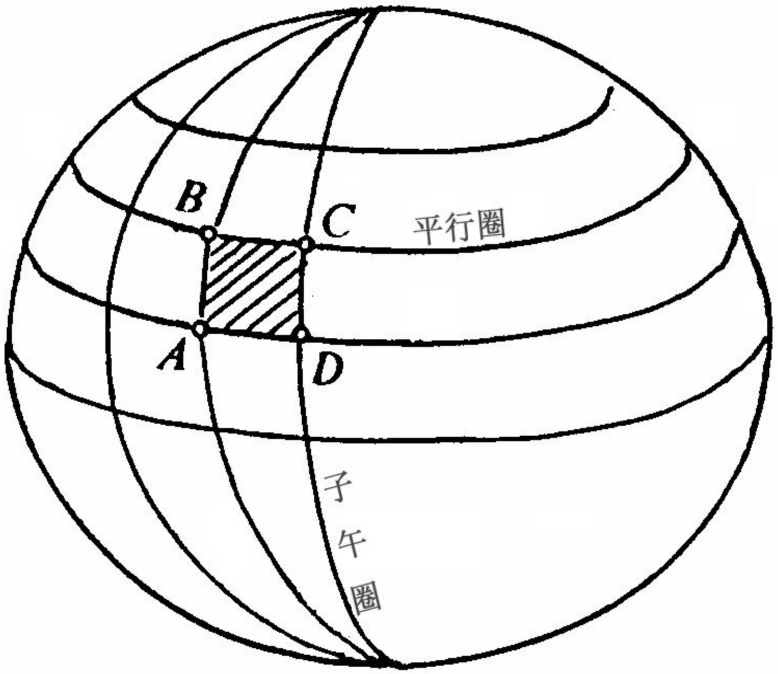
近似估算 ：视地球为球体，球面上的弧长和它所对的弧心角有下列近似对应关系：

1º弧长≈110km；1′弧长≈1.8km；1″弧长≈30m

1km≈30″弧长；1m≈0″.03弧长；1cm≈0″.0003弧长；

● 椭球面梯形图幅面积的计算

无论测绘地图还是编制地图，都要知道这幅地图的位置及其范围大小。通常是沿经线和纬线，按照一定的经差和纬差，将椭球表面划分成一系列的图幅，因每个图幅呈现为梯形，故称为梯形图幅。



地形图分幅示意图

● 椭球面梯形图幅面积的计算

$$N=\frac{a}{W},M=\frac{a(1-e^2)}{W^3}$$

$$W=\sqrt{1-e^2\sin^2 B}$$

椭球面积元 $dP=MN\cos BdBdL$

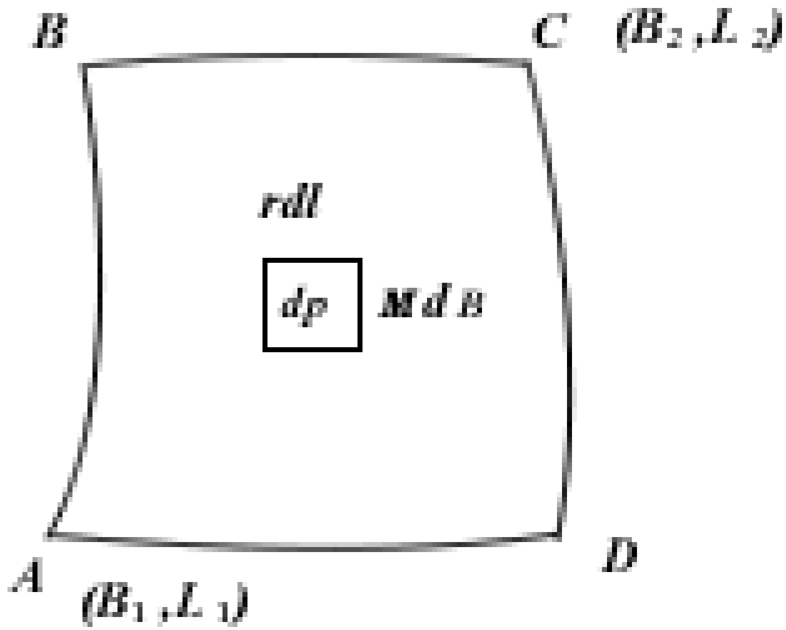
$$\Downarrow$$

$$P=\int_{L_1}^{L_2}\int_{B_1}^{B_2}MN\cos BdBdL$$

$$\Downarrow$$

$$P=\int_{L_1}^{L_2}\int_{B_1}^{B_2}\frac{a^2(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 B)^2}\cos BdBdL$$

$$=lb^2\int_{B_1}^{B_2}\frac{\cos B}{(1-e^2\sin^2 B)^2}dB$$



图幅ABCD的椭球面积

$$P=\int_{L_1}^{L_2}\int_{B_1}^{B_2}\frac{a^2(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 B)^2}\cos B dB dL = lb^2\int_{B_1}^{B_2}\frac{\cos B}{(1-e^2\sin^2 B)^2}dB$$

略去具体推导，最后可得

$$P=\frac{l^\circ}{90^\circ}\pi b^2[A'\sin\frac{1}{2}(B_2-B_1)\cos B_m - B'\sin\frac{3}{2}(B_2-B_1)\cos 3B_m$$
$$+C'\sin\frac{5}{2}(B_2-B_1)\cos 5B_m - D'\sin\frac{7}{2}(B_2-B_1)\cos 7B_m$$
$$+E'\sin\frac{9}{2}(B_2-B_1)\cos 9B_m]$$

其中，l°为图幅的大地经度之差，b为椭球短半径，

$$B_m=\frac{1}{2}(B_1+B_2)$$

● 椭球面梯形图幅面积的计算

$$A' = 1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6 + \frac{35}{128}e^8$$

$$B' = \frac{1}{6}e^2 + \frac{3}{16}e^4 + \frac{5}{16}e^6 + \frac{35}{192}e^8$$

$$C' = \frac{3}{80}e^4 + \frac{1}{16}e^6 + \frac{5}{64}e^8$$

$$D' = \frac{1}{112}e^6 + \frac{5}{256}e^8$$

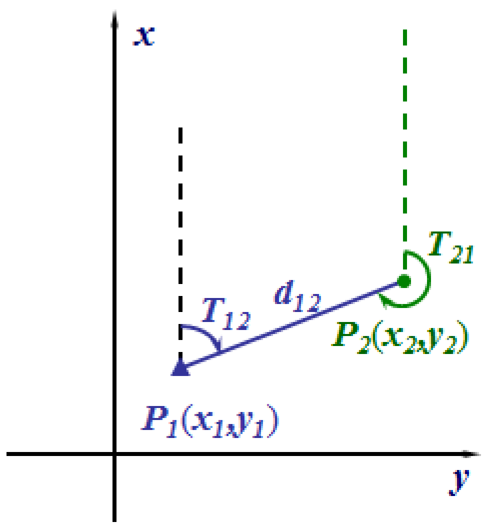
$$E' = \frac{5}{2304}e^8$$

椭球面上的大地线

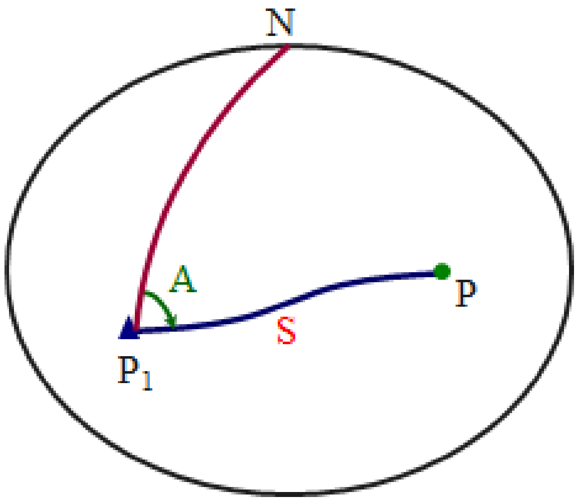
椭球面上的大地线

椭球面上确定点位的方法？

平面上确定点位的方法：



坐标方位角α、水平距离D



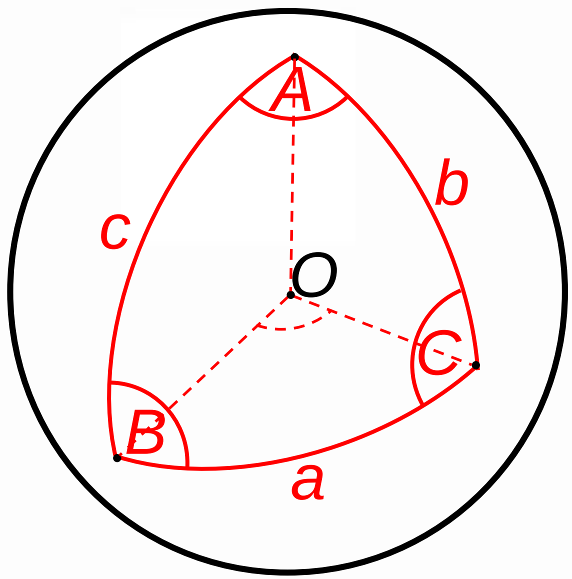
也需要角度和距离

大地方位角

大地线

椭球面上的大地线

两点间的最短距离，在平面上是两点间的直线，在球面上是两点间的大圆弧，那么在椭球面上是怎样的一条线？



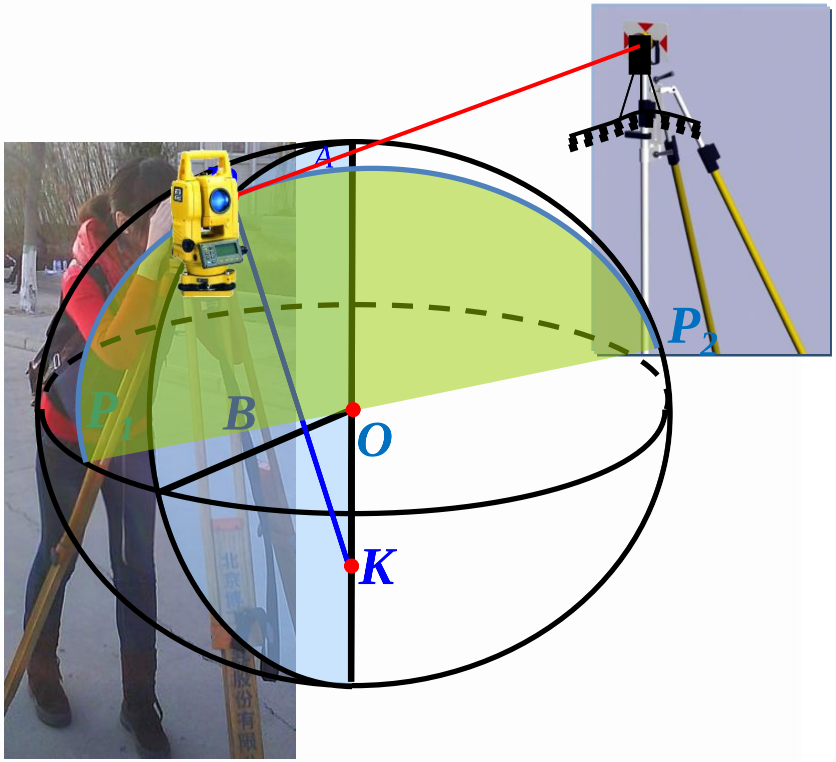
椭球面上的大地线

大地线： 椭球面上两点间的最短程曲线

铅垂线 $\xrightarrow{\text{垂线偏差改正}}$ 法线

照准面 $\xrightarrow{\text{共面}}$ 法截面

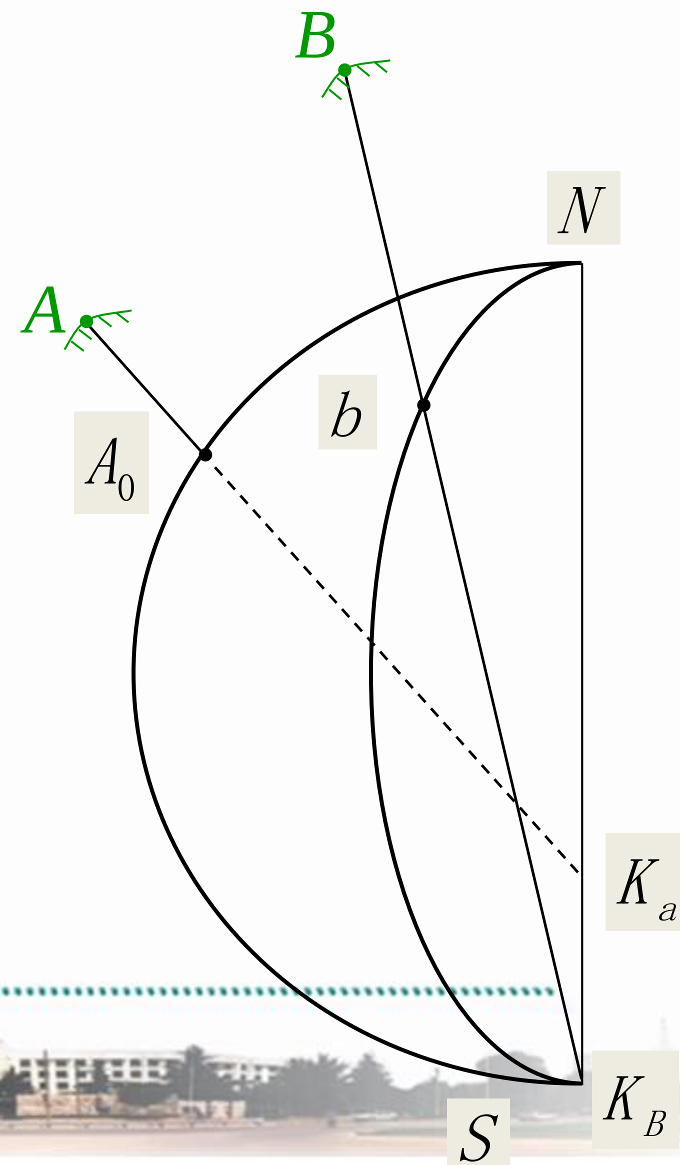
观测方向 → 切线方向 → 法截线 → 大地线



野外观测  椭球面

一、相对法截线(reciprocal normal sections)

A：	仪器中心
A_0：	仪器中心或标石中心的椭球面投影点
B：	觇标中心
b：	觇标中心或标石中心的椭球面投影点
AK_a：	A或A_0的椭球面法线
BK_b：	B或b的椭球面法线



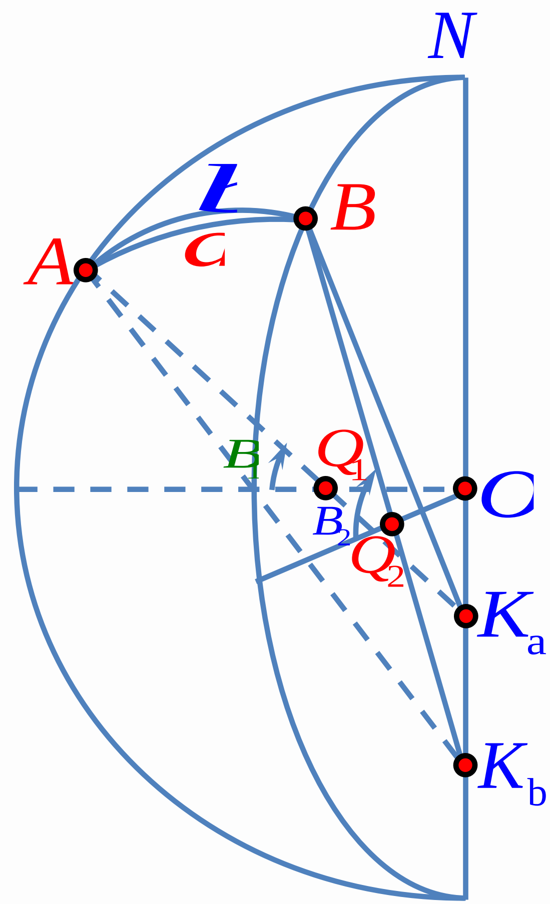
一、相对法截线(reciprocal normal sections)

相对法截线的形成

A点架站经纬仪，仪器纵轴假设与A点法线AKa重合，照准B点。（垂线偏差改正）

此时，经纬仪的照准面即为法截面，该法截面与椭球面的截线为AaB，称为A点的正法截线，或B点的反法截线。

法截线：AaB、BbA



不重合的原因及何时重合？

一、相对法截线(reciprocal normal sections)

假设经纬仪的纵轴同A、B两点的法线重合（忽略垂线偏差），如此分别以两点A、B为测站，则经纬仪的照准面就是法截面。用A点照准B点，则截线AaB叫A点的正法截线，或B点的反法截线。因两法线互不相交，故两条法截线不重合。AaB和BbA叫做A、B两点的相对法截线。

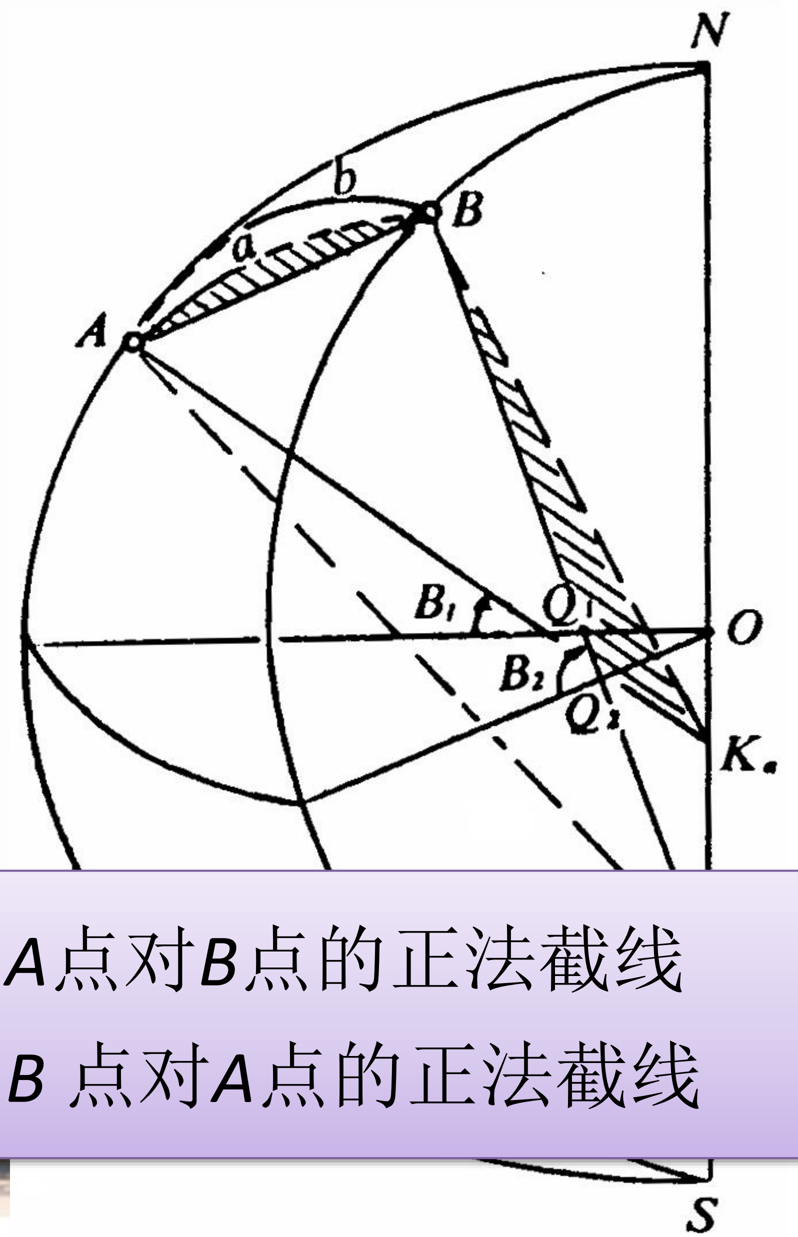
一、相对法截线(reciprocal normal sections)

1、定义

法截线AaB：过A点法线AK_a和B点的法截面与椭球面的交线，称A点对B点的法截线；

法截线BbA：过B点法线BK_b和A点的法截面与椭球面的交线，称B点对A点的法截线。

法截线AaB与法截线BbA合称A、B两点间的相对法截线。



A点对B点的正法截线

B 点对A点的正法截线

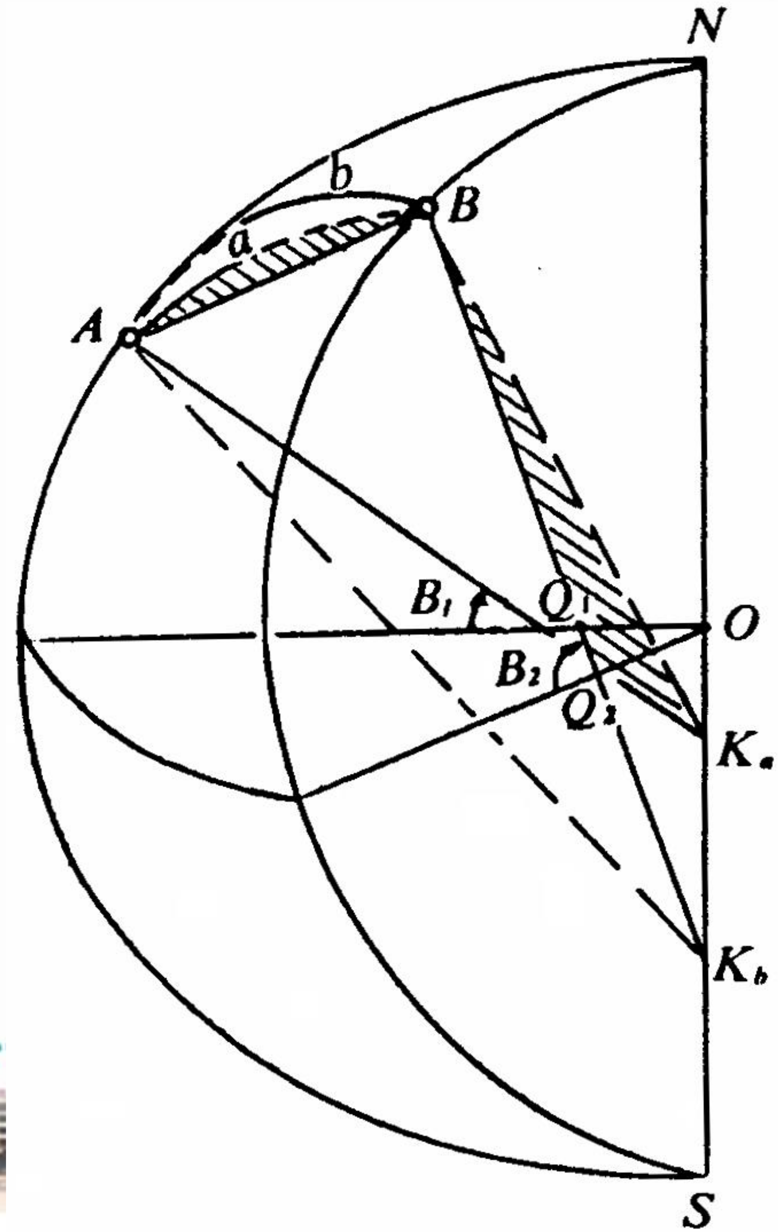
一、相对法截线(reciprocal normal sections)

2、相对法截线不重合的原因

A、*B*两点的法线不在同一平面上（不相交）。

3、相对法截线重合的原因

A、B两点的法线在同一平面上,即两点位于同一平行圈或同一子午圈上。



一、相对法截线(reciprocal normal sections)

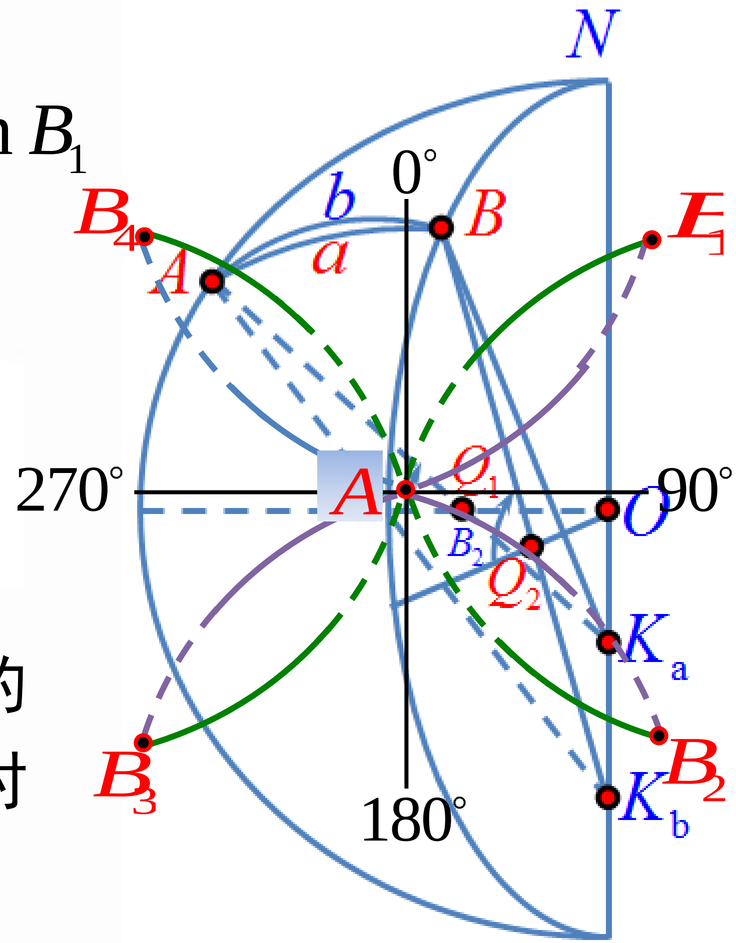
4、相对法截线不重合时的位置规律

$$OK_a = Q_1K_a \sin B_1 = N_1 e^2 \sin B_1$$

椭球面一点纬度B越高

N越大，OK越长

$$B_2 > B_1 \Rightarrow OK_b > OK_a$$

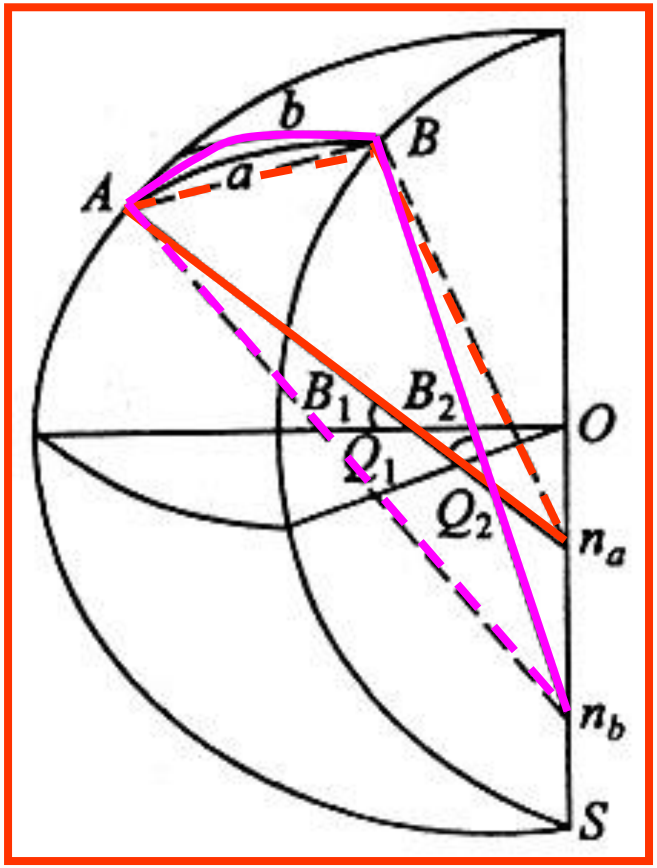


规律：纬度高的点对纬度低的点法截线偏上；纬度低的点对纬度高的法截线偏下。

一、相对法截线(reciprocal normal sections)

当两点不在同一子午圈，也不在同一平行圈上时，两点间就有两条法截线存在。

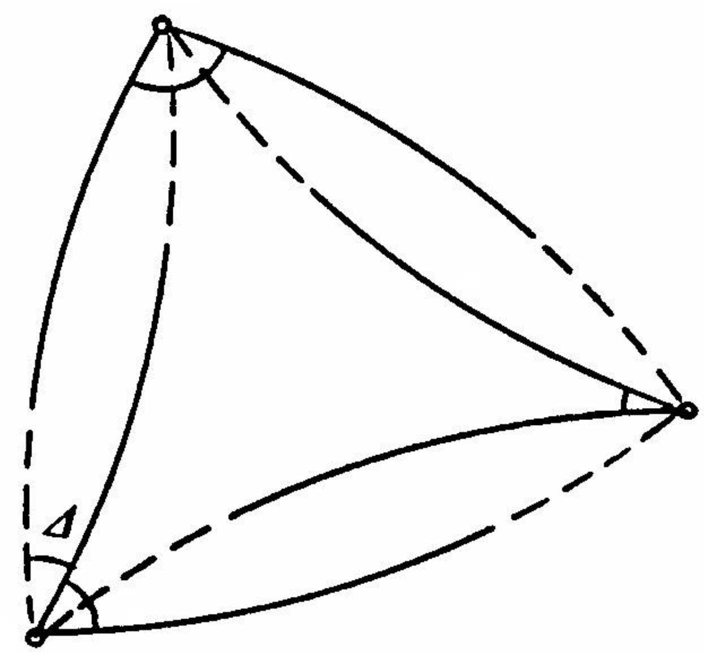
当两点在同一子午圈或同一平行圈上时，两条法截线就合二为一。



一、相对法截线(reciprocal normal sections)

5、相对法截线造成的问题

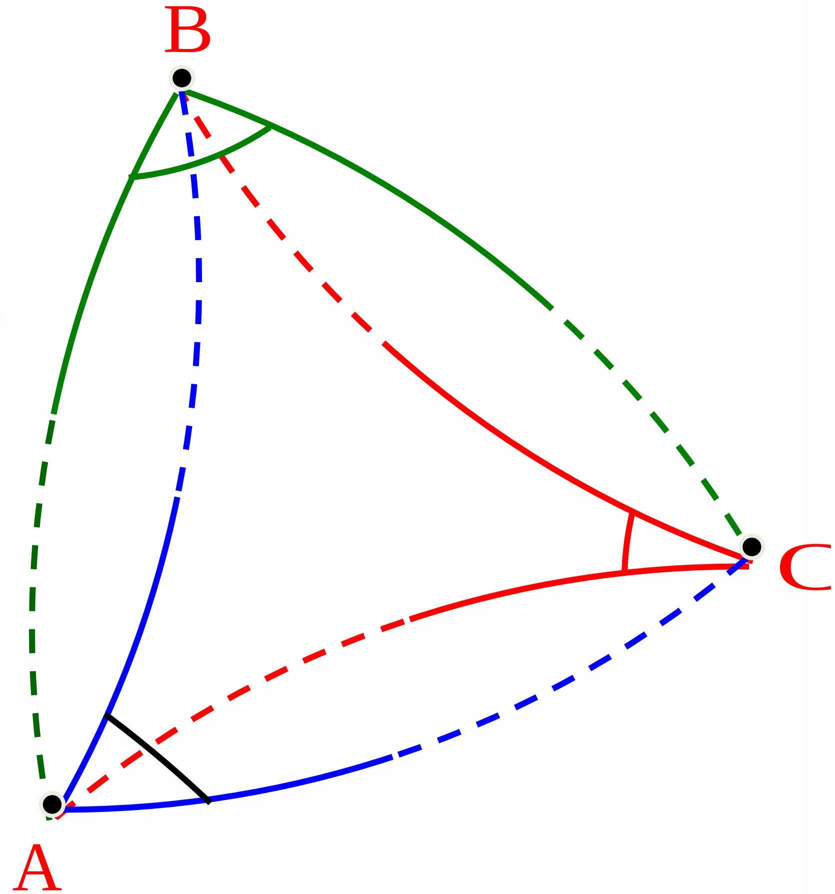
设想当椭球面上的三个点（经纬度均不相同）以各自法线为准进行互相观测时，则此三角形将存在六条边，从而造成了几何图形的破裂。显然，不能依据这种破裂的几何图形进行进行计算。



一、相对法截线(reciprocal normal sections)

5、相对法截线造成的问题

- 相对法截线造成了几何图形的破裂。无法依据这种破裂的图形进行计算;
- 两点间的法截线不唯一
- 法截线不是椭球上两点的最短线

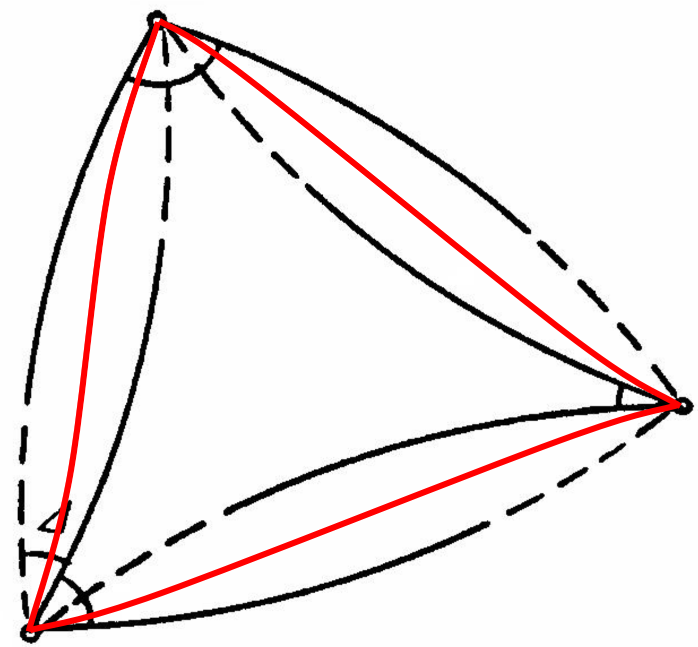


$$L_A < L_B < L_C, \quad B_A < B_C < B_B$$

一、相对法截线(reciprocal normal sections)

6、解决相对法截线造成的矛盾

在两点间另选一条单一的大地线代替相对法截线，从而得到由大地线构成的单一三角形。



二、大地线(geodesic line)

1、定义

两点的最短线
- 平面上 → 直线
- 球面上 → 大圆弧
- 椭球面上 → 大地线

感性理解

椭球面上两点间的**最短程曲线**叫做**大地线**。

在一非常光滑（假定没有摩擦力）的椭球表面A、B两点上，各插钉大头针，并紧贴椭球面**绷**一细橡皮筋，那么这条绷紧的橡皮筋，就是两点间的大地线。

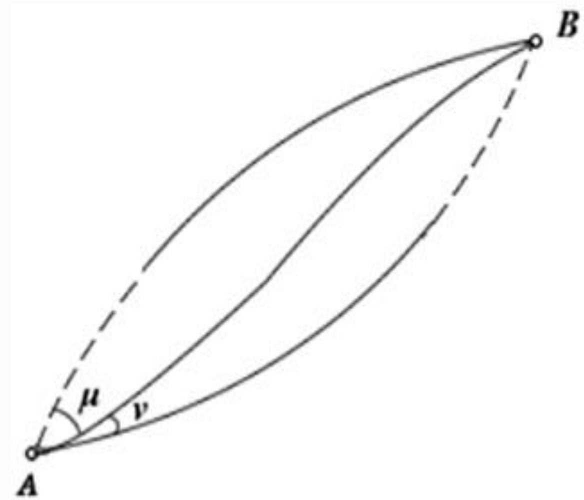
二、大地线(geodesic line)

1、定义

定义：大地线是椭球面上两点间的最短线 。

在椭球表面A、B两点上各插一个大头针，并紧贴着椭球面在大头针中间拉紧一条细橡皮筋（无摩擦），则橡皮筋形成一条曲线，恰好位于相对法截线之间，这就是一条大地线。

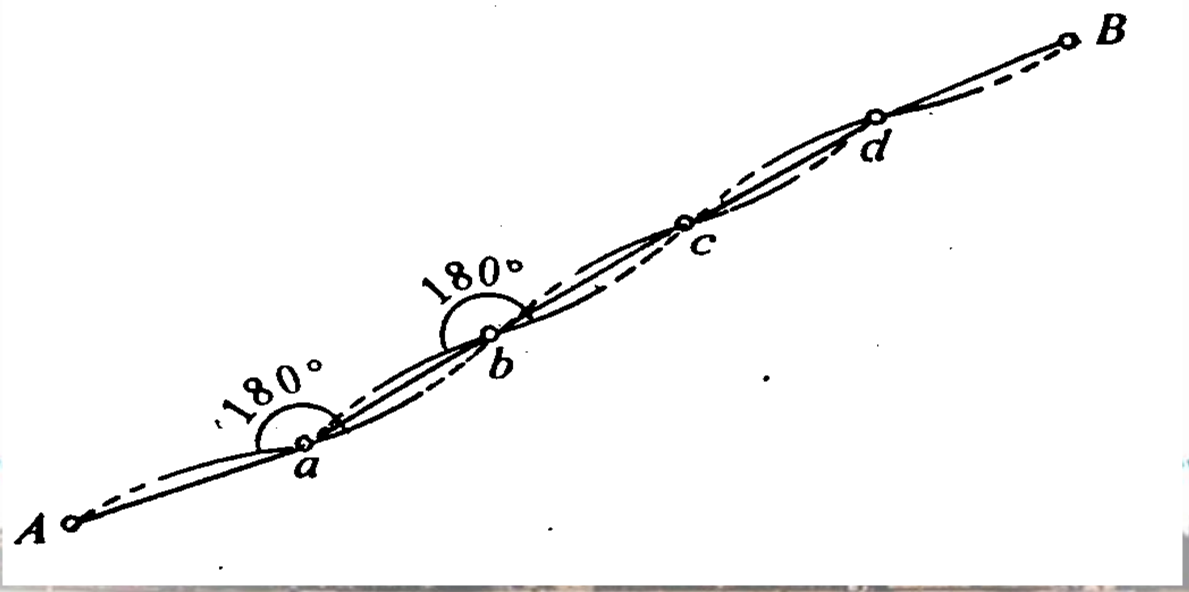
由于橡皮筋处于拉力之下，所以它实际上是两点间的最短线。



二、大地线(geodesic line)

2、性质

性质 1 ：大地线是无数法截线弧素的连线 。注：1）椭球面上的法截线除子午圈和赤道是大地线外，其它法截线都不是大地线。2）法截线只是通过某点的一个法截面，而大地线是通过沿线各点的所有法截面。



二、大地线(geodesic line)

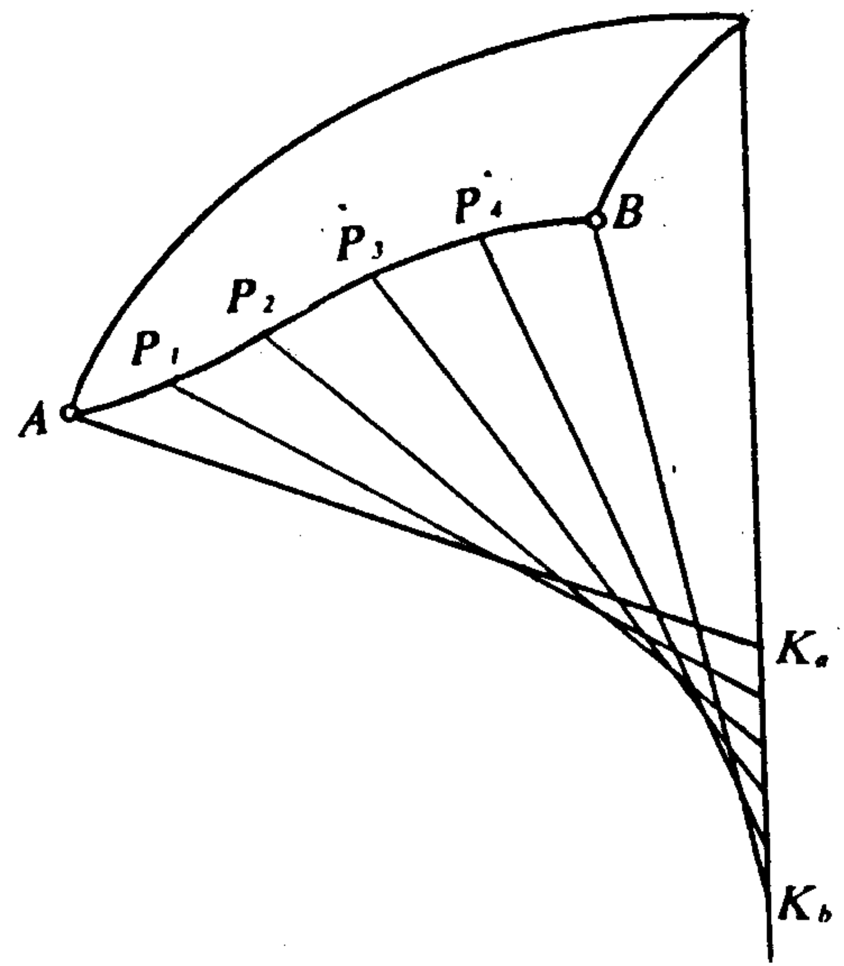
2、性质

性质 2 ：椭球面上的大地线是双重弯曲的曲线。注：

1）横向弯曲（挠率）：

2）纵向弯曲（曲率）；

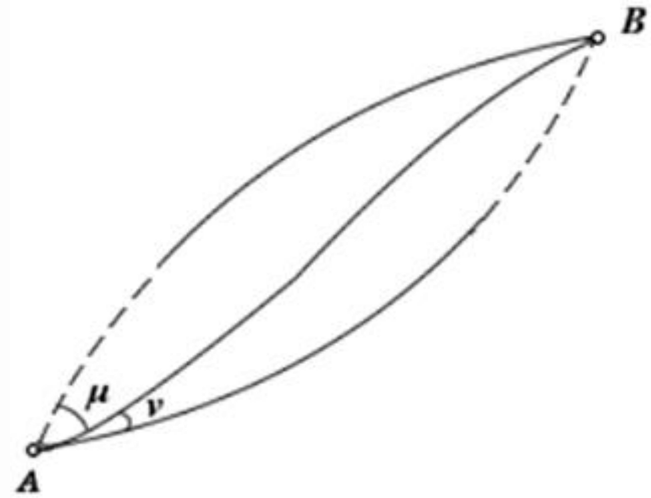
3）顺着大地线的方向去看，椭球面上的大地线一般不呈直线，而呈现微微弯曲的“ S ”形。

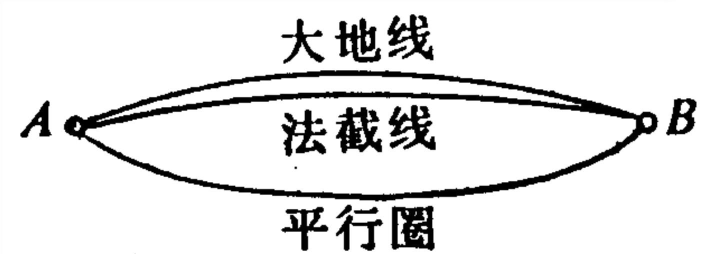


二、大地线(geodesic line)

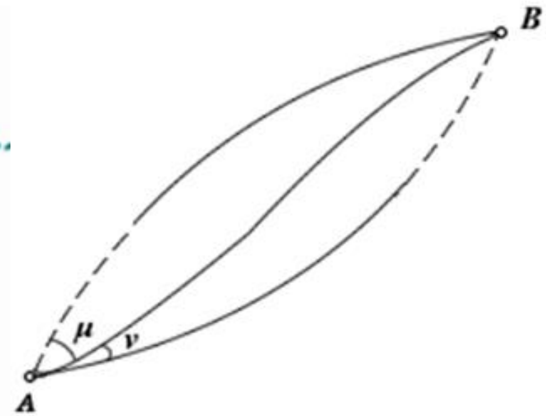
2、性质

性质 3 ：大地线位于相对法截线之间。注：1）通常情况下，大地线靠近正法截线，它分相对法截线的夹角约为二比一即$u:v=2:1$；**2）**在平行圈上相对法截线虽然合而为一，但大地线、法截线和平行圈三者都不重合。在北半球，大地线在上，法截线居中，平行圈在下。





二、大地线(geodesic line)

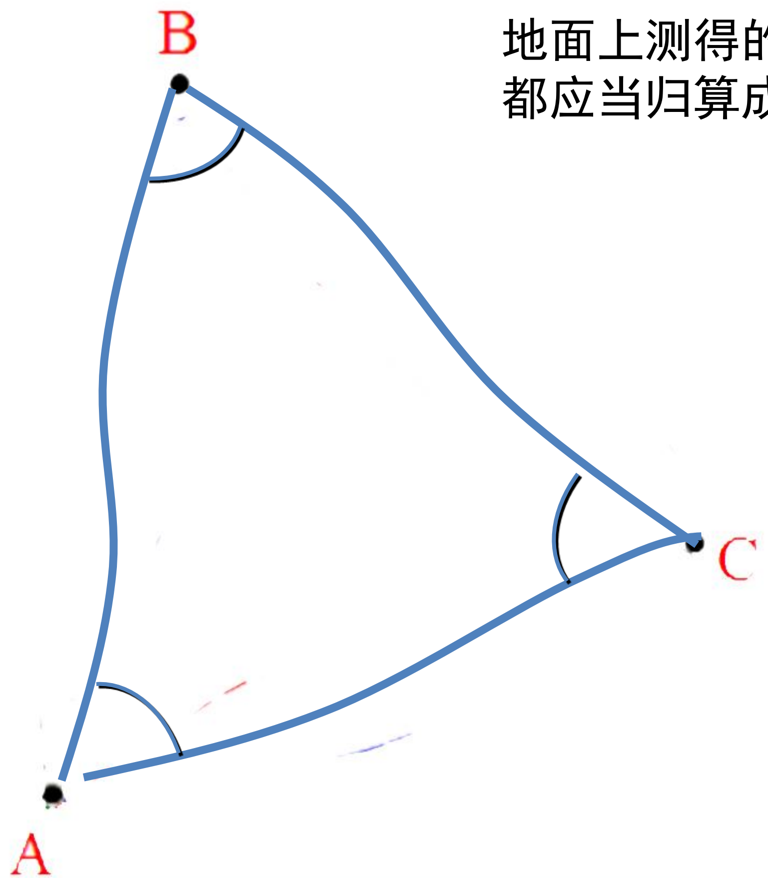


3、大地线影响量级

不在同一子午圈或平行圈上的两点的正反法截线是不重合的，两者之间的夹角在**一等三角测量**中可达**千分之四秒**（不容忽略）。

大地线与法截线长度只差只有百万分之一毫米（可忽略）。在椭球面上进行测量计算时，应以**两点间的大地线为依据**。在地面上测得的**方向、距离**等，应当归算成相应**大地线的方向和距离**。

二、大地线(geodesic line)



地面上测得的方向、距离等
都应当归算成相应大地线的方向、距离。

法截线➞大地线

角度改正：截面差改正

长度改正：可忽略不计

地面观测值归算至椭球面

地面观测值归算至椭球面

参考椭球面是测量计算的基准面。在野外的各种测量都是在地面上进行，观测的基准线不是各点相应的椭球面的法线，而是各点的铅垂线。各点的铅垂线与法线存在着垂线偏差。因此，不能在地面上处理观测成果，而应将地面观测元素（包括方向和距离）归算至椭球面。

归算中两条基本要求：一是以椭球面的法线为基准；另一条是将地面观测元素化为椭球面上大地线的相应元素。

一、归算的意义和要求

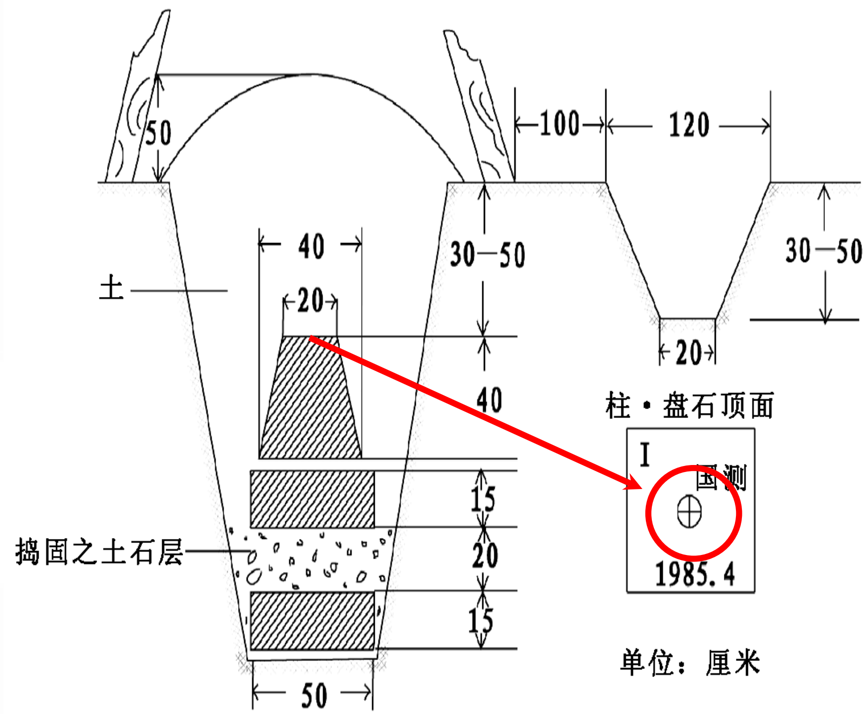
传统大地测量 → 一　维 → 高程控制网 → $H_{常}$ → 点位三维坐标

传统大地测量 → 二　维 → 水平控制网 → （L , B） → 点位三维坐标

一、归算的意义和要求

确定水平坐标的流程

布设水平控制网



一、二等三角点中心标石埋设图

一、归算的意义和要求

确定水平坐标的流程

- 水平方向
- 垂直角
- 地面距离
- 天文经纬度
- 天文方位角

角度观测

距离观测

天文观测

布设水平控制网 —— **观测** → **地面上观测元素**

一、归算的意义和要求

确定水平坐标的流程

已知坐标（L，B） ⟷ 已知坐标（X，Y）

- 水平方向
- 垂直角
- 地面距离
- 天文经纬度
- 天文方位角

- 水平方向
- 垂直角
- 地面距离
- 大地经纬度
- 大地方位角

- 水平方向
- 垂直角
- 地面距离
- 平面方位角

布设水平控制网 —观测→ **地面上观测元素** —归算→ **椭球面上的元素** —归算→ **高斯平面的元素**

椭球面上的元素 —推算 平差→ 大地坐标（L，B）

高斯平面的元素 —推算 平差→ 平面坐标（x，y）

大地坐标（L，B） ⟷ 平面坐标（x，y）

1、归算的意义

通过归算，为在椭球面上的水平坐标计算提供观测数据。

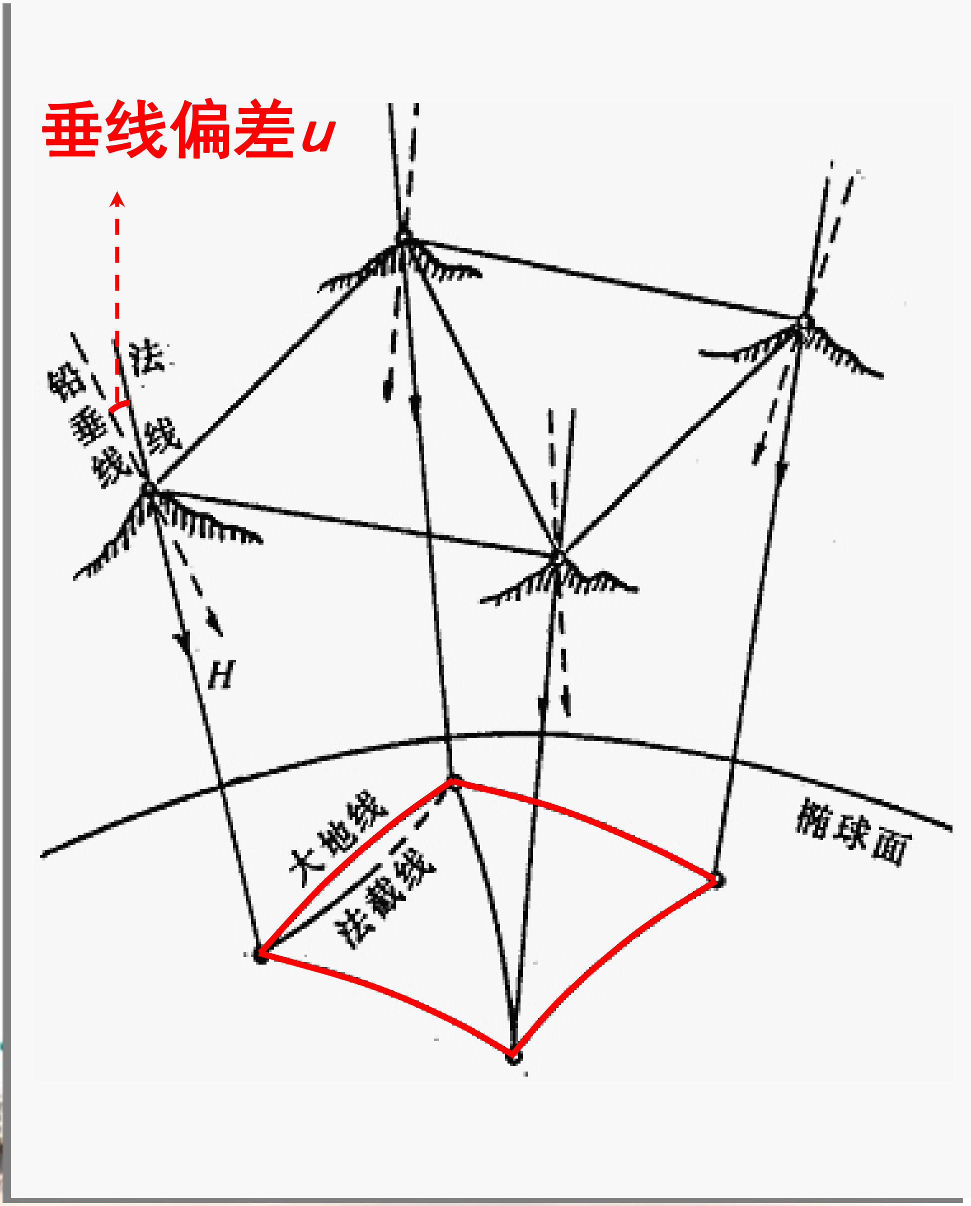
一、归算的意义和要求

2、归算的要求

1）以椭球面法线为基准线。

2）以椭球面为基准面。

3）椭球面两点连线用大地线。



地面观测值归算至椭球面

- 一、归算的意义和要求
- 二、水平观测方向归算至椭球面
- 三、地面观测长度归算至椭球面

二、水平观测方向归算至椭球面

将水平观测方向归算至椭球面，通常需要进行垂线偏差改正、标高差改正和截面差改正，简称三差改正。

1、垂线偏差改正（δ1）

（ Correction for deflection of the vertical ）

[定义]地面上以铅垂线为准的水平方向观测值，归算为以椭球面法线为准的水平方向值时，顾及测站点垂线偏差影响所加的改正。

标高差改正

将水平观测方向归算到椭球面，通常需要进行**垂线偏差改正、标高差改正**和**截面差改正**，简称三差改正。

2、标高差改正（δ_2）

（**Correction for skew normals**）

[定义]地面水平方向观测值，沿法线方向归算至参考椭球面上时，顾及照准点标高，所加的改正称为标高差改正。

标高差改正

[量级]

$$\delta_2'' = \frac{H_2 e^2 \rho''}{2M_2} \sin 2A_1 \cos^2 B_2$$

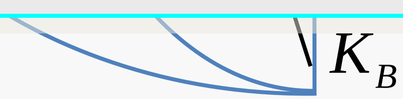
一般情况：全球最大值为0.75"
通常为百分之几秒。

[应用范围]

一、二等三角测量，三
四等酌情。

《规范》规定，水平方向归算时，各项改正要计算到：

一等	0.001秒
二等	0.01秒
三四等	0.1秒

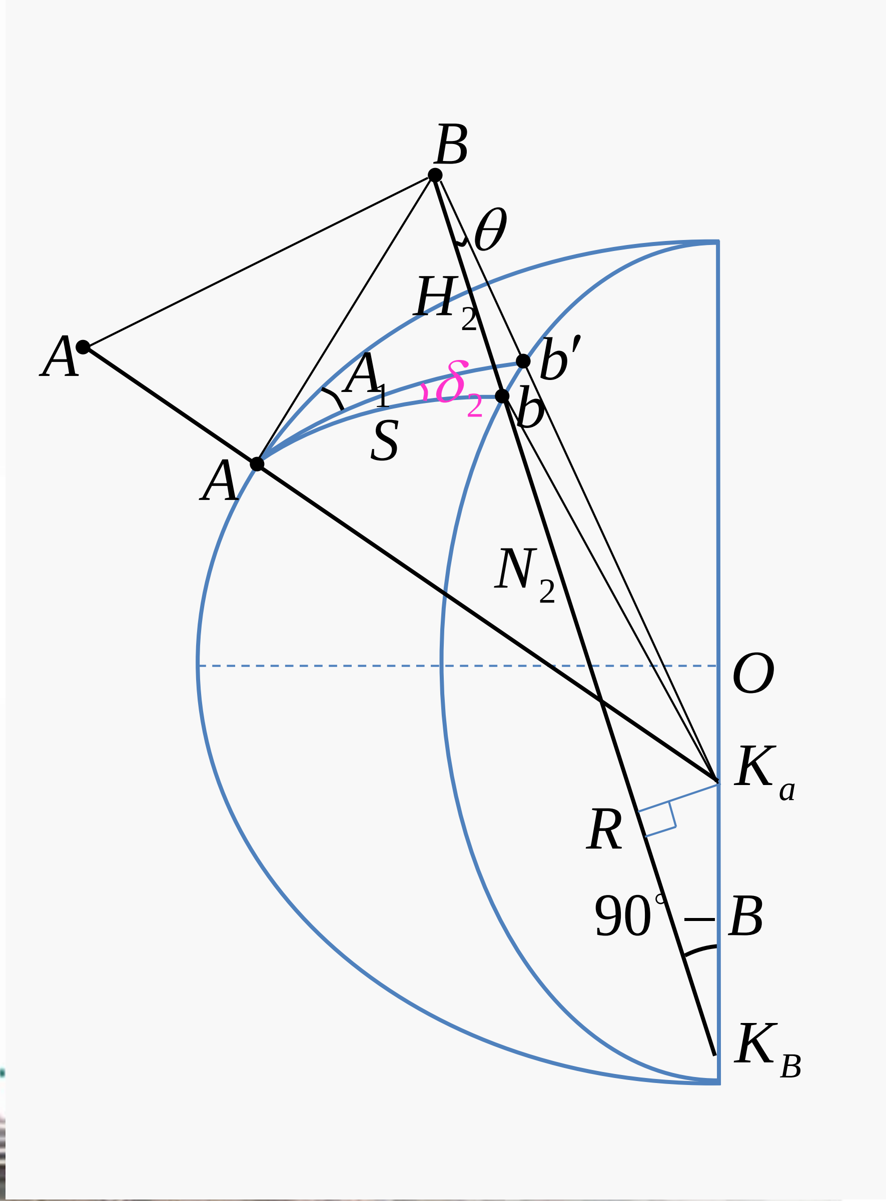


标高差改正

[实际计算说明]

$$\delta_2'' = \frac{H_2 e^2 \rho''}{2M_2} \sin 2A_1 \cos^2 B_2$$

- $H_2 = H_{2常} + \zeta_2$（高程异常）$+ a_2$（站标高）
- A_1：概略计算得到
- B_2：地形图内插得到



截面差改正

将水平观测方向归算到椭球面，通常需要进行垂线偏差改正、标高差改正和截面差改正，简称三差改正。

在椭球面上，纬度不同的两点由于其法线不共面，所以在对向观测时相对法截弧不重合，应当用两点间的大地线代替相对法截弧。

3、截面差改正（δ_3）

（Correction from normal section to geodesic）

[定义]法截线方向化为大地线方向所加的改正，称为截面差改正。

截面差改正

[公式符号含义]

$$\delta_3'' = -\frac{e^2 S^2 \rho''}{12 N_1^2} \cos^2 B_1 \sin 2A_1$$

[量级]

为0情况：照准点与观测点同经度或同纬度，

$$\Leftrightarrow A = 0^\circ、90^\circ、180^\circ、270^\circ, \delta_1 = 0$$

一般情况：千分之几秒

[应用范围]

一等三角测量，二至四等不加。

《规范》规定，水平方向归算时，各项改正要计算到：

一等	0.001秒
二等	0.01秒
三四等	0.1秒

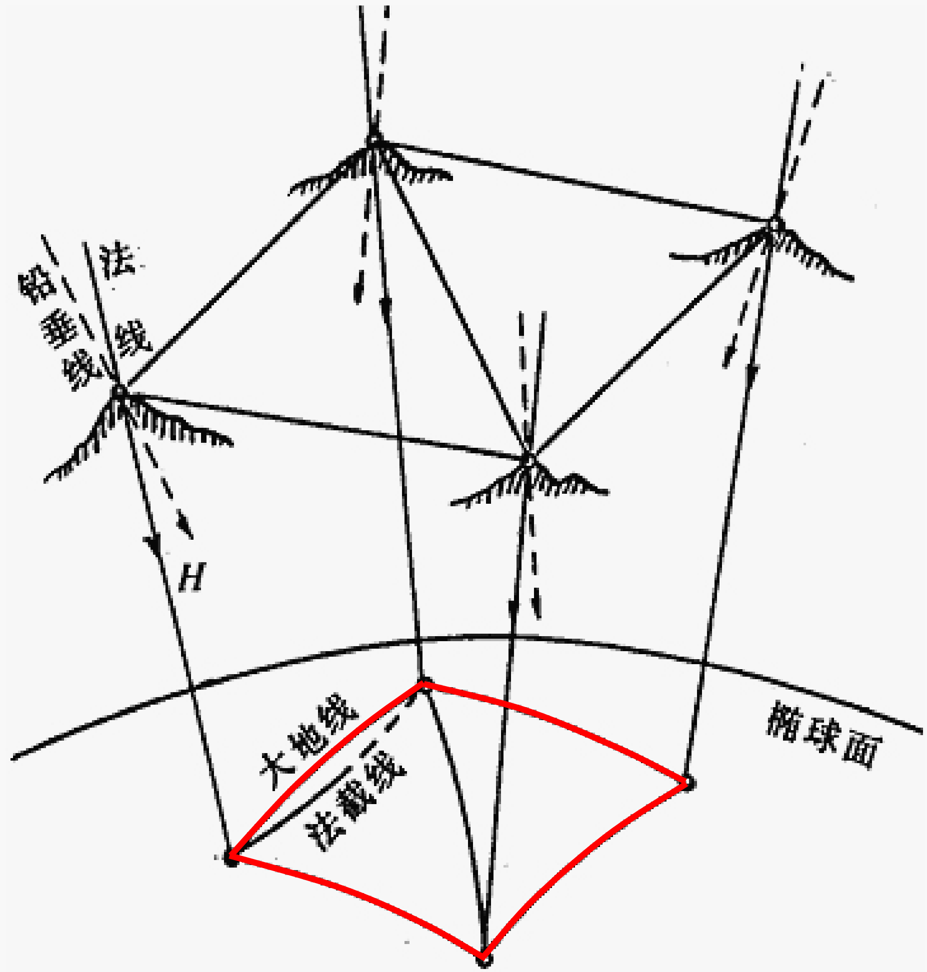
水平观测方向归算至椭球面（三差改正）

4、三差改正的计算

[改正结果]

[计算公式]

$$
\begin{cases}
\delta_1'' = -(\xi''\sin A_1 - \eta\cos A_1)\tan\alpha \\
\delta_2'' = \dfrac{H_2 e^2 \rho''}{2M_2}\cos^2 B_2 \sin 2A_1 \\
\delta_3'' = -\dfrac{e^2 S^2 \rho''}{12N_1^2}\cos^2 B_1 \sin 2A_1 \\
V = \sqrt{1+e'^2\cos^2 B} \\
N = \dfrac{c}{V} \\
M = \dfrac{N}{V^2} \\
\sum\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3
\end{cases}
$$



水平观测方向归算至椭球面（三差改正）

4、三差改正的计算

[应用范围]

三差改正	一等	二等	三等	四等
垂线偏差改正	加	加	酌情	酌情
标高差改正	加	加	酌情	酌情
截面差改正	加	不加	不加	不加

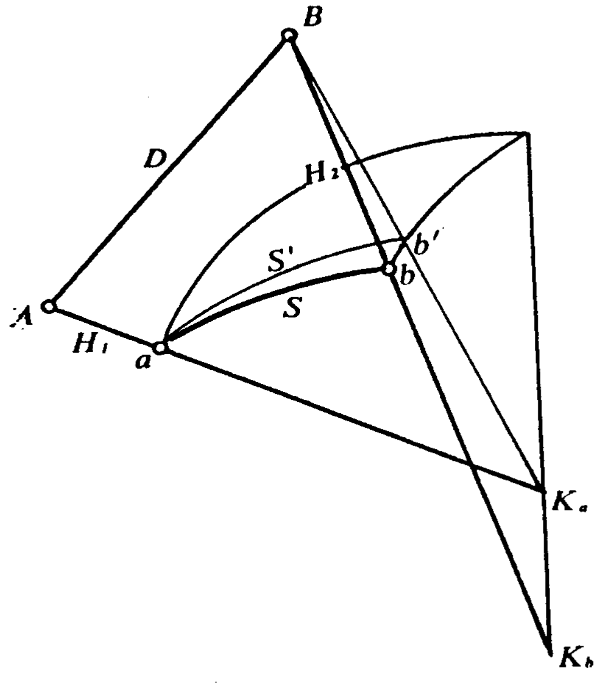
地面观测值归算至椭球面

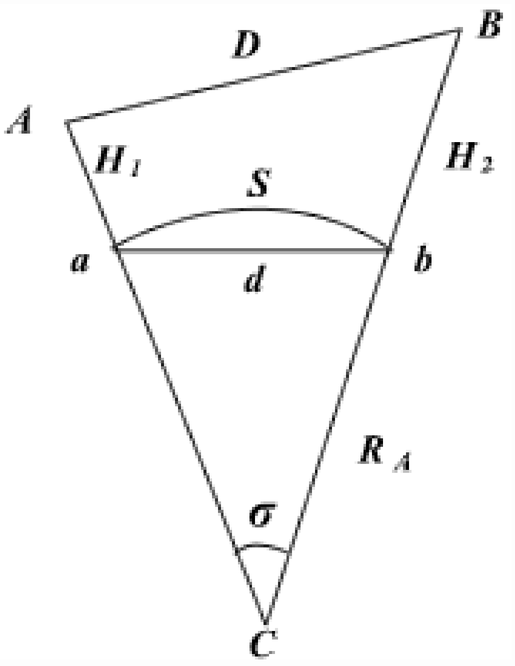
- 一、归算的意义和要求
- 二、水平观测方向归算至椭球面
- 三、地面观测长度归算至椭球面

地面观测长度归算至椭球面

[定义]

将地面两点间的直线斜距归算为椭球面上两点投影点间的大地线长。





近似公式

地面观测长度归算至椭球面

$$S = R_A\sigma$$

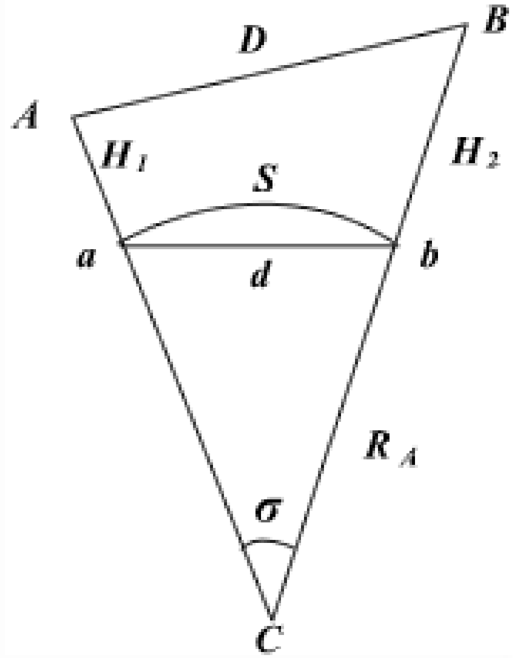
$$D^2 = (R_A + H_1)^2 + (R_A + H_2)^2 - 2(R_A + H_1)(R_A + H_2)\cos\sigma$$

$$= (H_2 - H_1)^2 + 4R_A^2(1+\frac{H_1}{R_A})(1+\frac{H_2}{R_A})\sin^2\frac{\sigma}{2}$$

$$d = 2R_A\sin\frac{\sigma}{2} = \sqrt{\frac{D^2 - (H_2 - H_1)^2}{(1+\frac{H_1}{R_A})(1+\frac{H_2}{R_A})}}$$

$$D^2 = (H_2 - H_1)^2 + (1+\frac{H_1}{R_A})(1+\frac{H_2}{R_A})d^2$$

$$\boxed{S = R_A\sigma = 2R_A\arcsin\frac{d}{2R_A} \approx d + \frac{d^3}{24R_A^2}}$$



近似公式

地面观测长度归算至椭球面

$$S = D\sqrt{\frac{1-\left(\frac{H_2-H_1}{D}\right)^2}{\left(1+\frac{H_1}{R_A}\right)\left(1+\frac{H_2}{R_A}\right)}} + \frac{D^3}{24R_A^2}$$

上式则为电磁波测距的归算公式。

下面将上式进一步化简，令**H1≈H2≈Hm=(H1+H2)/2,⊿h=H2-H1,**则：

$$S = D\sqrt{\frac{1-\left(\frac{H_2-H_1}{D}\right)^2}{\left(1+\frac{H_1}{R_A}\right)\left(1+\frac{H_2}{R_A}\right)}} + \frac{D^3}{24R_A^2} = D\left(1-\frac{\Delta h^2}{D^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{H_m}{R_A}\right)^{-1} + \frac{D^3}{24R_A^2}$$

$$= D\left(1-\frac{\Delta h^2}{2D^2}\right)\left(1-\frac{H_m}{R_A}\right) + \frac{D^3}{24R_A^2} = D - \frac{\Delta h^2}{2D} - D\frac{H_m}{R_A} + \frac{D^3}{24R_A^2}$$

经过以上各项改正，则将电磁波测距仪所测斜距公算到参考椭球面上。

由上式可知：第二项是由两点高差引起的改正，经此改正将测线化为平距；第三项是由平均测线高出参考椭球面引起的改正，经此改正后测线变为弦线；第四项为由弦线变为弧线的改正。

令H1≈H2≈Hm=(H1+H2)/2,⊿h=H2-H1, 1 式还可用下式表达：

$$S=D\sqrt{\frac{1-(\frac{H_2-H_1}{D})^2}{\left(1+\frac{H_1}{R_A}\right)\left(1+\frac{H_2}{R_A}\right)}}+\frac{D^3}{24R_A^2}=D\left(1-\frac{\Delta h^2}{D^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{H_m}{R_A}\right)^{-1}+\frac{D^3}{24R_A^2}$$

$$=\sqrt{D^2-\Delta h^2}\left(1-\frac{H_m}{R_A}\right)+\frac{D^3}{24R_A^2}$$

以平均高程面作投影面，范围小，可以用球代替椭球；球半径采用高斯平均曲率半径。计算公式为：

$$S=\sqrt{D^2-\Delta h^2}\left(1-\frac{H_m}{R}\right)+\frac{D^3}{24R^2}$$

可以证明：椭球半径的误差对边长归算结果影响很小，而高差误差对边长归算比较敏感。

地面观测长度归算至椭球面

[计算公式：小于60km的精密公式，精确到1mm]

$$S=\frac{D'R_A}{R_A+H_m}+\frac{D^3}{24R_A^{\ 2}}+1.25\times10^{-16}H_mD^2\sin 2B\cos A$$

$$D'=\sqrt{D^2-(H_2-H_1)^2}$$

$$H_m=\frac{1}{2}(H_1+H_2)$$

$$R_A=\frac{N}{1+e'^2\cos^2 B\cos^2 A}$$

D— 观测斜距，取至0.001m；

H_1、H_2— 测距边两端的大地高，取至0.001m；

B— 测距边起点的大地纬度，取至整分；

A— 测距边的大地方位角，取至整分；

S— 斜距归算至椭球面的大地线长，取至0.001m。

大地线微分方程与大地测量主题解算概述

1、大地线微分方程和克莱劳定理

1.1 大地线微分方程

设P为大地线上任意一点，其经度为L，纬度为B，大地线方位角为A。当大地线增加dS到P1点时，则上述各量相应变化dL，dB及dA。所谓大地线微分方程，即表示dL、dB和dA与dS的关系。

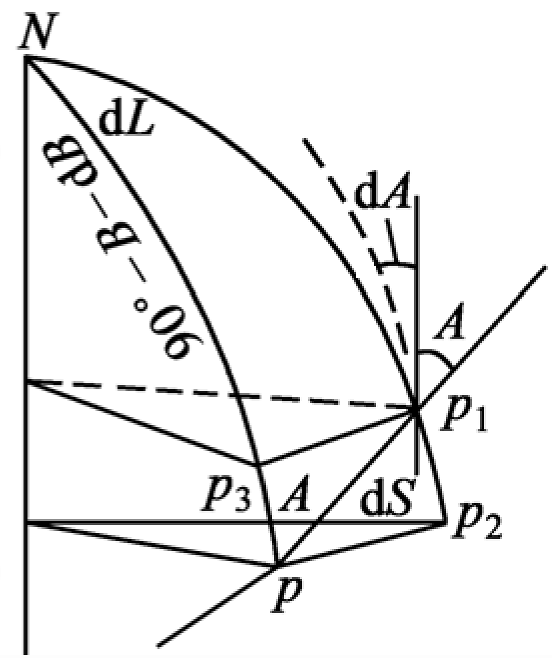
分析微分直角三角形PP_3P_1得到：

$$MdB = dS\cos A \Longrightarrow dB = \frac{\cos A}{M}dS \quad (1)$$

$$N\cos B dL = dS\cdot\sin A \Longrightarrow dL = \frac{\sin A}{N\cos B}dS \quad (2)$$

$$\sin dA = \sin dL \sin(B + dB)$$

$$\Longrightarrow dA = \frac{\sin A}{N}\tan B dS \quad (3)$$

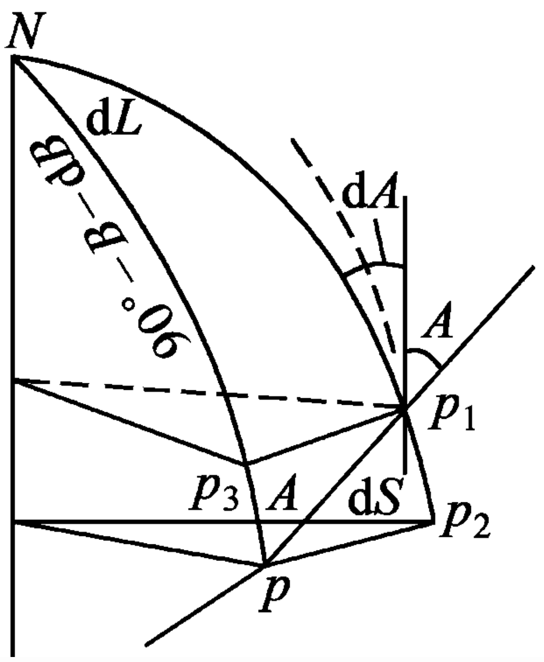


1、大地线微分方程和克莱劳定理

1.1 大地线微分方程

当以增量代替微分方程中的微分量，即可得到大地纬度差、经度差和方位角差的近似公式。

$$
\begin{cases}
dB = \dfrac{\cos A}{M} dS \\
dL = \dfrac{\sin A}{N \cos B} dS \\
dA = \dfrac{\sin A}{N} \tan B dS
\end{cases}
\Longrightarrow
\begin{cases}
\Delta B \approx \dfrac{S}{M} \cos A \\
\Delta L \approx \dfrac{S}{N} \sin A \sec B \\
\Delta A \approx \dfrac{S}{N} \sin A tg B
\end{cases}
$$



1、大地线微分方程和克莱劳定理

1.2 大地线的克莱劳定理

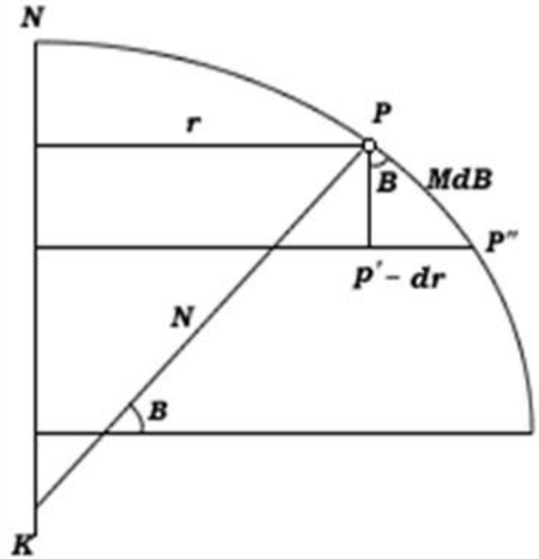
$$dB = \frac{\cos A}{M} dS \quad (1)$$

$$dA = \frac{\sin A}{N} \tan B dS \quad (3)$$

$$\Longrightarrow dA = \frac{\sin A}{\cos A} \cdot \frac{M \sin B dB}{N \cos B} \quad (4)$$

又因 $r = N\cos B = \dfrac{a\cos B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}} \quad \Rightarrow -dr = M\sin B dB \quad (5)$

$$dA = -\frac{\sin A}{\cos A}\frac{dr}{r} \quad (6)$$



解微分方程（6）得克莱劳方程：

$$r \cdot \sin A = C$$

式中常数C亦称大地线常数

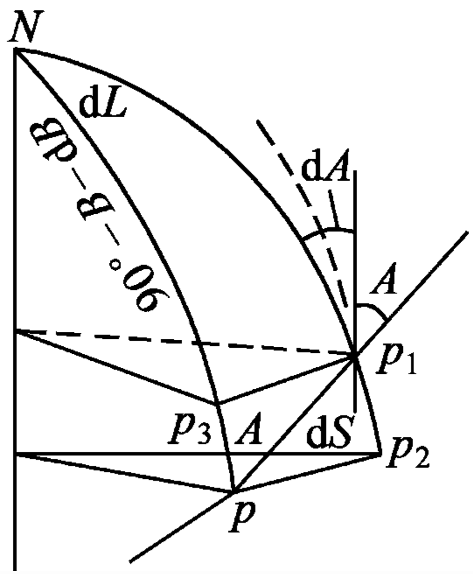
1、大地线微分方程和克莱劳定理

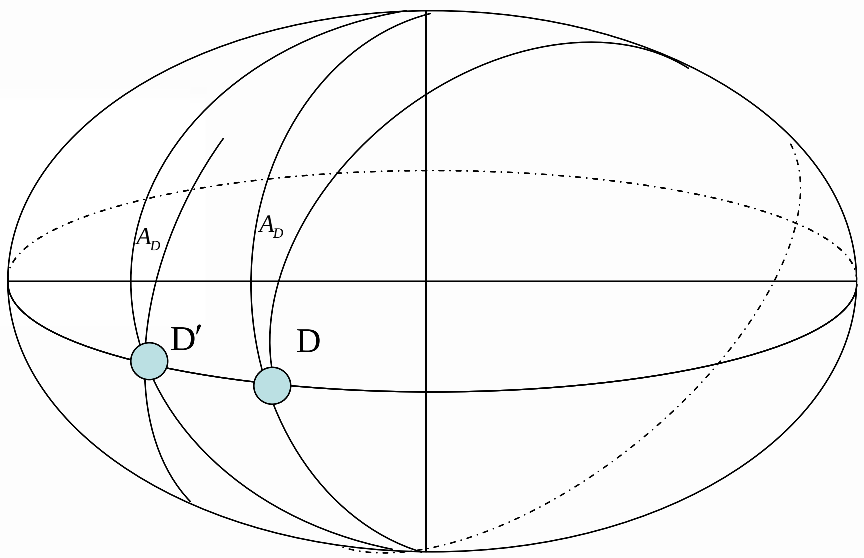
1.2 大地线的克莱劳定理

$$r \cdot \sin A = C$$

式中常数C亦称大地线常数

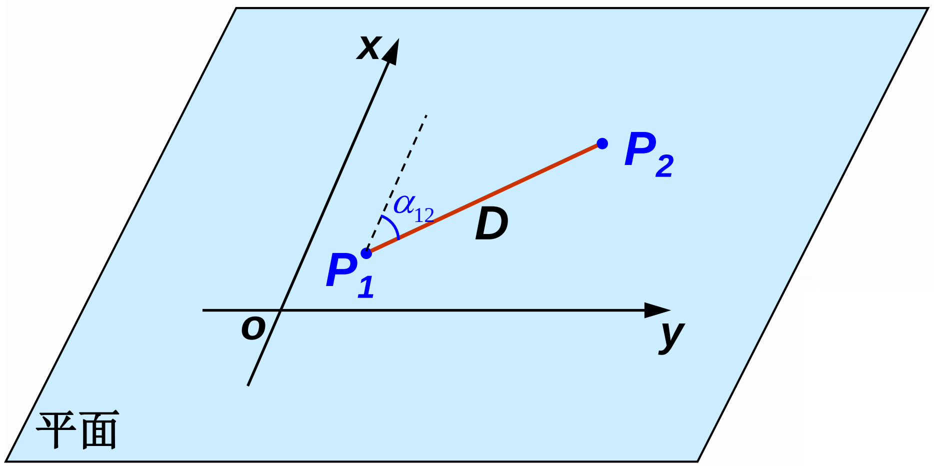
克莱劳方程表明：在旋转椭球面上，大地线各点的平行圈半径与大地线在该点的大地方位角的正弦的乘积等于常数。

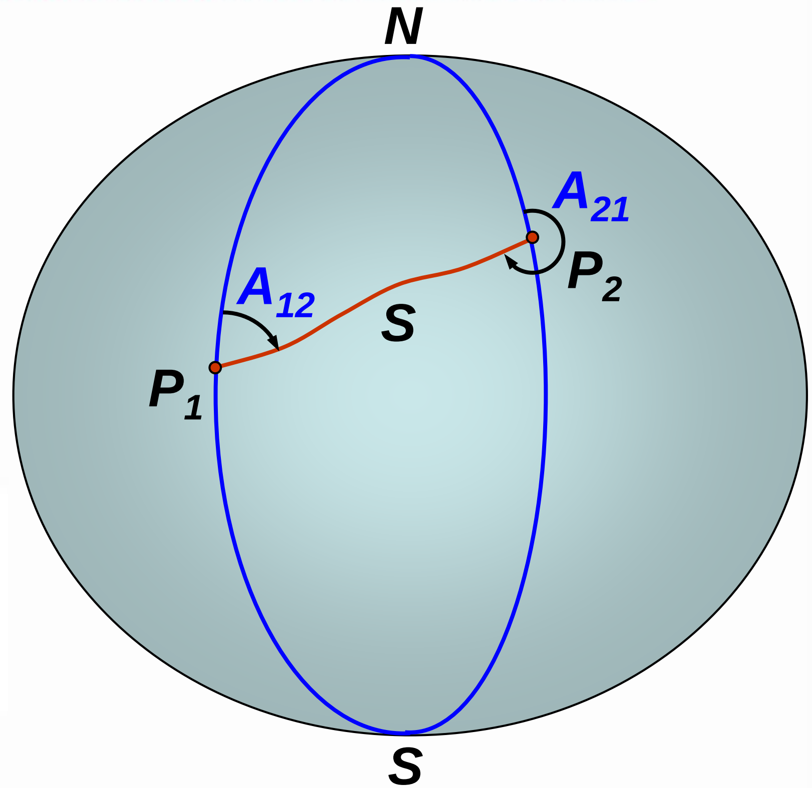




克莱劳定理是长距离大地问题的解算基础。

大地测量主题解算概述





平面直角坐标 (x_1, y_1), (x_2, y_2)

平面坐标正反算

平面极坐标 D, α_{12}

大地坐标 $(L_1, B_1), (L_2, B_2)$

大地主题解算

大地极坐标 $S,\ A_{12},\ A_{21}$

大地测量主题解算概述

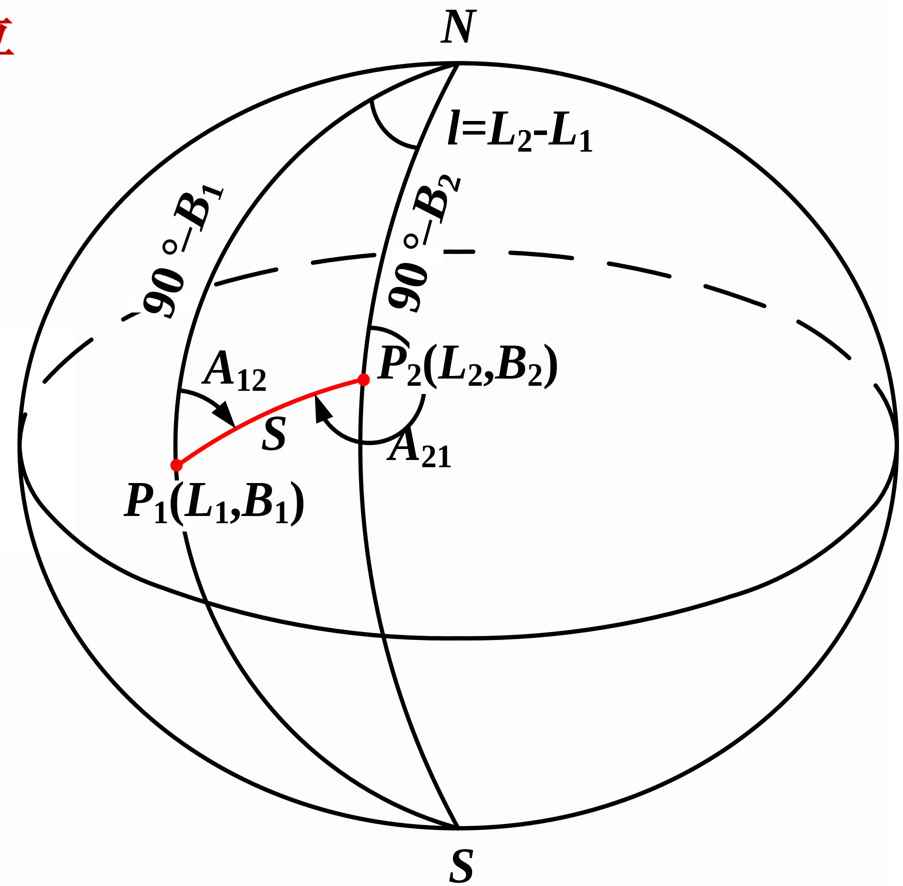
在椭球面上推算点的大地坐标，或者根据两点的大地坐标计算大地线长和大地方位角，就称为大地主题解算。

正解

L_1，B_1，S，A_{12} → L_2，B_2，A_{21}

L_1，B_1，L_2，B_2 → S，A_{12}，A_{21}

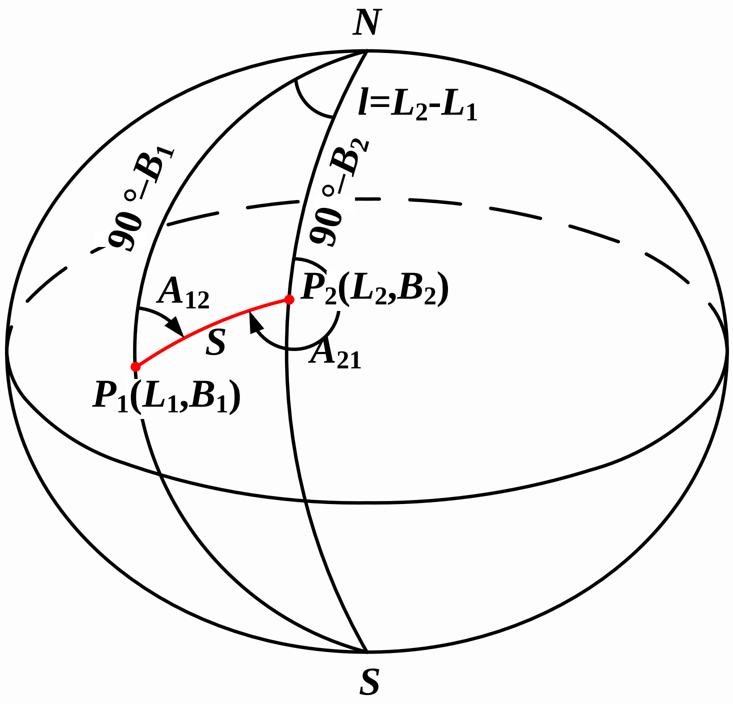
反解



大地测量主题解算概述

1、大地主题正解：已知(L_1 ，B_1)，A_{12}，S_{12}，计算(L_2 ，B_2)，A_{21}

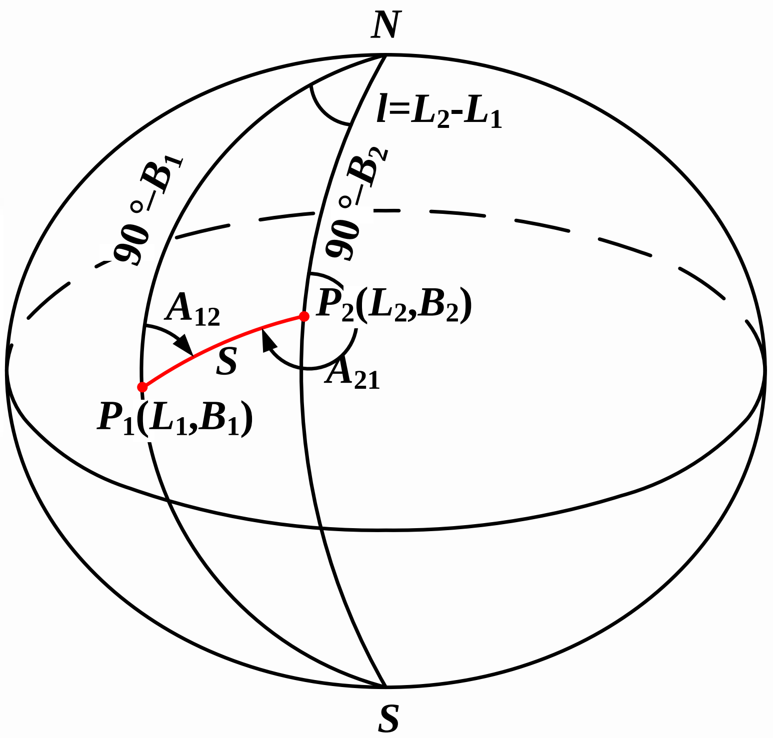
已知P_1点的大地坐标(L_1，B_1)，P_1至P_2的大地线长S及其大地方位角A_{12}，计算P_2点的大地坐标(L_2，B_2)和大地线S在P_2点的反方位角A_{21}，这类问题叫做大地主题正解。



大地测量主题解算概述

2、大地主题反解：已知(L1，B1)， (L2， B2)， 计算A12，S12 ，A21

如果已知P_1和P_2点的大地坐标(L_1，B_1)和(L_2，B_2)，计算P1至P2的大地线长S及其正、反方位角A12，A21，这类问题叫做大地主题反解。



根据大地线的长短，主题解算可分为三种：

- 短距离(400km以内)
- 中距离(400—1000km)
- 长距离(1000km以上)

大地测量主题解算概述

由大地测量主题解算内容可知，椭球面上两控制点大地坐标，大地线长度及大地方位角的正解和反解问题，同平面上两控制点平面坐标、平面距离及方位角的正反算是相似的，只不过解算椭球面上的大地问题要比平面上相应计算复杂的多。

大地主题正解和反解，从解析意义来讲，就是研究大地极坐标与大地坐标间的相互变换。

大地测量主题解算方法

- 以大地线微分方程为基础
- 以白塞尔大地投影为基础
- 利用地图投影理论
- 数值积分的解法
- 依据大地线外的其他线为基础

3、大地主题解算基本思路

由于椭球面上大地坐标的解算，比平面上坐标的解算要复杂得多，导致大地问题解算公式的多样化，其种类目前有几十种，但从原理来讲，大都是以大地线的三个微分方程为基础，对长距离大地问题解算，还要用到大地线的克莱劳方程。其原理大致可分成五类：

1）利用椭球面上大地线及其3个微分方程，将大地线两端点的大地经差、大地纬度差和大地方位角差，展开成大地线长度S的升幂级数式。

2）利用球面作为辅助面，将椭球上的元素转换到球面上，在球面上应用球面三角公式进行解算，然后再把解算的结果转换回椭球面上。（白塞尔主题解算方法）

3、大地主题解算基本思路

3）利用地图投影理论解算大地问题。

采用椭球面对球面的正形投影和等距离投影以及椭球面对平面的正形投影(如高斯投影)，它们都可以用于解算大地主题。

4）对大地线微分方程进行数值积分的解法。

这种解法直接进行数值积分计算以解决大地主题的解算。不采用勒让德级数，也不采用辅助面。

5）依据大地线外的其他线为基础。

连接椭球面两点的媒介除大地线之外，当然还有其他一些有意义的线，比如弦线、法截线等。当然，这些解算结果还应加上归化至大地线的改正。

大地测量主题解算概述

大地测量主题正、反解原是用于推求一等三角锁中各点的大地坐标或反算边长和方位角的，目前由于大量的三角网都转化到高斯投影面上计算，所以它在三角测量计算中的作用就越来越小了。但是随着现代科学技术，特别是空间技术、航空、航海、国防等方面的科学技术的发展，大地主题又有了重要作用，解算的距离也由原来几十、几百公里扩大到几千甚至上万公里。

地图数学投影变换的基本概念

大地测量数据归算

确定水平坐标的流程

已知坐标（L，B） ⟷ 已知坐标（x，y）

- 水平方向
- 垂直角
- 地面距离
- 天文经纬度
- 天文方位角

- 水平方向
- 大地线长
- 大地方位角

- 水平方向
- 平面距离
- 平面方位角

布设水平控制网 $\xrightarrow{\text{观测}}$ 地面上观测元素 $\xrightarrow{\text{归算}}$ 椭球面上的元素 $\xrightarrow{\text{归算}}$ 高斯平面的元素

椭球面上的元素 —推算 平差→ 大地坐标（L，B）

高斯平面的元素 —推算 平差→ 平面坐标（x，y）

水平坐标

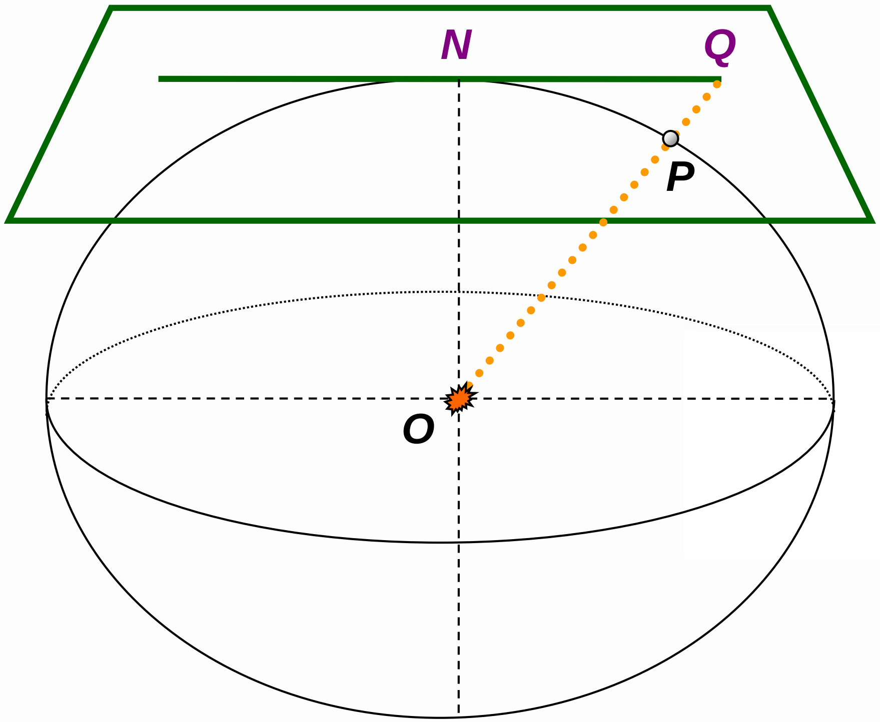
大地坐标（L，B） ⟷ 平面坐标（x，y）

（一）地图投影的意义与投影方程

为什么要投影至一个平面？

- 椭球面上：（B，L），大地线长，大地方位角，计算复杂
- 测图、工程建设控制网布设等不方便
- 日常生活、位置服务等不方便
- ……

（一）地图投影的意义与投影方程



几何法示意图

- 控制变形
- 简化计算
- 方便实用

（一）地图投影的意义与投影方程

1、投影的意义(Significance of projection)

- 控制地形测图投影变形
- 简化计算

2、投影的定义(Definition of projection)

在大地测量中，所谓地图投影，就是将椭球面上的元素，按照一定的数学规则再次归算到平面上。椭球面元素包括点的大地坐标、大地线的方向和长度以及大地方位角等，其中点的坐标是关键。因为点的位置确定后，两点间大地线的方位和距离自然就确定了。

3、投影的方法 (Method of projection)

- ➢几何法
- ●数学解析法

（一）地图投影的意义与投影方程

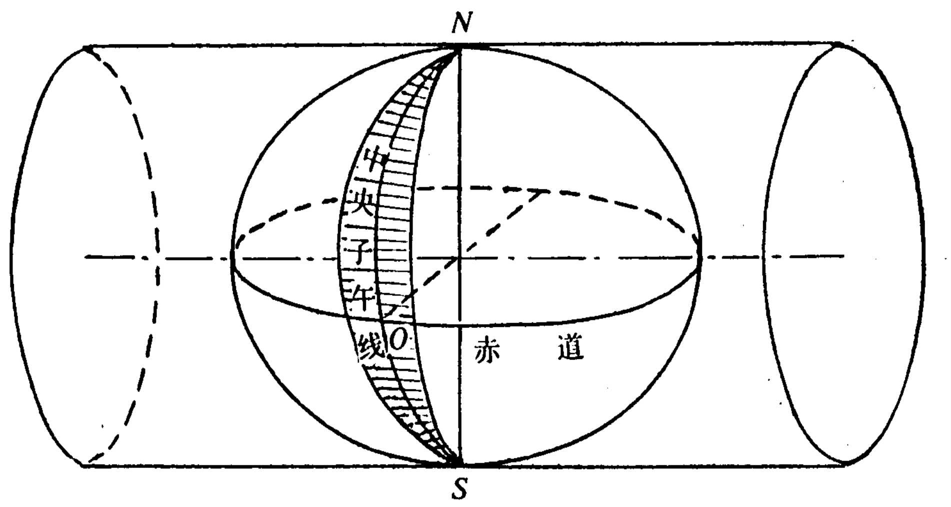
4、投影方程(Equation of projection)

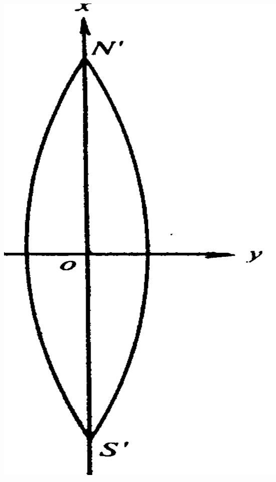
$$
\begin{cases}
x = F_1(B, L) \\
y = F_2(B, L)
\end{cases}
$$

F_1和F_2称为投影函数，它们是由“一定的数学规则”所决定的。不同的投影方法对应的F_1、F_2不同，因此，又可说它们是由一定的投影条件确定的。如果F_1和F_2的形式已经确定，即可由大地坐标求得平面直角坐标。

椭球面是不可展曲面，不能展成平面。如果取一可展曲面（如平面、圆锥面、圆柱面），使其与椭球面相切或相割，然后按一定的数学规则，将椭球面上的元素转换到可展曲面上，并将可展曲面展平，就变成平面上的元素了。这样就将本来是不可展平的椭球面，人为地转变成平面。

（二）地图投影的变形





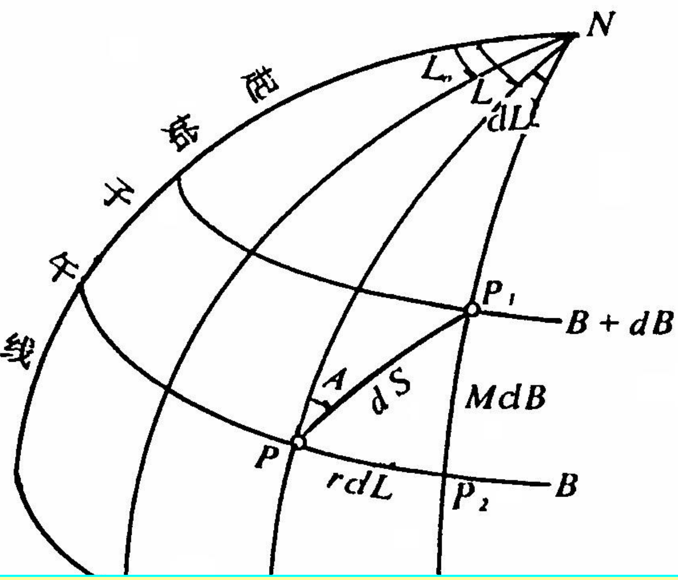
长度变形

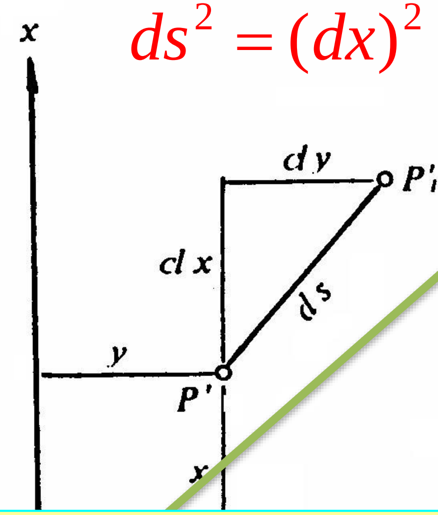
方向或角度变形 → 变形在所难免！

面积变形

（二）地图投影的变形（长度比Length ratio ）

$$dS^2 = (MdB)^2 + (rdL)^2$$
$$ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$





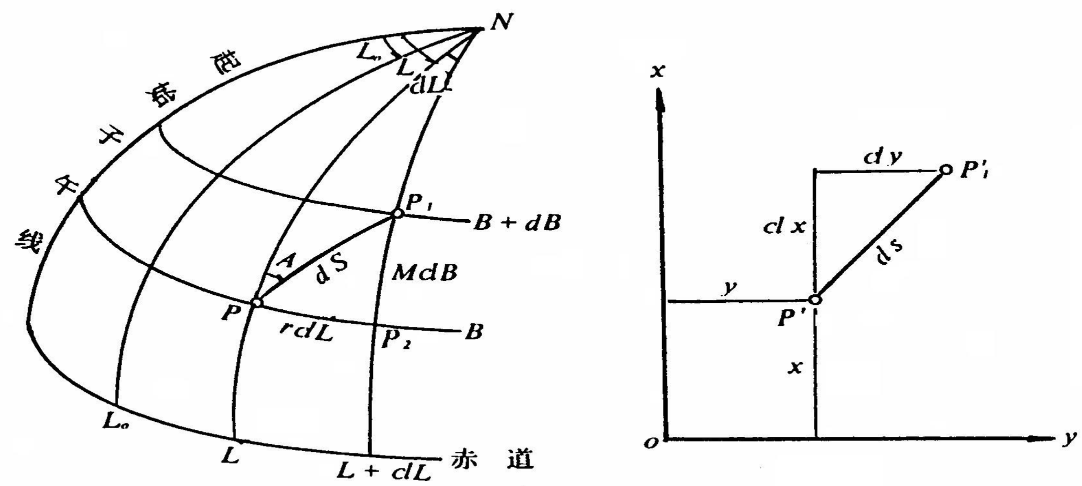
一般情况下，会随点位和方向变化

长度比
(Length ratio)

$$m = \lim_{PP_1 \to 0}\left(\frac{P'P_1'}{PP_1}\right) \Leftrightarrow \boxed{m = ds/dS} \Leftrightarrow \boxed{m^2 = \frac{(dx)^2 + (dy)^2}{(MdB)^2 + (rdL)^2}}$$

长度比m就是投影面上一段无限小的微分线段ds，与椭球面上相应的微分线段dS二者之比。

（二）地图投影的变形（长度比Length ratio ）



一点上的长度比，不仅随点的位置，而且随线段的方向而发生变化，即不同点上的长度比都不相同，而且同一点上不同方向的长度比也不相同。

（二） 地图投影的变形（主方向）

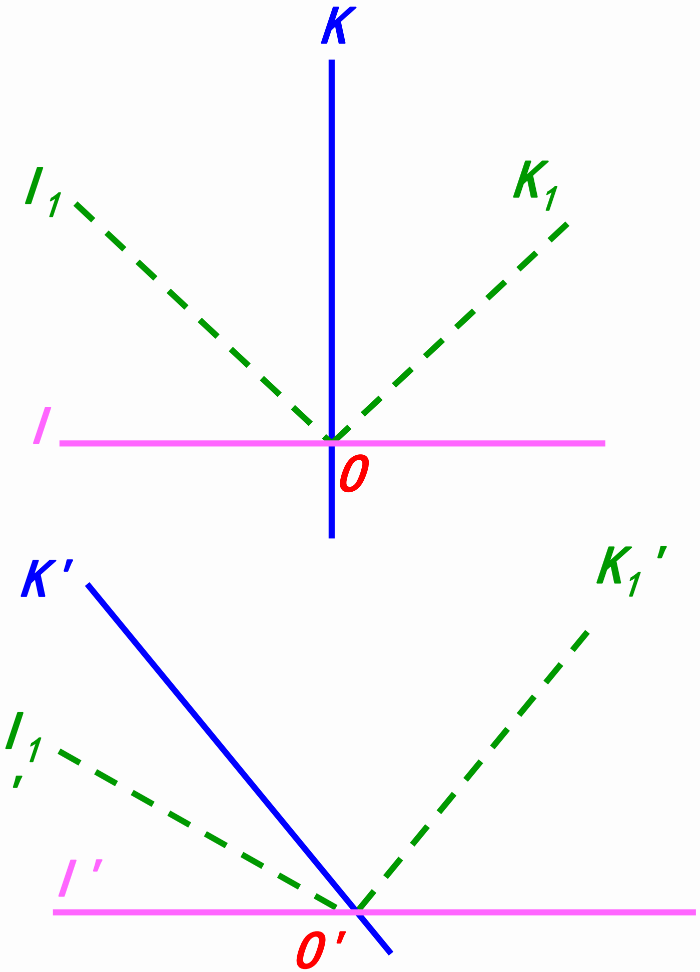
投影后一点的长度比依方向不同而变化。其中**最大及最小长度比**的方向，称**为主方向**。

理论证明在椭球面的任意点上，必定有一对相互垂直的方向，它在平面上的投影也必是相互垂直的。这两个方向就是长度比的极值方向，也就是主方向。

（二） 地图投影的变形（主方向）

主方向（main direction）

过椭球面上某点，通常有两条互相正交的曲线，它们在平面上的投影曲线也是互相正交的，这样两条曲线所在地方向叫**主方向**。<u>因为长度比在主方向上有极值存在，所以也可说，长度比极值所在的方向称为主方向。</u>

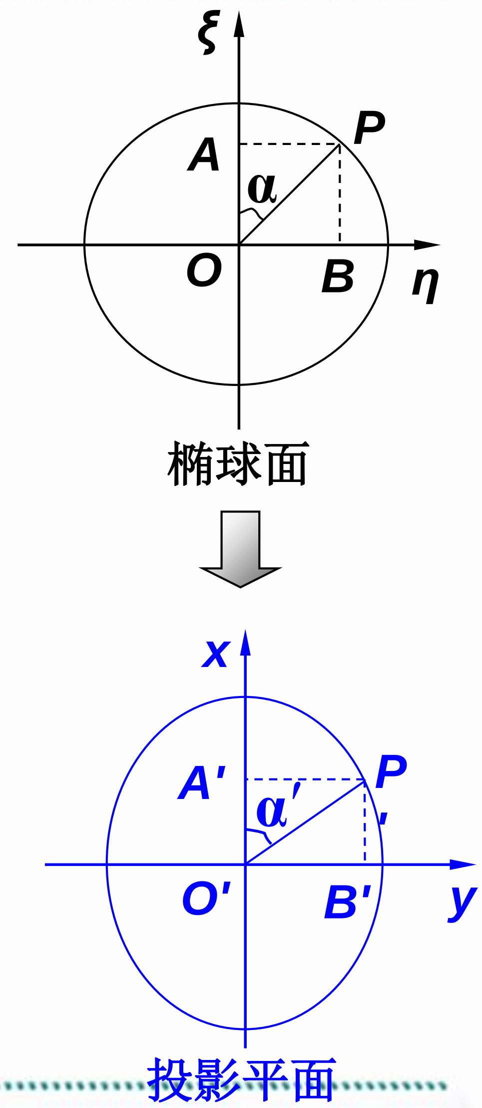


（二） 地图投影的变形（主方向）

变形椭圆（deformation ellipse）

在一定点上，长度比一般随方向而变化的。如果以定点为中心，以长度比的数值为向径，构成以两个主方向为轴，以两个长度比极值为长短半径的椭圆，这个椭圆称为**变形椭圆**。

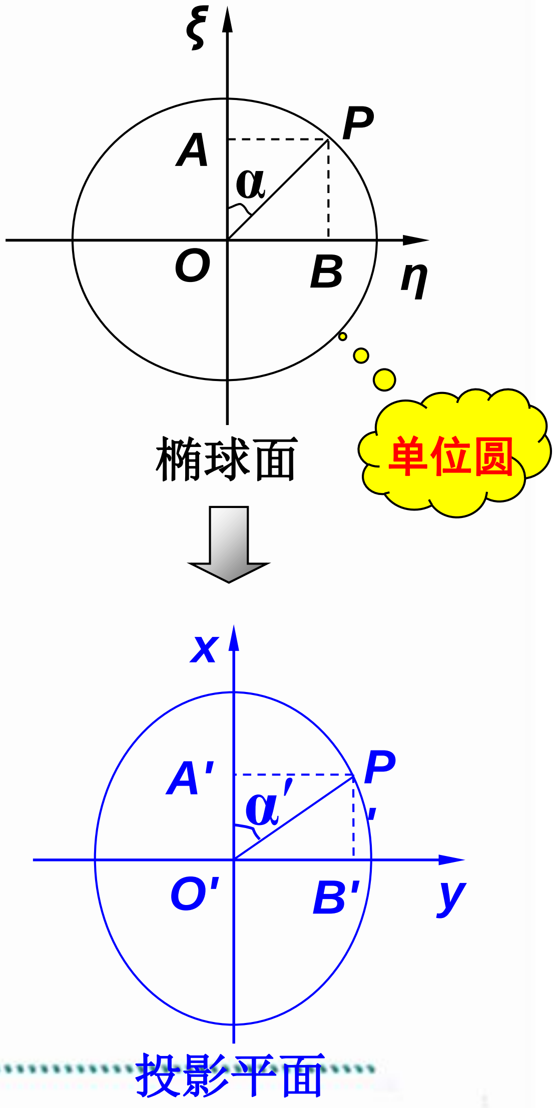
变形椭圆可形象地表达点的投影变形情况，对研究投影变形有重要作用。



（二） 地图投影的变形（变形椭圆）

变形椭圆（deformation ellipse）

$$P:\begin{cases}\xi = OA\\ \eta = OB\end{cases}\qquad P':\begin{cases}x = O'A'\\ y = O'B'\end{cases}$$



设主方向的长度比分别为*a*和*b*:

$$\begin{cases}\dfrac{O'A'}{OA} = a\\[2ex] \dfrac{O'B'}{OB} = b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x = a\xi\\ y = b\eta\end{cases}$$

$$\because \xi^2 + \eta^2 = 1 \qquad \therefore \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

设在椭球面上有以O点为中心的单位微分圆，两个主方向分别为微分圆的横轴与纵轴。

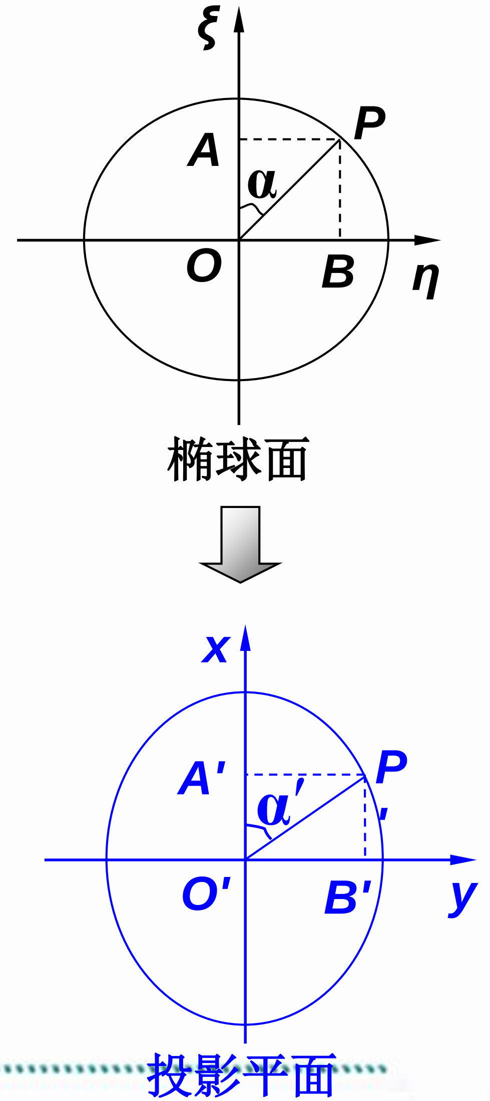
（二） 地图投影的变形（变形椭圆）

变形椭圆的形状、大小及方向，完全由投影条件确定、随投影条件不同而不同，同一投影中因点位不同而不同。

若设原面上单位为1的的微分圆上一点P投影到平面上变成微分椭圆上的一点P’的向径为r，则由长度比定义可知：

$$m = r/1=r$$

由此式可进一步认识到，OP方向上的长度比等于变形椭圆上P’的向径，因此**某定点O处的变形椭圆是描述该点各方向上长度比的椭圆。**



（二） 地图投影的变形（投影变形）

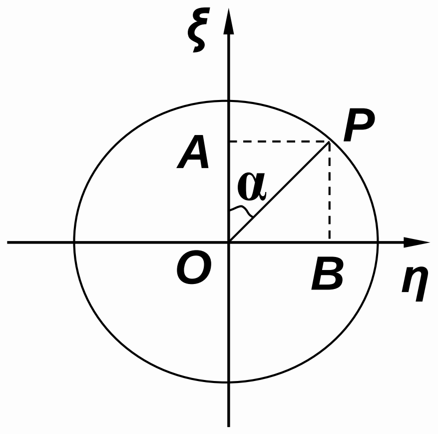
参考椭球面是一个凸起的不可展平的曲面，如果将这个曲面上的元素，比如一段距离、一个方向、一个角度及图形等投影到平面上，必然同原来的距离、方向、角度及图形产生差异，这一差异称为投影变形。

- 长度变形
- 方向变形
- 角度变形
- 面积变形

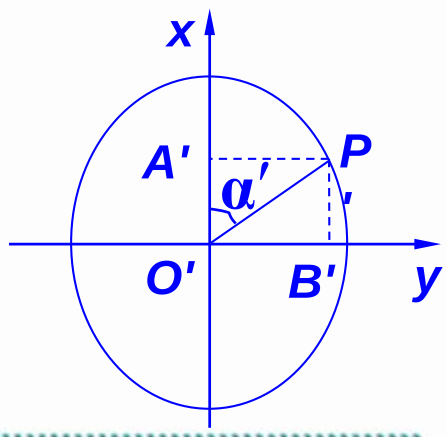
（二） 地图投影的变形（投影变形）

■ 长度变形

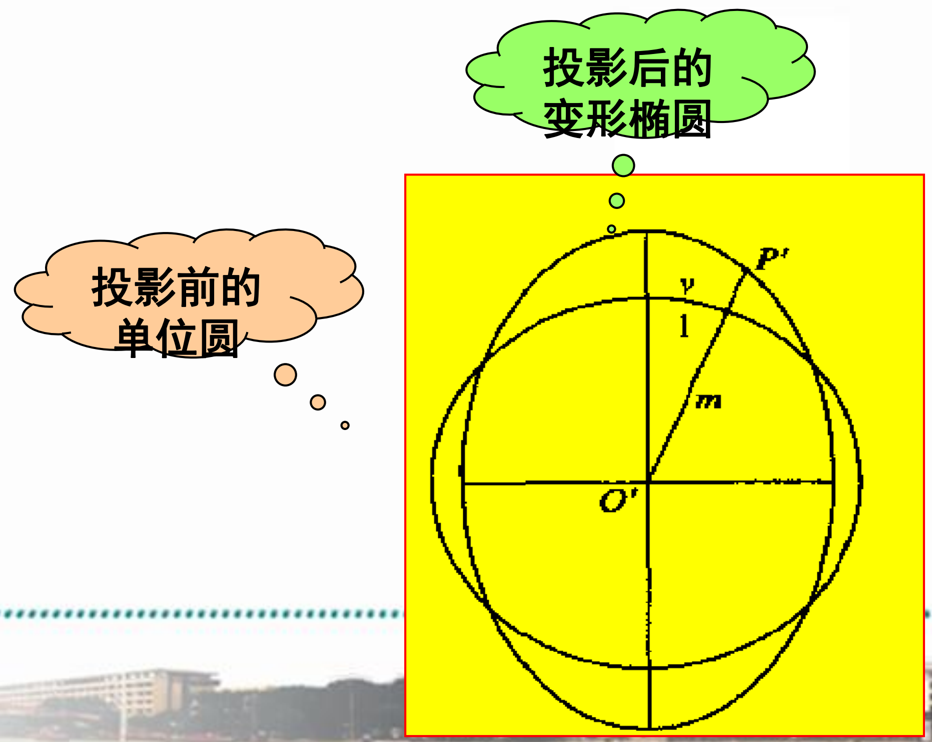
$$\boxed{r = m - 1,\ m\text{为长度比}}$$



椭球面



投影平面



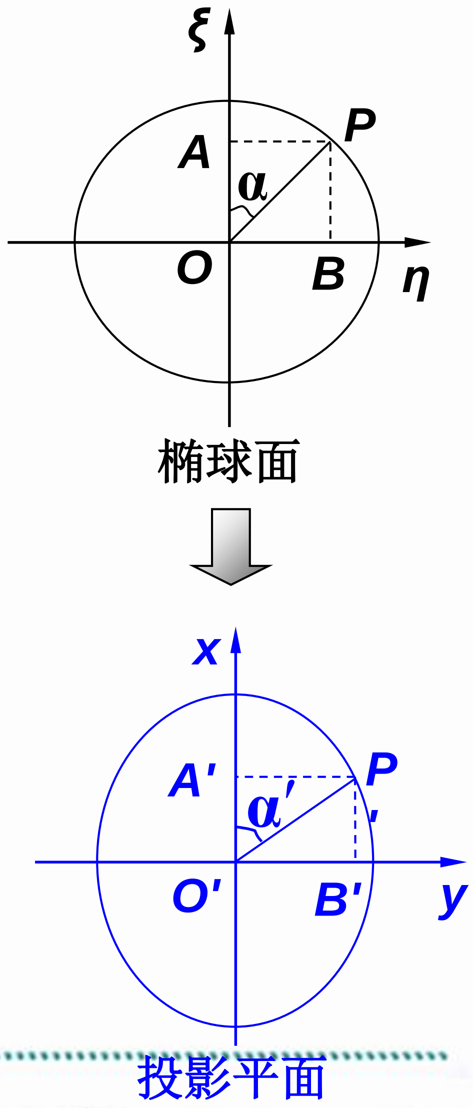
（二） 地图投影的变形（投影变形）

■ 方向变形

$$\boxed{(\alpha' - \alpha),\text{从主方向量算}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\eta}{\xi} \qquad \tan\alpha' = \frac{y}{x} = \frac{b}{a}\cdot\frac{\eta}{\xi}$$

$$\Rightarrow \tan\alpha' = \frac{b}{a}\cdot\tan\alpha$$



（二） 地图投影

$$\begin{cases} \tan\alpha - \tan\alpha' = \dfrac{\sin(\alpha-\alpha')}{\cos\alpha\cos\alpha'} \\ \tan\alpha + \tan\alpha' = \dfrac{\sin(\alpha+\alpha')}{\cos\alpha\cos\alpha'} \end{cases}$$

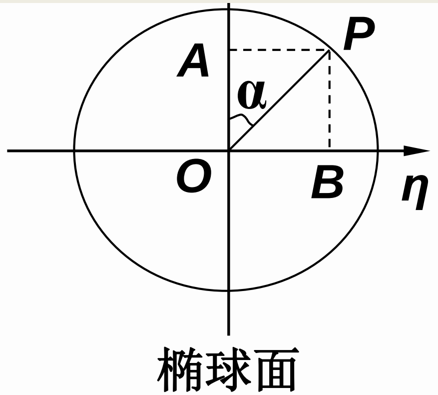
■ 方向变形

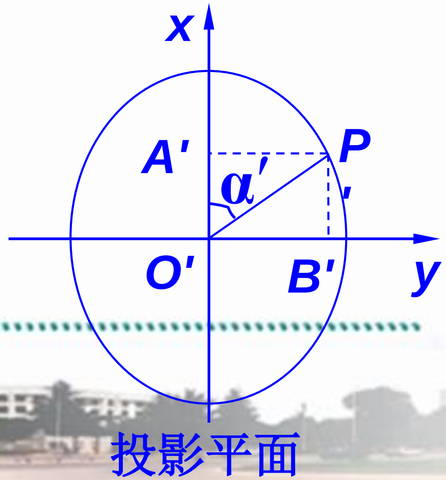
$(\alpha'-\alpha)$,从主方向量算

$$\tan\alpha' = \frac{b}{a}\cdot\tan\alpha$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tan\alpha - \tan\alpha' = \dfrac{a-b}{a}\cdot\tan\alpha \\ \tan\alpha + \tan\alpha' = \dfrac{a+b}{a}\cdot\tan\alpha \end{cases}$$

$$\boxed{\sin(\alpha-\alpha') = \frac{a-b}{a+b}\sin(\alpha+\alpha')}$$





（二） 地图投影的

$$\tan\alpha' = \frac{b}{a}\tan\alpha$$

$$\tan\alpha_0' = \tan(90^\circ - \alpha_0) = \cot\alpha_0$$

■ 方向变形

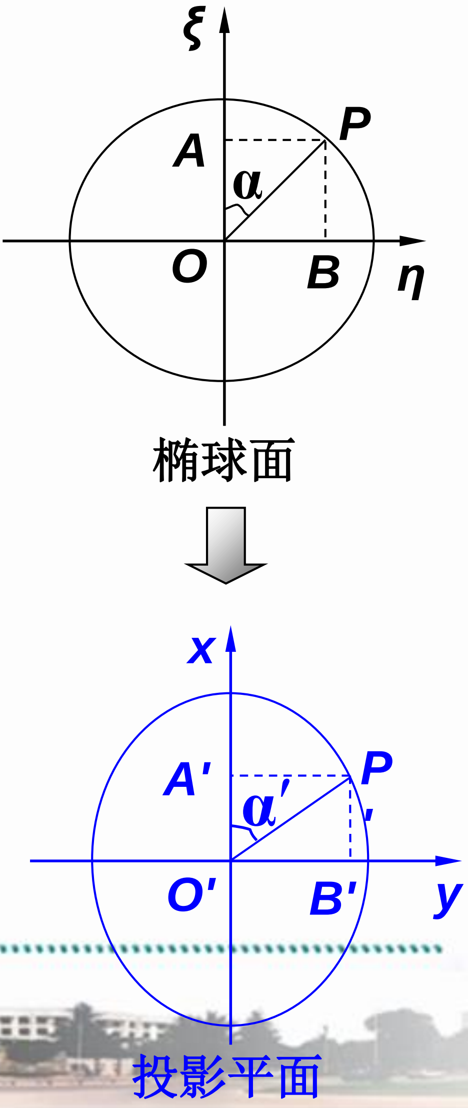
$\boxed{(\alpha'-\alpha),\text{从主方向量算}}$

$$\boxed{\sin(\alpha-\alpha') = \frac{a-b}{a+b}\sin(\alpha+\alpha')}$$

最大方向变形：$\alpha_0 + \alpha_0' = 90^\circ / 270^\circ$

$$\sin(\alpha_0 - \alpha_0') = \pm\frac{a-b}{a+b}$$

$$\tan\alpha_0 = \pm\sqrt{\frac{a}{b}},\ \tan\alpha_0' = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$$

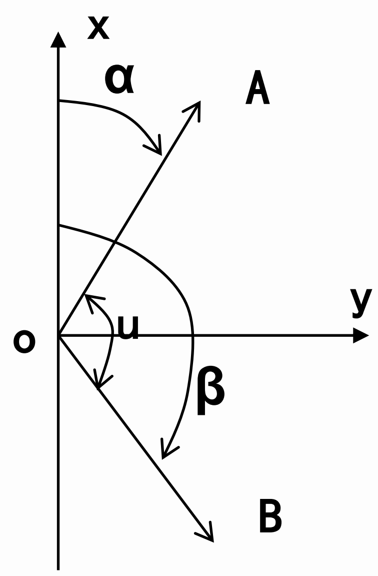


（二） 地图投影的变形（投影变形）

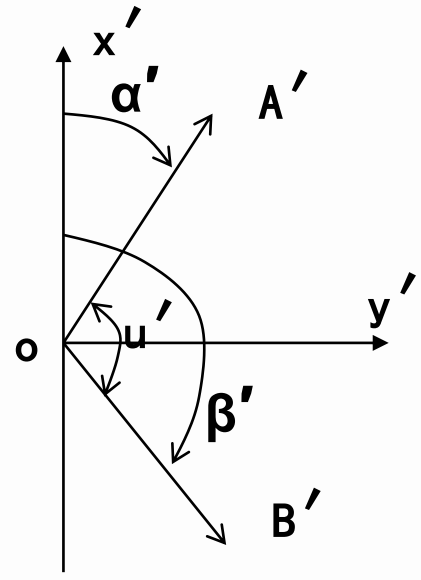
■ 角度变形

投影前的角度u与投影后的角度u′之差：Δu=u′−u

两方向α、β所夹角u的变形称为角度变形，用Δu表示。即：



投影前的角度u



投影后的角度u′

(…

角度变形即角度的两边方向变形之差

$$\sin(\alpha-\alpha')=\frac{a-b}{a+b}\sin(\alpha+\alpha')$$

■ 角度变形

$\Delta u=u'-u, u$为椭球面角度，u'为相应投影平面角度

令 $u=\alpha_2-\alpha_1, u'=\alpha_2'-\alpha_1'$

$$\Rightarrow \Delta u=u'-u=\alpha_2'-\alpha_1'-(\alpha_2-\alpha_1)=\alpha_2'-\alpha_2-(\alpha_1'-\alpha_1)$$

$$\Delta u=-\arcsin\left[\frac{a-b}{a+b}\sin(\alpha_2'+\alpha_2)\right]+\arcsin\left[\frac{a-b}{a+b}\sin(\alpha_1'+\alpha_1)\right]$$

最大角度变形：

$$\Delta u_{\max}=2\arcsin\frac{a-b}{a+b}$$

（二） 地图投影的变形（投影变形）

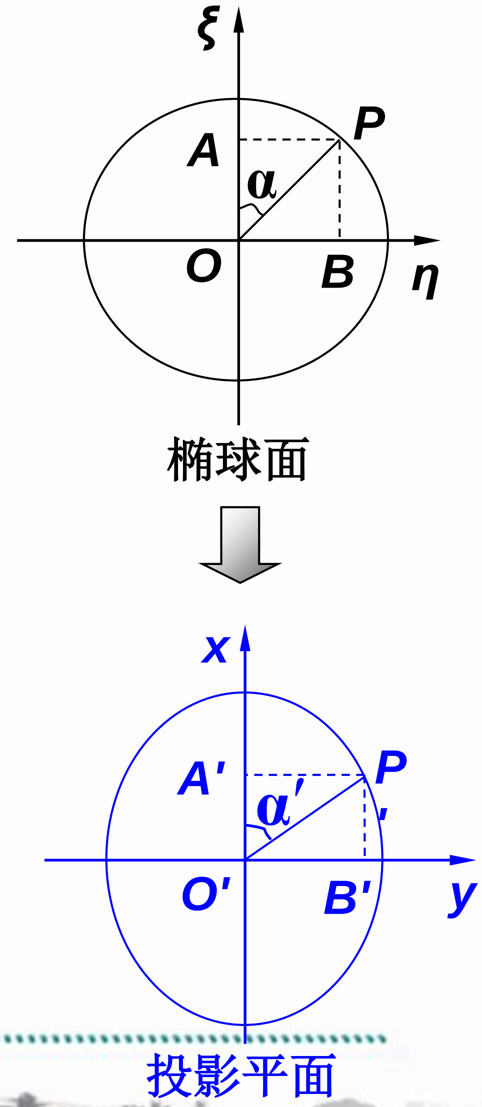
■ 面积变形

面积比*P*：椭球面上一无限小的图形，投影到平面上的面积与原椭球面图形面积之比的极限。

$$P = \frac{\pi ab}{\pi} = ab$$

面积变形：

$$\boxed{P - 1}$$



（二） 地图投影的变形（投影变形）

地图投影必然产生变形，这是客观事实。投影变形一般有长度变形、方向变形、角度变形和面积变形。在地图投影中，尽管投影变形是不可避免的，但是人们可以根据需要来掌握和控制它，可使某种变形为零，而其他变形最小。因而在地图数学投影中产生了许多种类的投影方法。

（三） 地图投影的方向变形

$$\sin(\alpha-\alpha')=\frac{a-b}{a+b}\sin(\alpha+\alpha')$$

投影的分类（classification of projection）

- 按投影面：平面投影、圆锥投影、圆柱投影等
- 按变形性质：等角、等面积、任意投影等
- 按创始人的姓名：如墨卡托、高斯投影等

■ 等角投影（正形投影）

投影前后，角度不发生变形

投影前后，方向不发生变形

$$\boxed{a=b}$$

椭球面某点的长度比为一常数，不随方向而变

（三） 地图投影的分类（

面积变形

$$P-1=ab-1$$

投影的分类（classification of projection）

- 按投影面：平面投影、圆锥投影、圆柱投影等
- 按变形性质：等角、等面积、任意投影等
- 按创始人的姓名：如墨卡托、高斯投影等

■ 等角投影 （正形投影） $\boxed{a=b}$

■ 等积投影 $\boxed{a\cdot b=1}$

■ 任意投影 $\boxed{a\neq b \text{且} a\cdot b\neq 1}$

（三） 地图投影的分类（按变形性质）

投影的分类（classification of projection）

- **等角投影 （正形投影）** $\boxed{a=b}$

  用途：基本地形图，航海图，航空图……

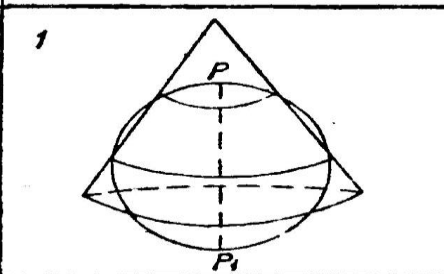
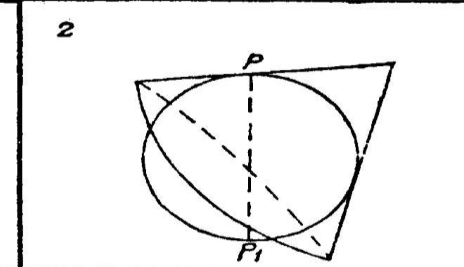
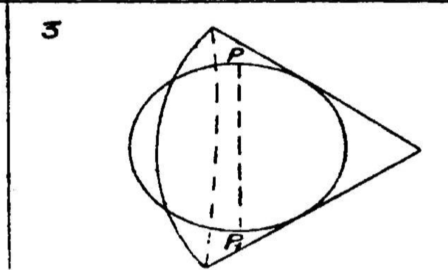
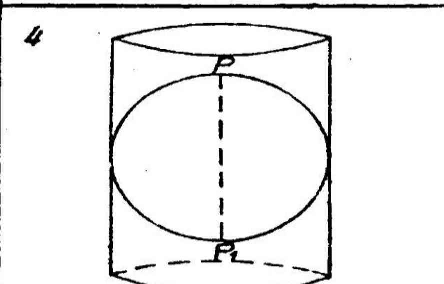
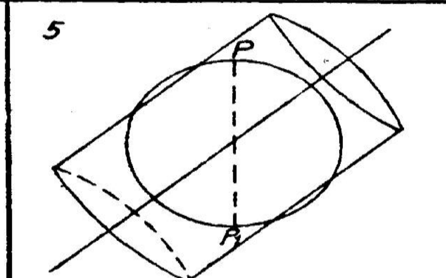
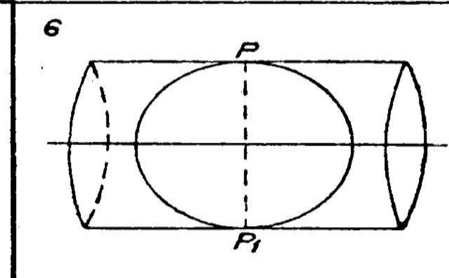
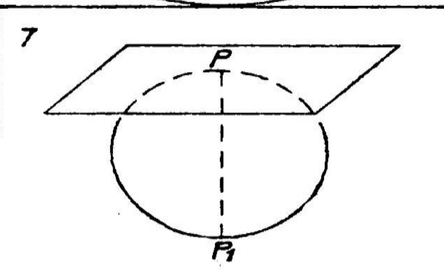
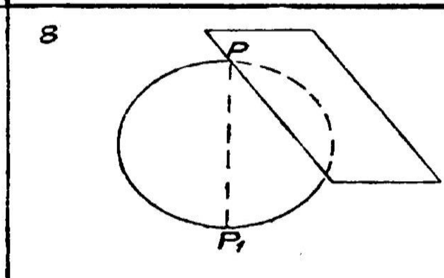
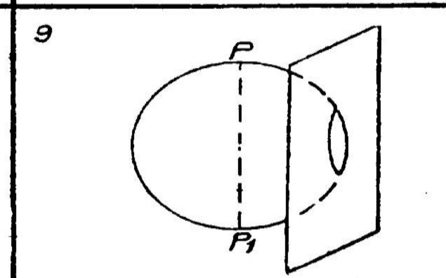
- **等积投影** $\boxed{a\cdot b=1}$

  用途：行政区划图，经济图……

- **任意投影** $\boxed{a\neq b 且 a\cdot b\neq 1}$

  用途：要求不太严格的地图，普通地图，交通图……

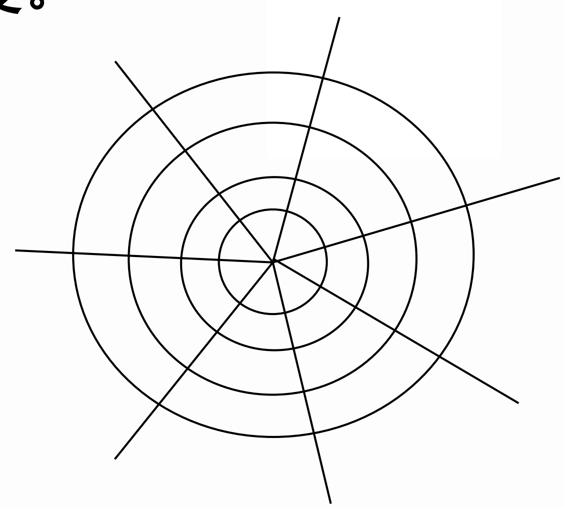
（三） 地图投影的分类

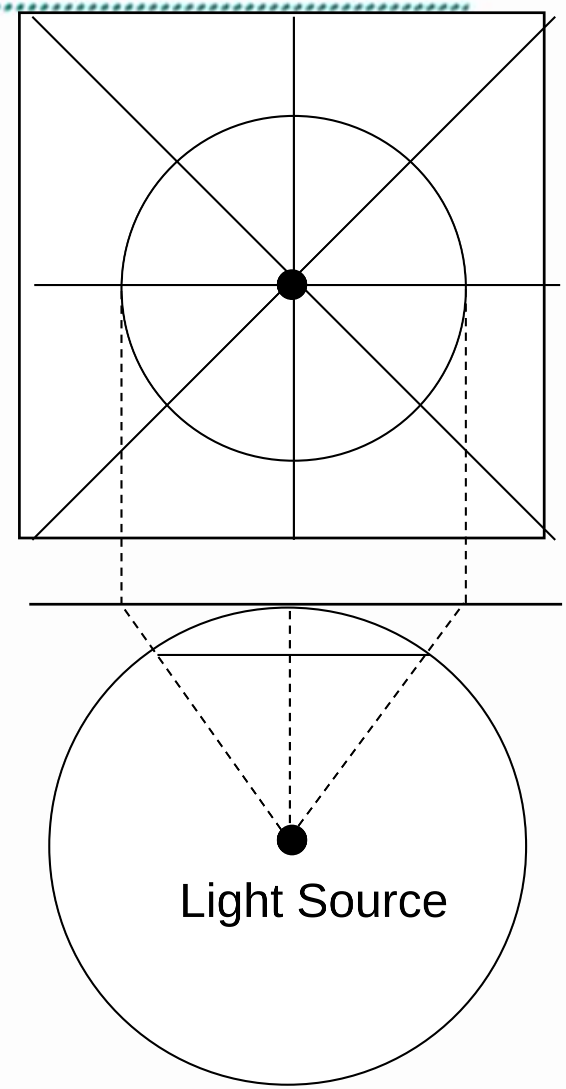
	正 轴	斜 轴	横 轴
圆锥			
圆柱			
方位			

（三） 地图投影的分类（按经纬网）

1）方位投影

取一平面与椭球极点相切，将极点附近区域投影在该平面上。纬线投影后为以极点为圆心的同心圆，而经线则为它的向径，且经线交角不变。

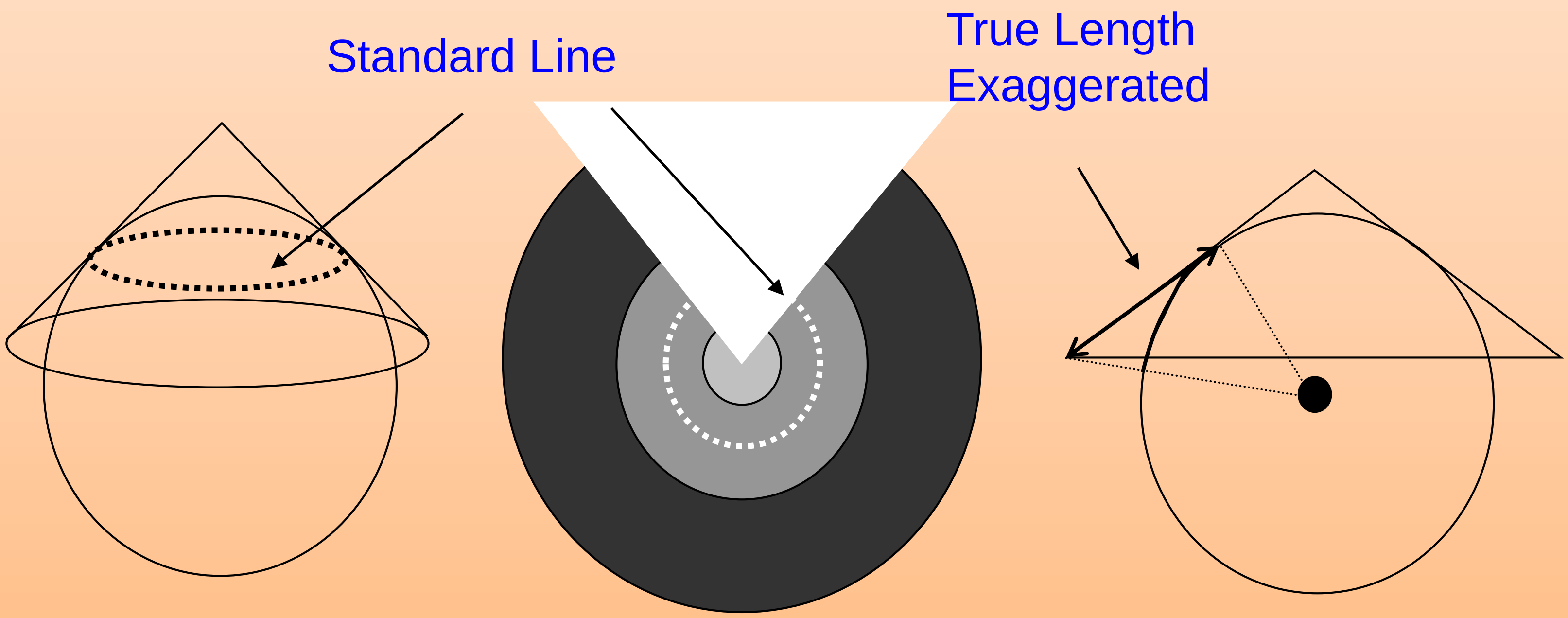




（三） 地图投影的分类（按经纬网）

2）圆锥投影： 取一圆锥面与椭球某条纬线相切，将纬圈附近的区域投影于圆锥面上，再将圆锥面沿某条经线剪开成平面。

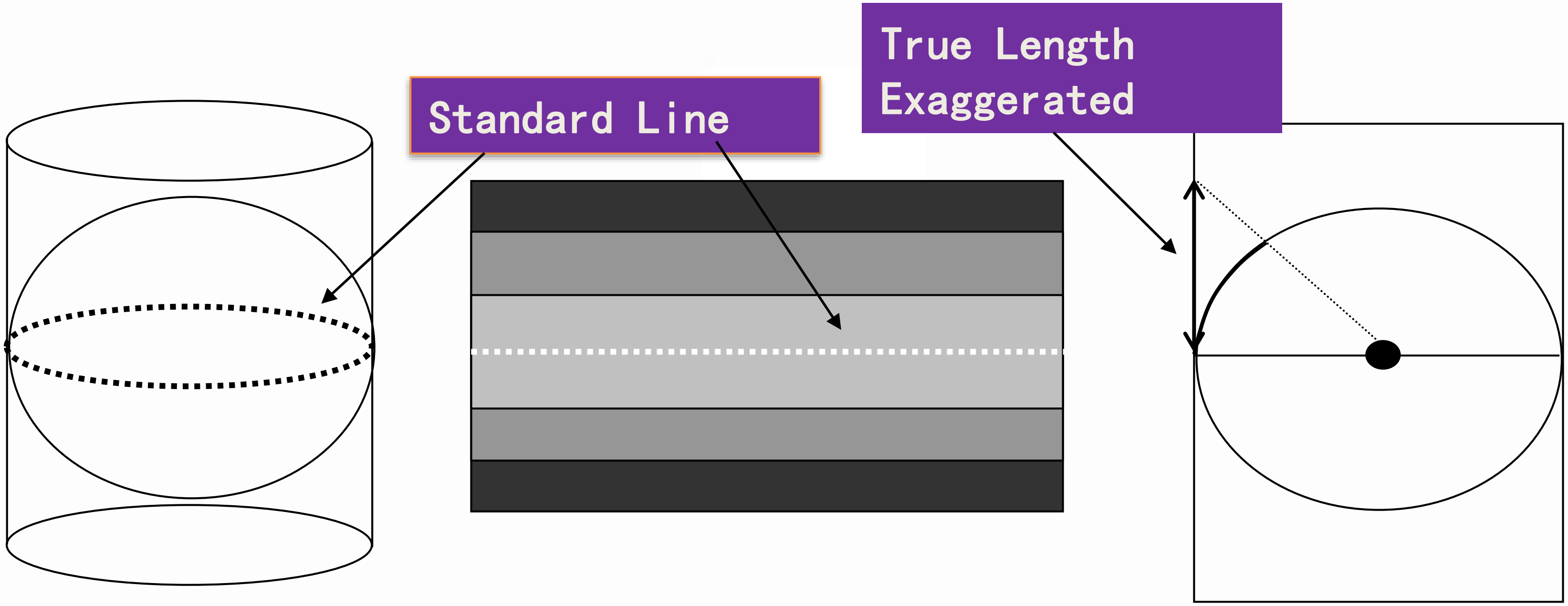
$$\rho = f(B), \delta = \beta l$$



（三） 地图投影的分类（按经纬网）

3）圆柱(或椭圆柱)投影

取圆柱(或椭圆柱)与椭球赤道相切，将赤道附近区域投影到圆柱面(或椭圆柱面)上，然后将圆柱或椭圆柱展开成平面。



（三） 地图投影的分类（按相对位置）

3. 按投影面和原面的相对位置关系分类

1) 正轴投影：圆锥轴(圆柱轴)与地球自转轴相重合的投影，称正轴圆锥投影或正轴圆柱投影。

2) 斜轴投影：投影面与原面相切于除极点和赤道以外的某一位置所得的投影。

3) 横轴投影：投影面的轴线与地球自转轴相垂直，且与某一条经线相切所得的投影。比如横轴椭圆柱投影等。

除此之外，投影面还可以与地球椭球相割于两条标准线，这就是所谓**割圆锥，割圆柱**投影等。

大地测量对地图投影的要求

1、应采用等角投影：等角投影的优点：

1）可以免除大量角度观测元素的投影归算工作；

2）可以在有限的范围内使地图上图形与椭球上原形保持相似。

2、变形改正：投影带来的长度和面积变形应不大，并能用简单的公式计算变形改正数；

3、分带投影：为了使变形量控制在一定范围内，采用分带投影，各带可联成一整体，并能相互换算。

高斯平面直角坐标系

地图数学投影

- 地图数学投影

$$\begin{cases} x = F_1(L,B) \\ y = F_2(L,B) \end{cases}$$

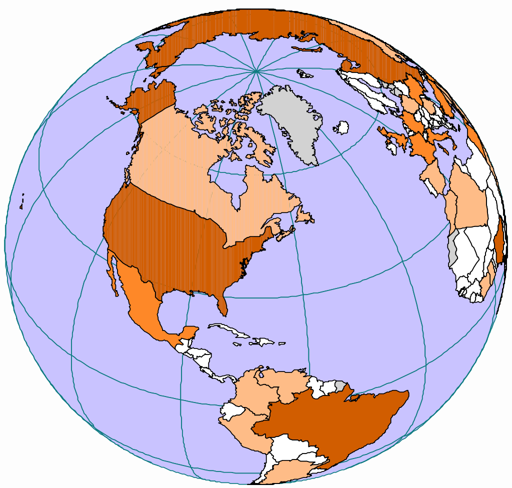
高斯-克吕格投影

（等角、横轴、切椭圆柱）

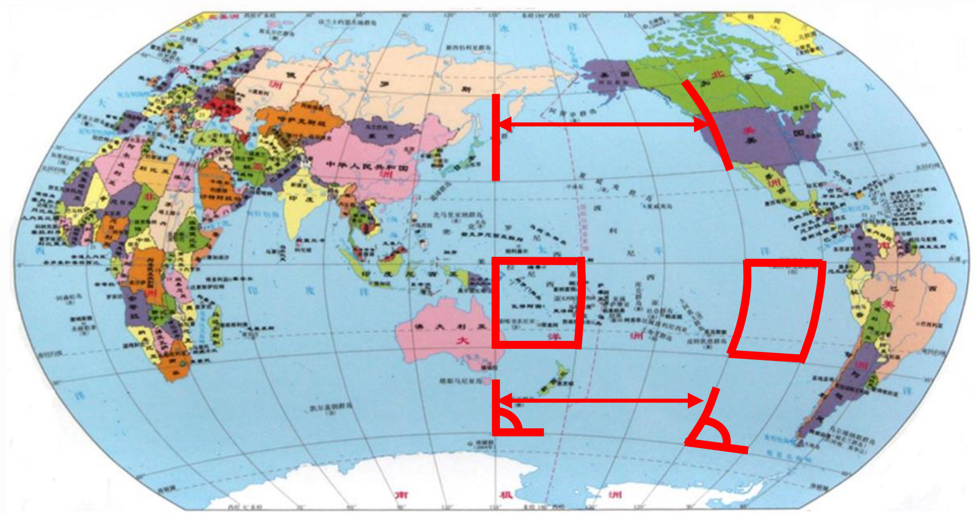
- 地图投影的变形

长度变形　　方向变形

角度变形　　面积变形



椭球面



平面

高斯（C. F. Gauss）

高斯是德国数学家，也是科学家，他和牛顿、阿基米德，被誉为有史以来的三大数学家。高斯是近代数学奠基者之一，在历史上影响之大，可以和阿基米德、牛顿、欧拉并列，有“数学王子”之称。

高斯，C.F.

高斯最出名的故事就是他十岁时，小学老师出了一道算术难题：“计算1＋2＋3…＋100＝？”。这可难为初学算术的学生，但是高斯却马上将答案解了出来，他利用算术级数（等差级数）的对称性，然后就像求得一般算术级数和的过程一样，把数目一对对的凑在一起：1＋100，2＋ 99，3＋98，……49＋52，50＋51 而这样的组合有50组，所以答案很快的就可以求出是：101×50＝5050。

高斯–克吕格投影

– 高斯 1820~1830 汉诺威成果处理
– 史赖伯 1866 汉诺威大地测量投影方法的理论
– 克吕格 1912 地球椭球向平面的投影
– 巴乌盖尔 1919 三度带投影、平移500km
– 赫里斯托夫 1943 旋转椭球上的高斯-克吕格坐标、1955 克拉索夫斯基椭球上的高斯坐标和地理坐标

高斯-克吕格投影

从数学规则上讲，高斯投影就是为了确定投影方程的表现形式。

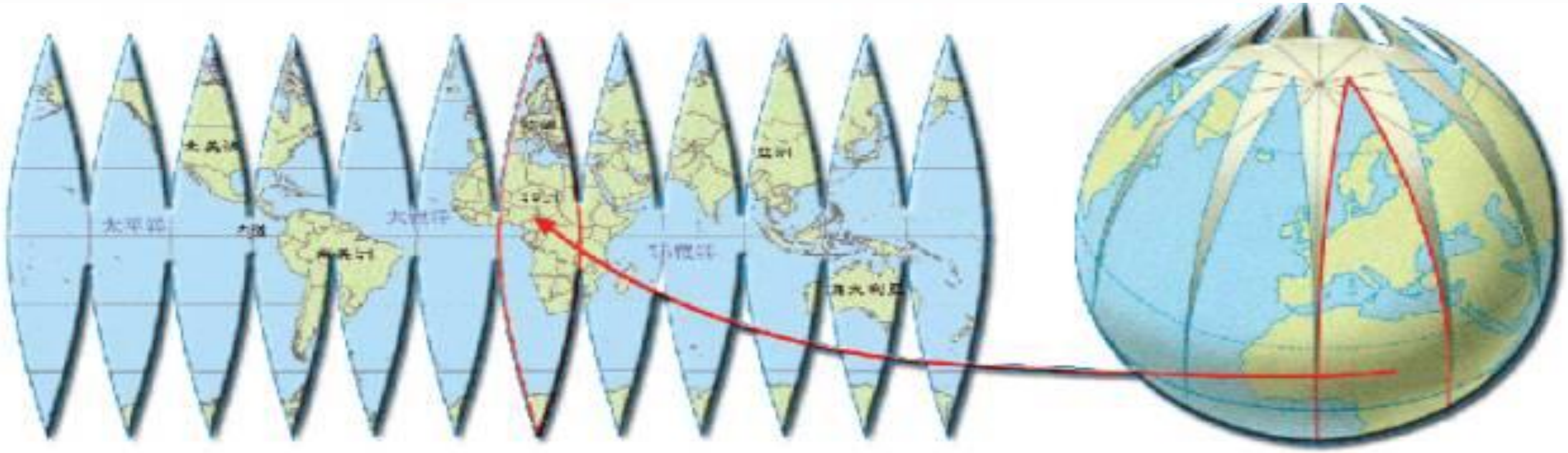
正算

$$\begin{cases} x = F_1(B, L) \\ y = F_2(B, L) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = f_1(q, l) \\ y = f_2(q, l) \end{cases}$$

反算

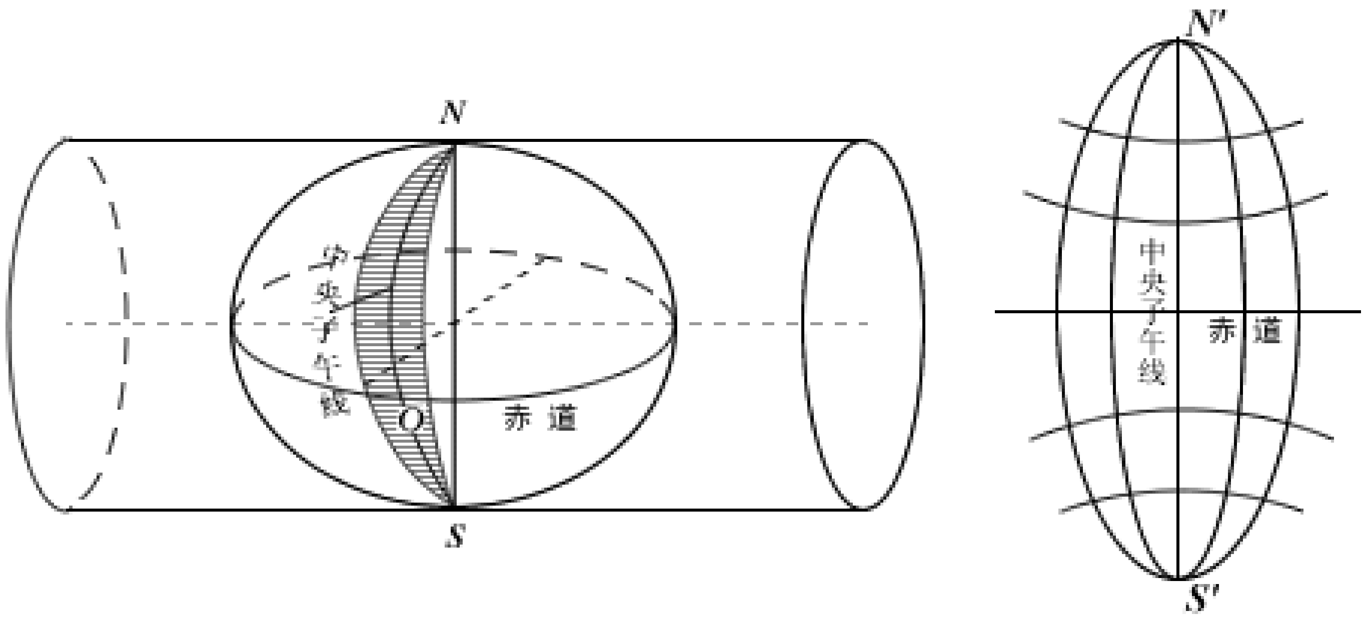
$$\begin{cases} B = F_1^{'}(x, y) \\ L = F_2^{'}(x, y) \end{cases} \qquad \begin{cases} q = f_1^{'}(x, y) \\ l = f_2^{'}(x, y) \end{cases}$$

高斯-克吕格投影



高斯-克吕格投影

从几何概念上讲，高斯投影是一种等角横切椭圆柱投影。



高斯-克吕格投影

大地测量对地图投影的要求：

（1）采用等角投影(又称为正形投影），确保原形相似；

（2）长度和面积变形不大，方便计算变形改正；

（3）既能方便按分带进行计算，又能按高精度的、简单的、同样的计算公式把各区域联成整体 。

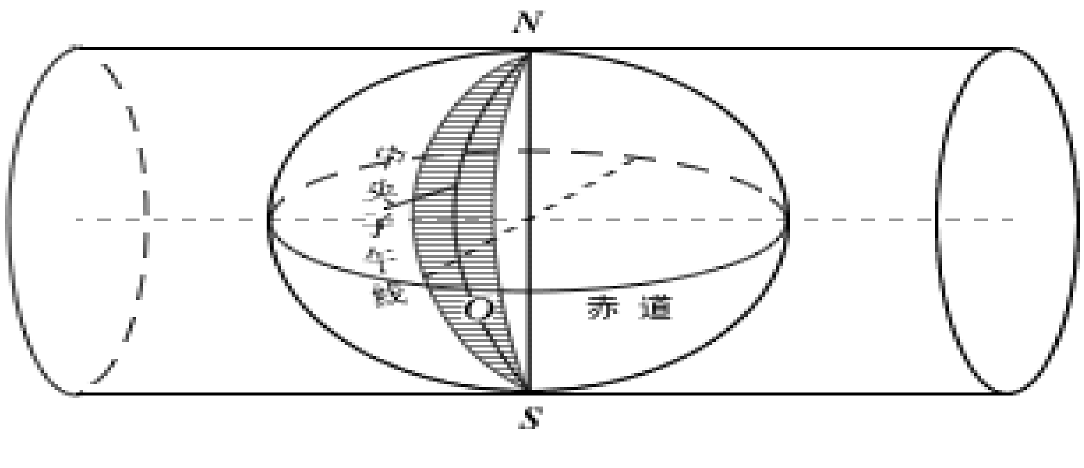
高斯-克吕格投影

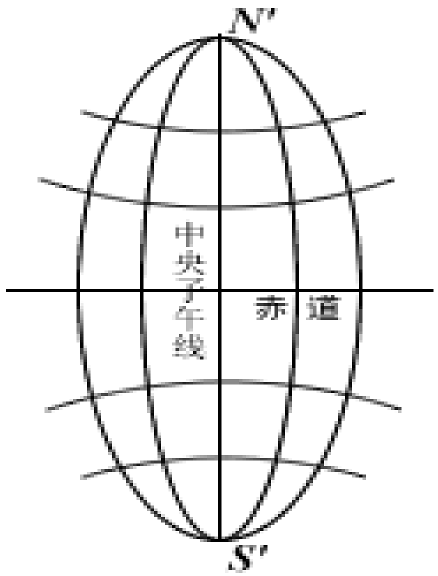
高斯一克吕格投影又称等角横切椭圆柱投影。是德国数学家、物理学家、大地测量学家高斯于十九世纪二十年代提出的，后经德国大地测量学家克吕格于1912年对投影公式加以补充和完善。通常简称高斯投影，我国1952年正式采用高斯投影。

思想：将一条中央子午线长度投影规定为固定比例尺度的椭球正形投影。

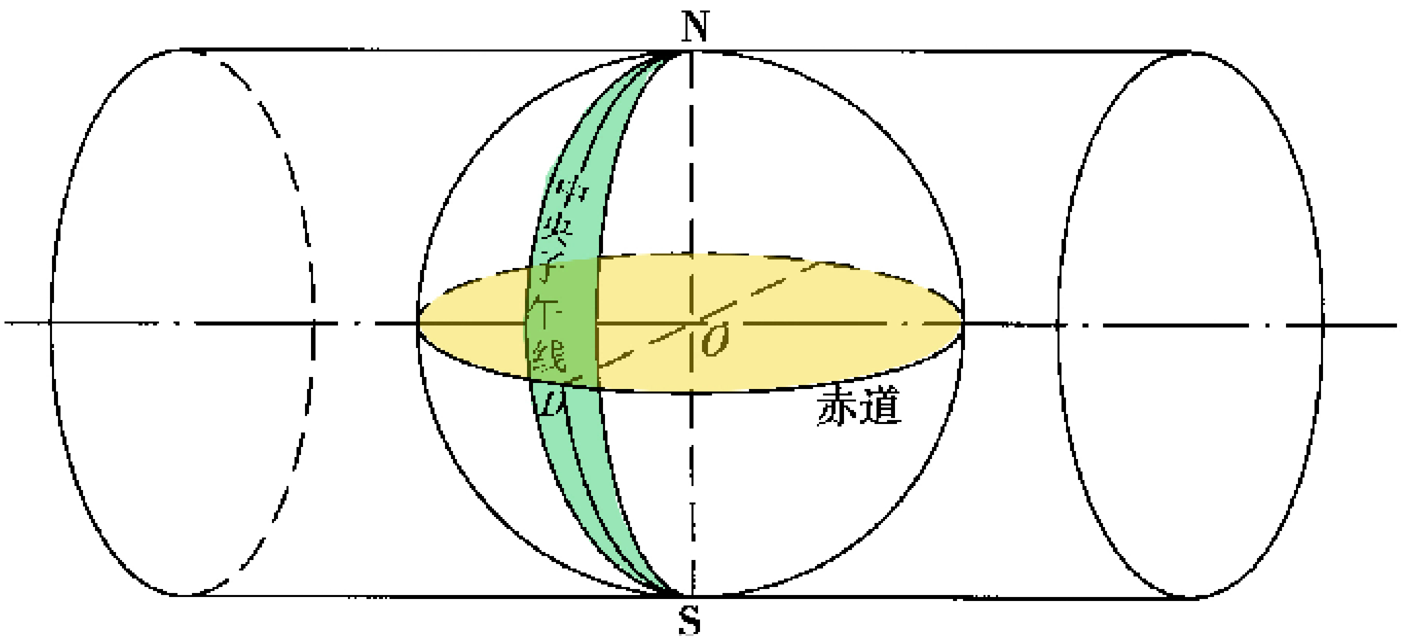
高斯-克吕格投影

高斯投影描述：假设有一个椭圆柱面横套在地球椭球体外面，并与某一条子午线(此子午线称为**中央子午线**或轴子午线)相切，椭圆柱的中心轴通过椭球体中心，然后用一定投影方法，将**中央子午线两侧各一定经差范围内的地区**投影到椭圆柱面上，再将此柱面展开即成为投影面 。



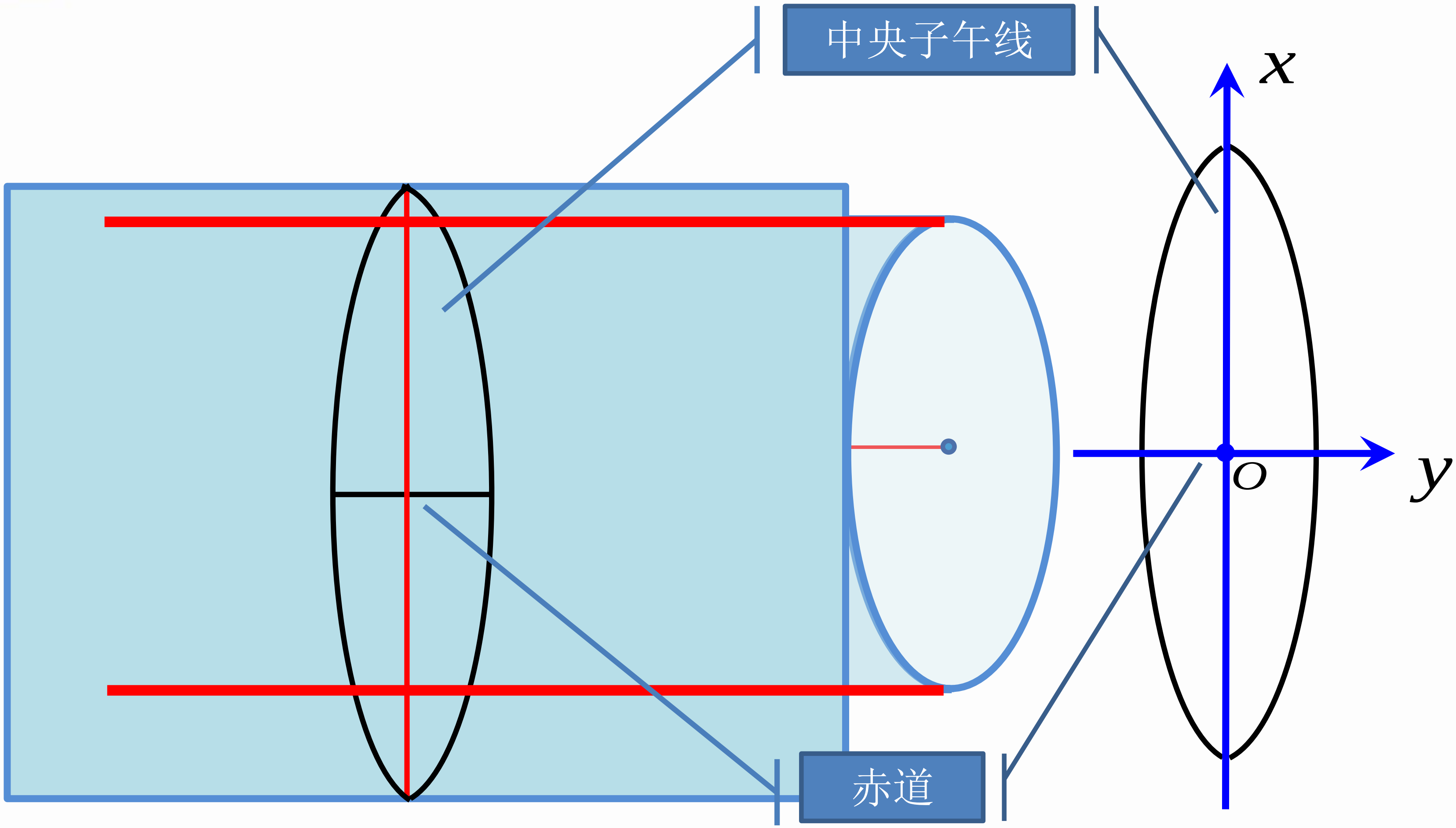


高斯-克吕格投影



高斯投影：横轴等角切椭圆柱投影

高斯-克吕格投影几何描述



许多国家都采用高斯投影，如英国、美国、德国、俄罗斯、希腊等

我国于1952年正式采用。

高斯-克吕格投影几何描述

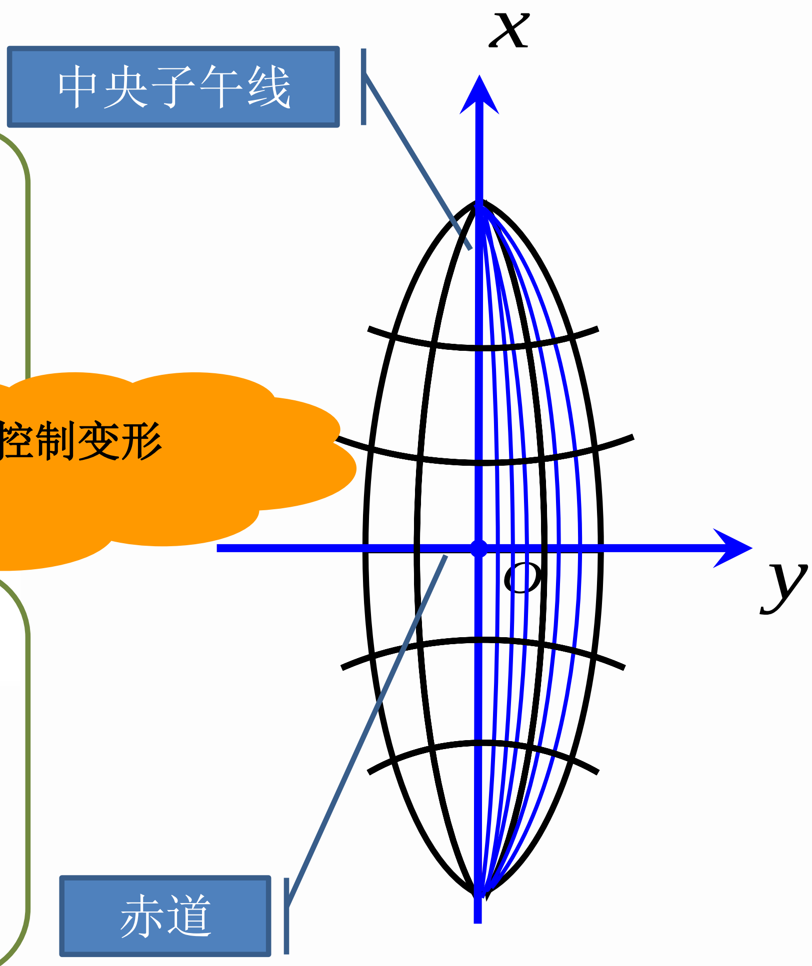
高斯平面直角坐标系

- **原点：** 中央子午线和赤道的交点
- **纵轴：** 中央子午线的投影
- **横轴：** 赤道的投影

如何有效控制变形呢？？？

高斯投影的特点

- 中央子午线投影后为直线，且长度不变
- 赤道线投影后为直线，但有长度变形。
- 经线和纬线投影后保持正交；
- 子午线距中央子午线越远，变形越大。



高斯-克吕格投影（分带）

1、为什么要分带?

为了有效地控制长度变形。

2、如何分带?

将椭球面**沿子午线**划分成若干个**经差相等**的狭窄地带各带，**分别投影**。

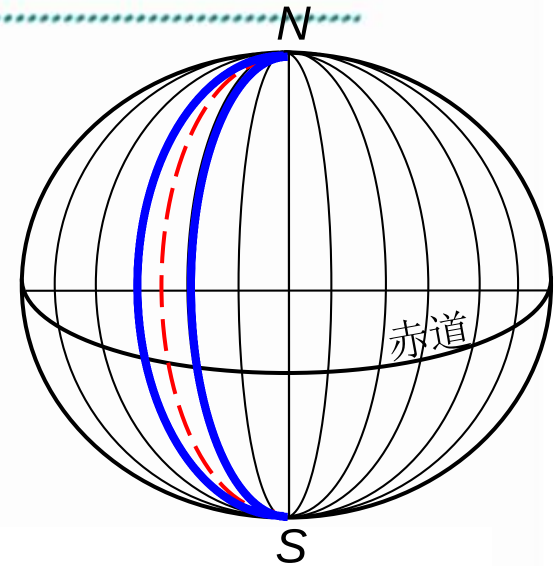
3、分带的方法

6°带、3°带、任意带。

高斯-克吕格投影（分带划分）

投影带

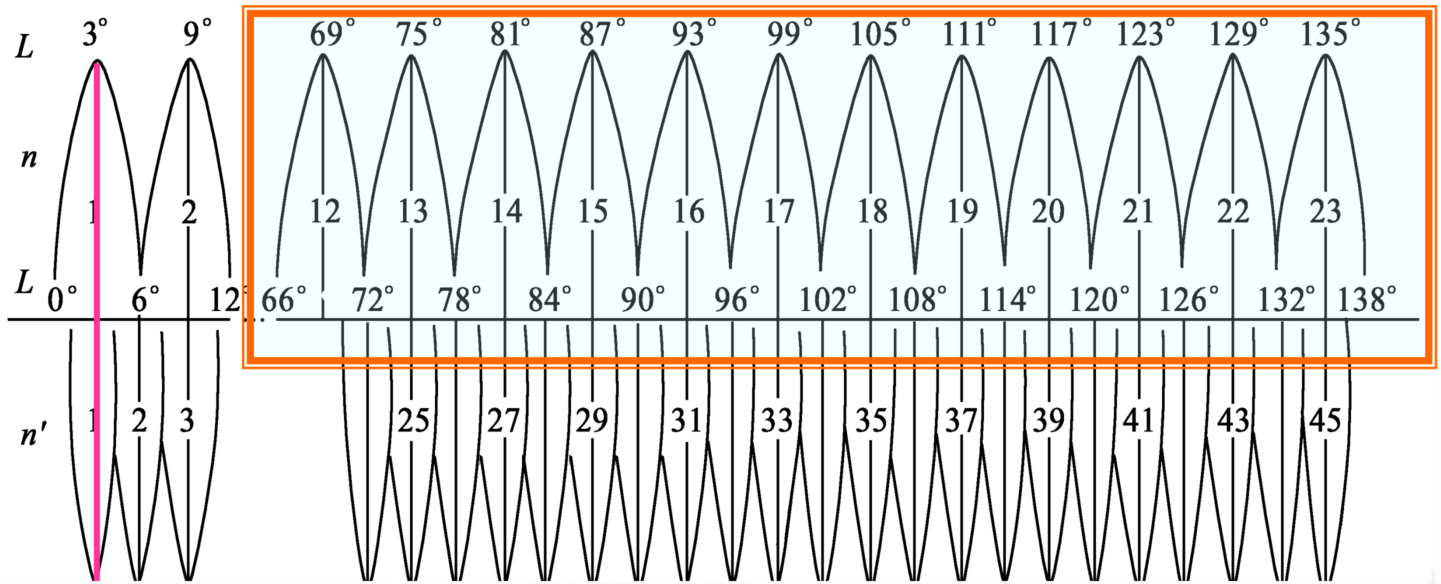
将投影区域限定在中央子午线两旁的狭窄范围内。



我国规定按经差6°和3°进行投影分带。

6° 分带

3° 分带



高斯-克吕格投影（分带）

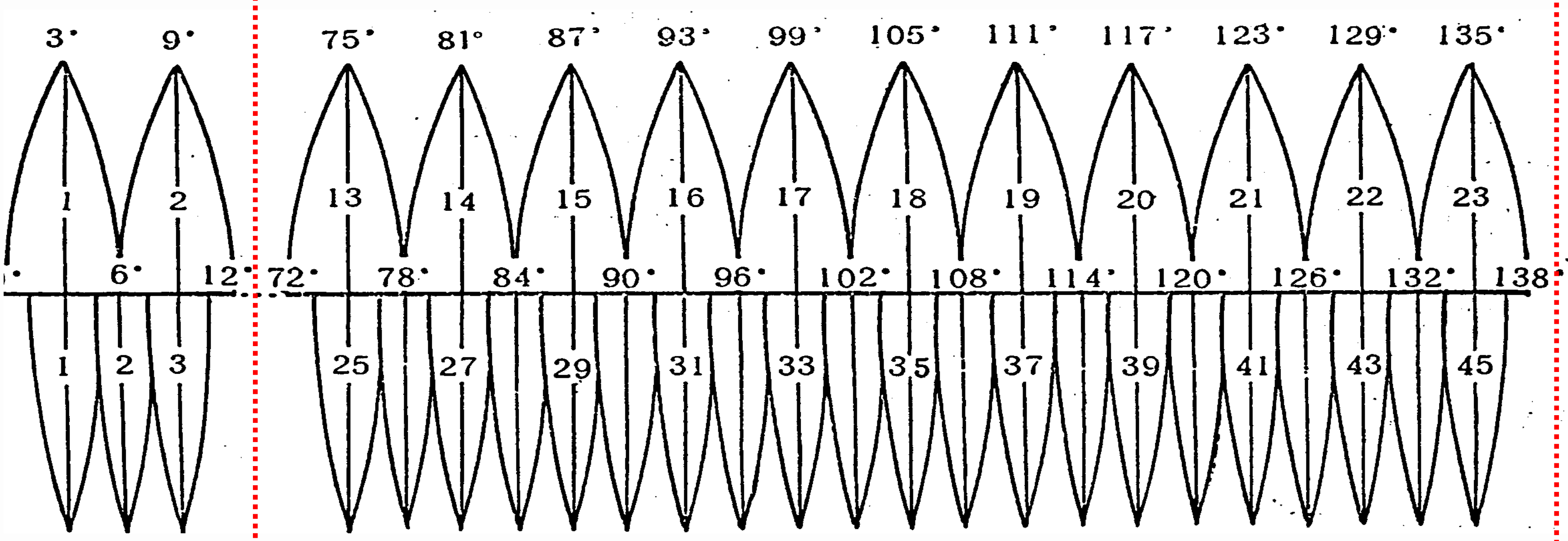
高斯投影分带：我国规定按经差6°和3°进行投影分带，大比例尺测图和工程测量采用3°带投影；特殊情况也可采用1.5°或任意带，但需同国家6°或3°相联系。

高斯投影分带原则：

（1）限制长度变形使其不大于测图误差；

（2）带数不应过多以减少换带计算工作。

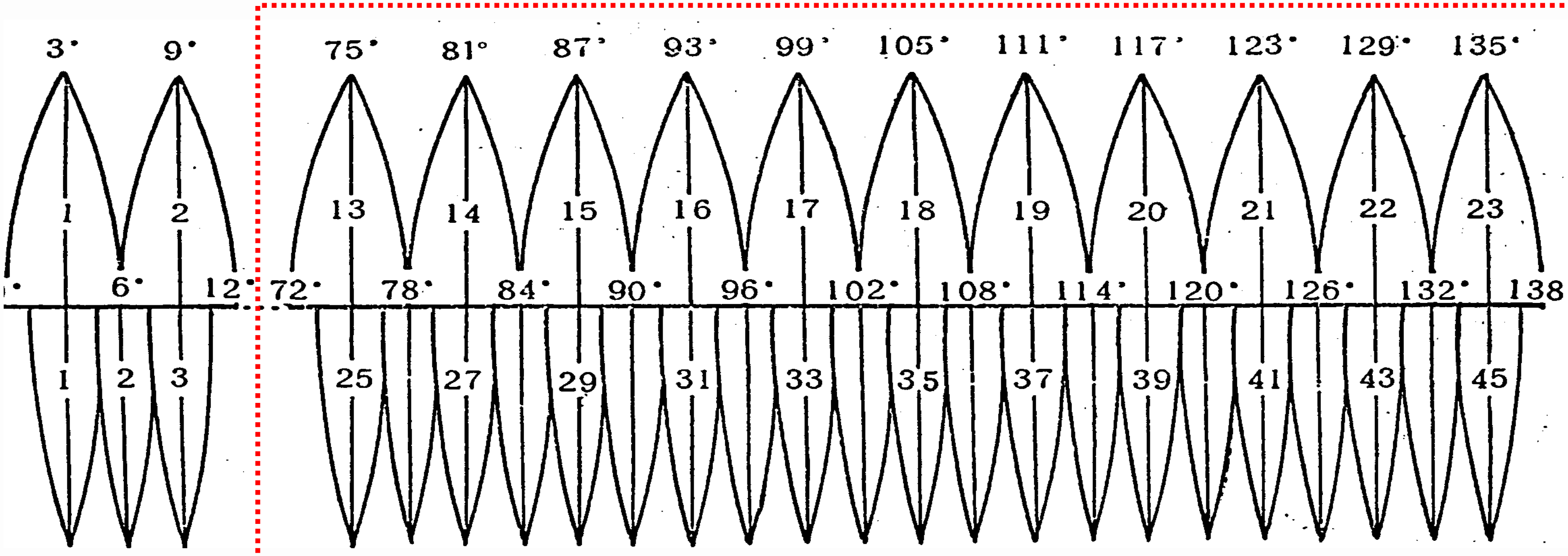
东：东经135º2′ （乌苏里江与黑龙江汇合处）
西：东经73º48′ （新疆帕米尔高原乌孜别里山口附近）
南：北纬 3º52′ （南海南沙群岛的曾母暗沙）
北：北纬53º10′ （黑龙江漠河镇以北的黑龙江江心）



<u>高斯投影6°带：</u>自0°子午线起每隔6°自西向东分带。

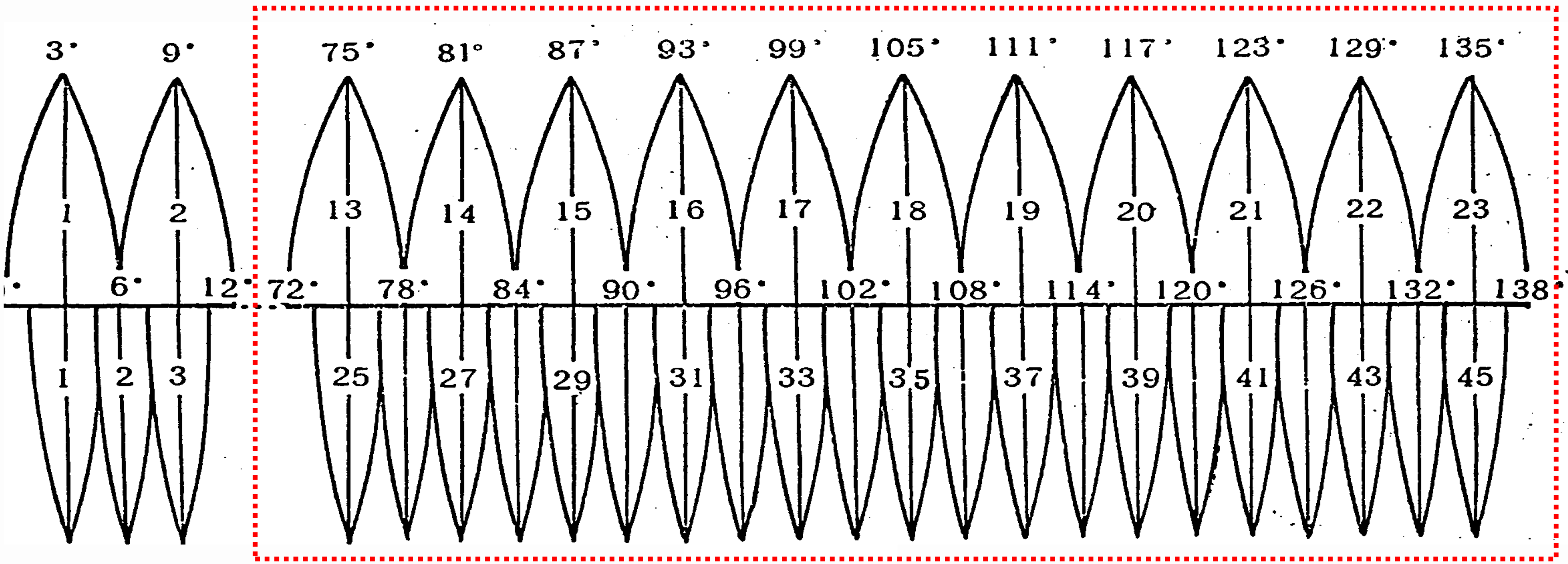
13至23带，共计11带。

东：东经135º2′ （乌苏里江与黑龙江汇合处）
西：东经73º48′ （新疆帕米尔高原乌孜别里山口附近）
南：北纬 3º52′ （南海南沙群岛的曾母暗沙）
北：北纬53º10′ （黑龙江漠河镇以北的黑龙江江心）



高斯投影3°带：在6°带的基础上形成的。它的中央子午线一部分带（单数带）与6°带中央子午线重合，另一部分带（偶数带）与6°带分界子午线重合。25至45带，共计21带。

高斯-克吕格投影（分带）



已知带号计算6°带中央子午线经度

$$\boxed{L_0 = 6^\circ \cdot n - 3^\circ}$$

已知6°带中央子午线的经度反算带号

$$\boxed{n = (L_0 + 3^\circ)/6^\circ}$$

计算任意经度所在投影带的带号公式

$n = L/6$的整数商+1(有余数时)

已知带号计算3°带中央子午线经度

$$\boxed{L_0 = 3^\circ \cdot n'}$$

已知3°带中央子午线的经度反算带号

$$\boxed{n' = L_0 / 3^\circ}$$

计算任意经度所在投影带的带号公式

$n = (L - 1.5)/3$的整数商+1(有余数时)

高斯平面直角坐标系

在高斯投影面上，中央子午线和赤道的投影都是直线，并且以中央子午线和赤道的交点O作为坐标原点，以中央子午线的投影为纵坐标轴，以赤道的投影为横坐标轴，这样便形成了高斯平面直角坐标系。

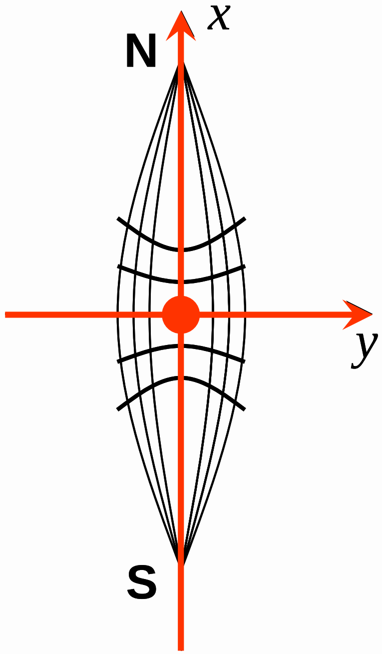
在我国x坐标都是正的，y坐标的最大值（在赤道上）约为330km。为了避免出现负的横坐标，可在横坐标上加上500km。

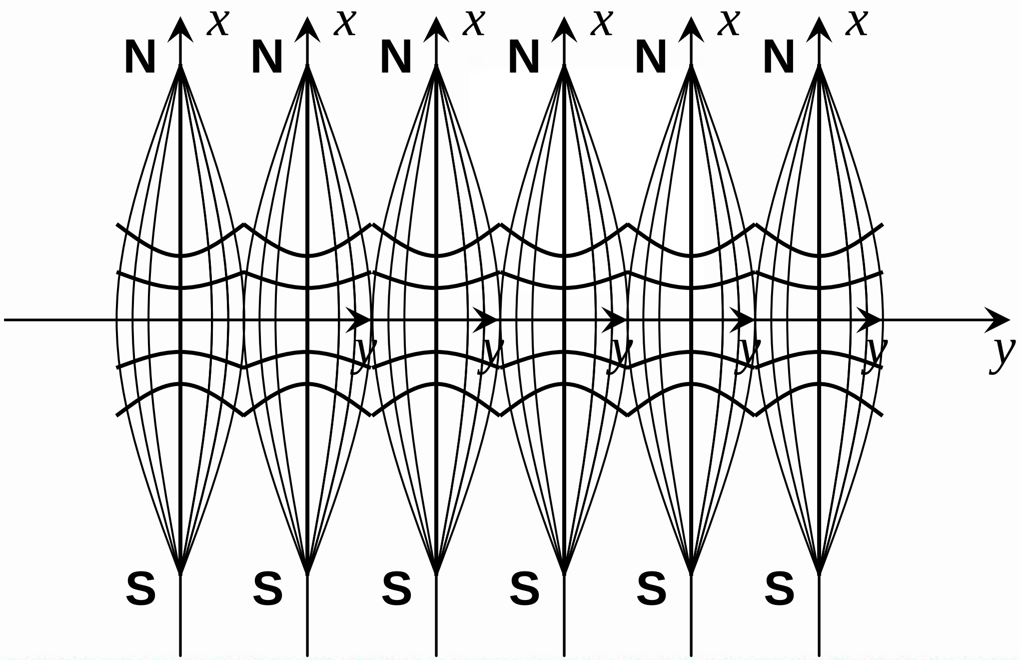
高斯平面直角坐标系

坐标系原点:中央子午线和赤道的交点。

纵坐标轴x:中央子午线的投影，向北为正。

横坐标轴y:赤道的投影，向东为正。





高斯平面直角坐标系

高斯投影中，除了中央子午线外，其他任何线段投影后都有长度变形，离中央子午线越远变形越大，为控制投影后的长度变形，采用分带投影的方法。

投影带：以中央子午线为轴，两边对称划出一定区域作为投影范围；

分带原则

（1）限制长度变形使其不大于测图误差；

（2）带数不应过多以减少换带计算工作。

常用分带：3°分带、6°分带，有些测图还采用1.5°分带。

高斯平面直角坐标系

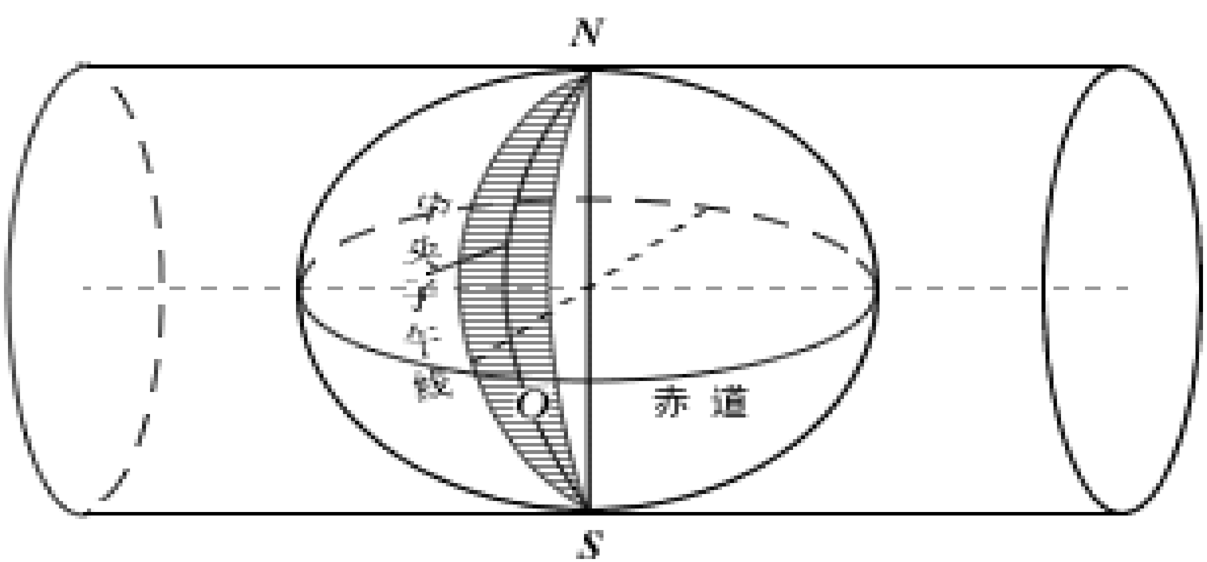
国家通用坐标？

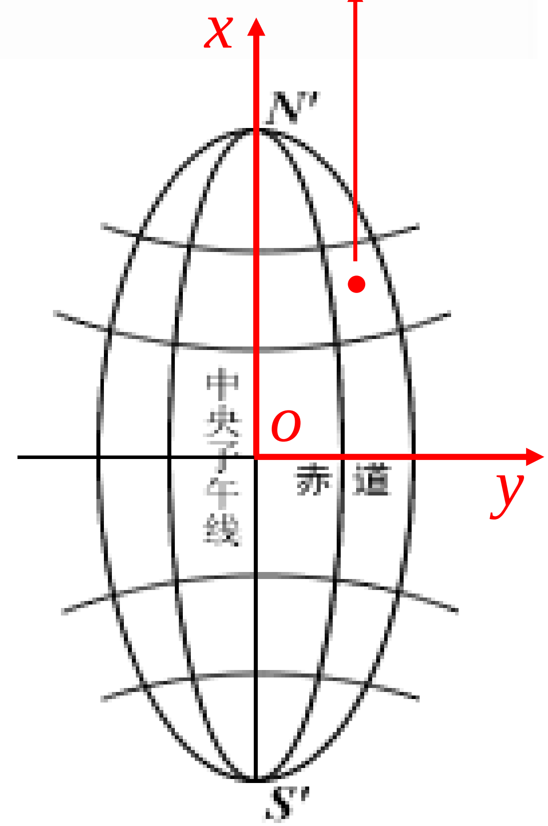
x轴： 中央子午线的投影

y轴： 赤道的投影

原点： 中央子午线与赤道的交点

自然坐标（x，y）



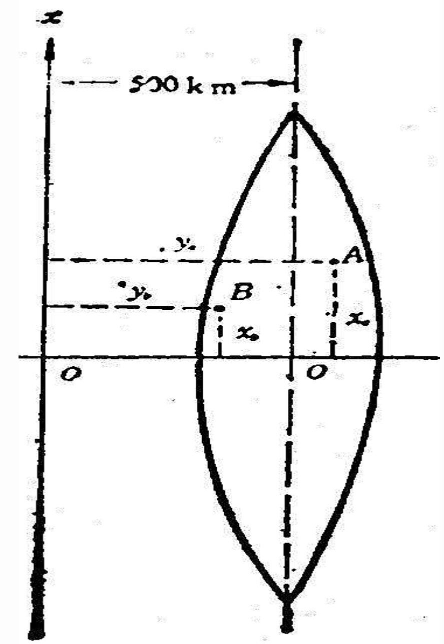


高斯平面直角坐标系（国家统一坐标）

理论上中央子午线的投影是 x 轴，赤道的投影是 y 轴，其交点是坐标原点。x 坐标是点至赤道的距离；y 坐标是点至中央子午线的距离，有正有负。**为了避免 y 坐标出现负值**，其名义坐标加上 500 公里。为了区分不同投影带中的点，在点的Y坐标值上加带号N。

因此，点的横坐标统一表示为：

$$y = N\times1000000+500000+y$$



1919年德国学者巴乌盖尔建议采用3^{0}带，将坐标纵轴西移500 km，并在纵坐标前冠以带号。

高斯平面直角坐标系

■ 通用坐标与自然坐标的关系

$$\begin{cases} X = x \\ Y = 带号 \times 10^6 + 5 \times 10^5 + y(单位:m) \end{cases}$$

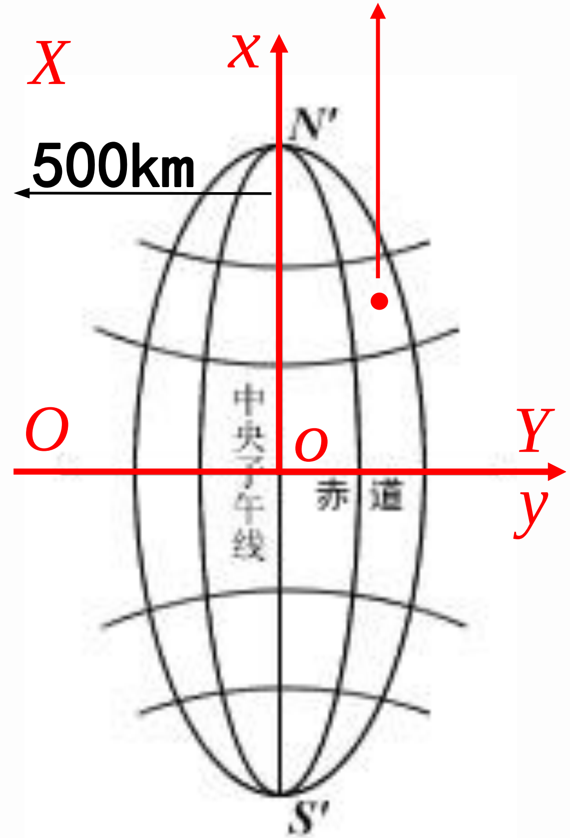
■ 算例：6度带19带的点

$$A:\begin{cases} x = 4\ \ 485\ \ 076.81m \\ y = 2\ \ 578.86m \end{cases}$$

$$B:\begin{cases} X = \ 4\ \ 485\ \ 076.81m \\ Y = 19\ \ 502\ \ 578.86m \end{cases}$$

通用坐标（X，Y）

自然坐标（x，y）



高斯平面直角坐标系

■ 通用坐标与自然坐标的关系

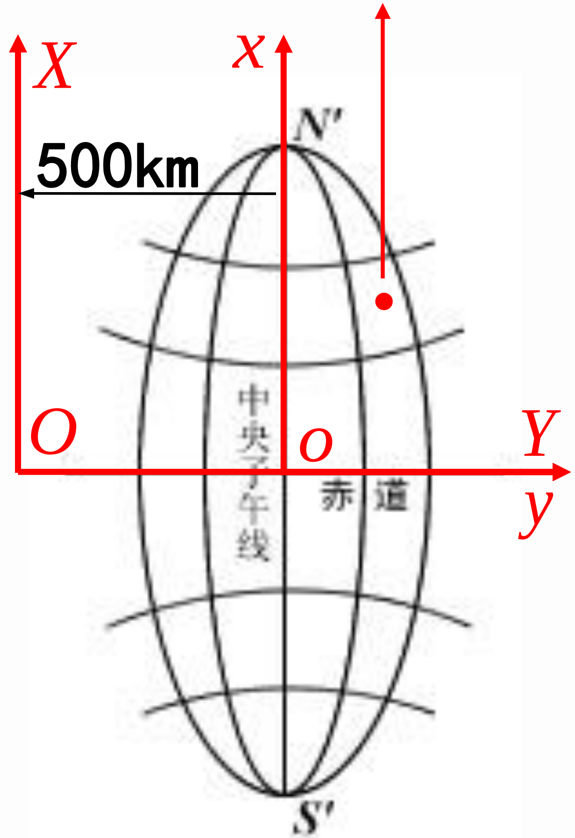
$$\begin{cases} X = x \\ Y = 带号 \times 10^6 + 5 \times 10^5 + y(单位:m) \end{cases}$$

■ 算例：6度带19带的点

$$B:\begin{cases} x = 4\ \ 485\ \ 076.81m \\ y = -2\ \ 578.86m \end{cases}$$

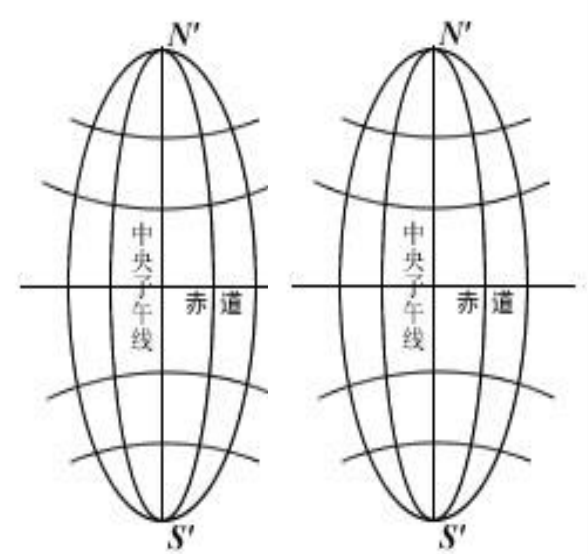
$$B:\begin{cases} X = \ \ 4\ \ 485\ \ 076.81m \\ Y = 19\ \ 497\ \ 421.14m \end{cases}$$

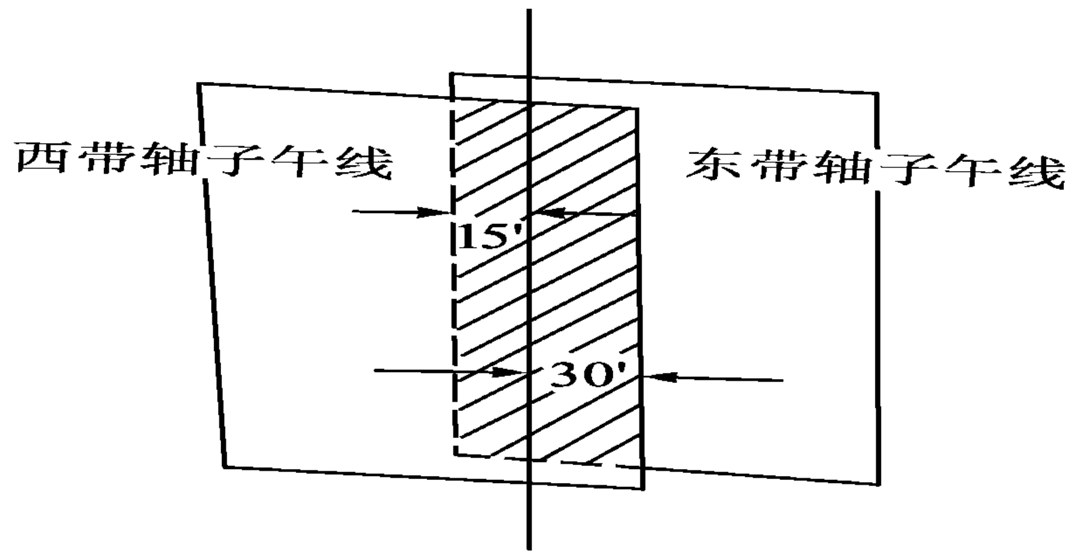
通用坐标（X，Y）
自然坐标（x，y）



高斯投影带的重叠

- 分带存在的问题？边界子午线两侧的控制点与地形图位于不同的投影带内，使得跨带地形图不能正确拼接使用，采用带重叠（6°带向东加宽30′，向西加宽15′或7.5′）的方法解决此问题。





高斯投影带的重叠

■ **原因**

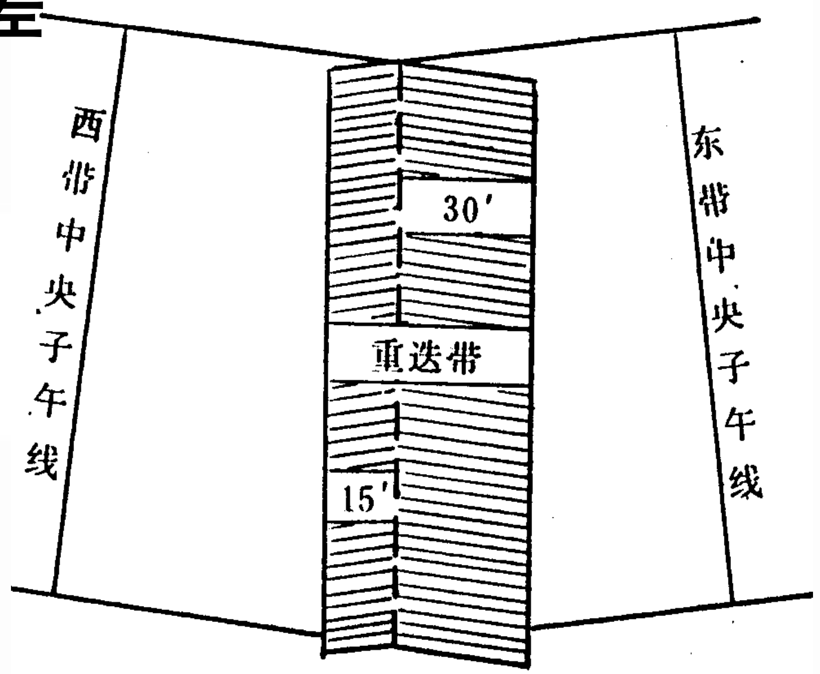
不便于跨带三角锁网平差

不利于图幅拼接

■ **解决办法**

西带向东带重迭30′

东带向西带重迭15′



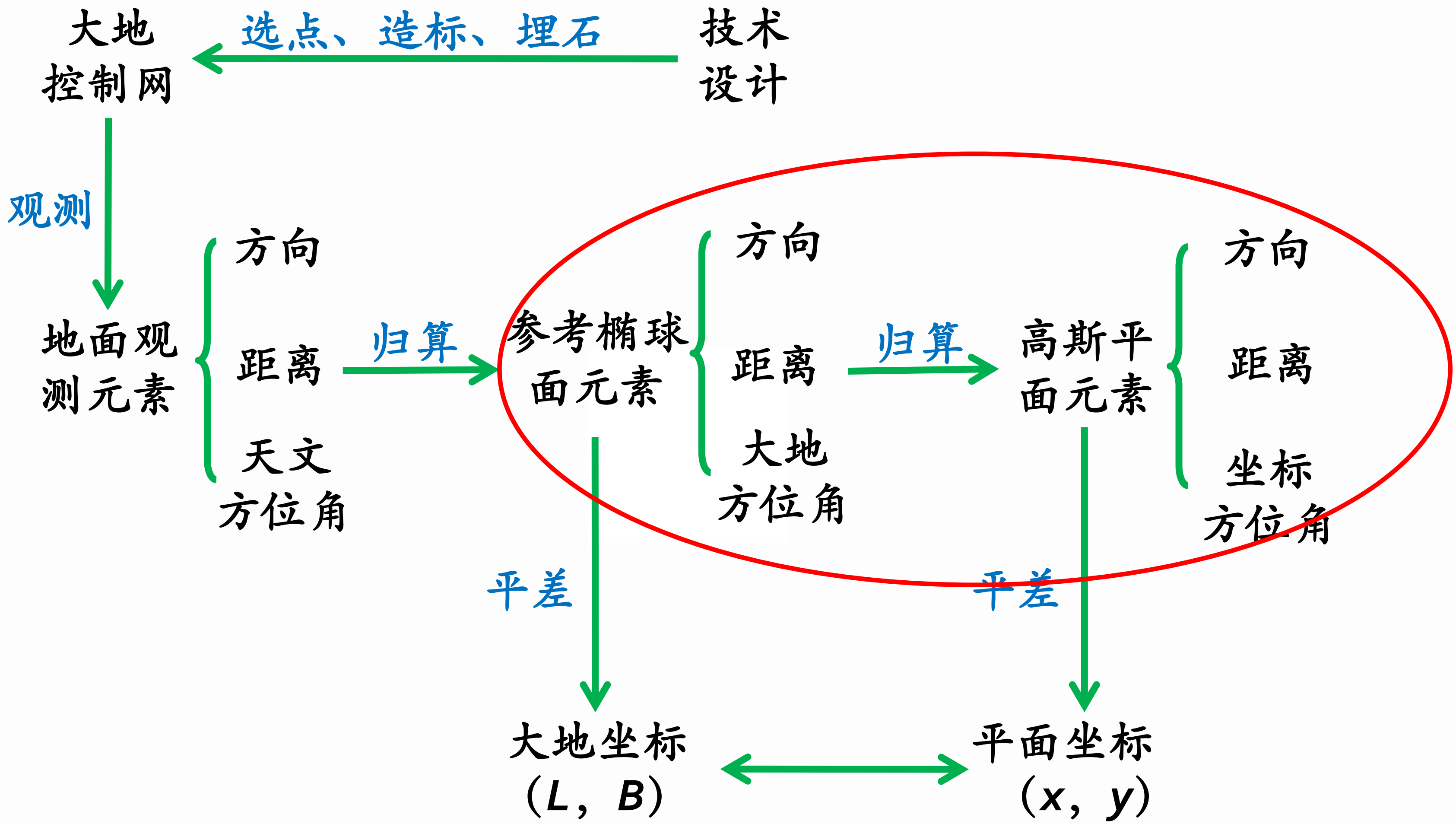
高斯投影的优点

高斯投影是正形投影，保证了**投影角度的不变性**，**图形的相似性**以及在某点各方向上的长度比的同一性。

由于采用了同样法则的分带投影，这既限制了长度变形，又保证了在不同投影带中采用相同的简便公式和数表进行由于变形引起的各项改正的计算，并且带与带间的互相换算也能用相同的公式和方法进行。

椭球面元素化算到高斯投影面

大地测量数据处理流程

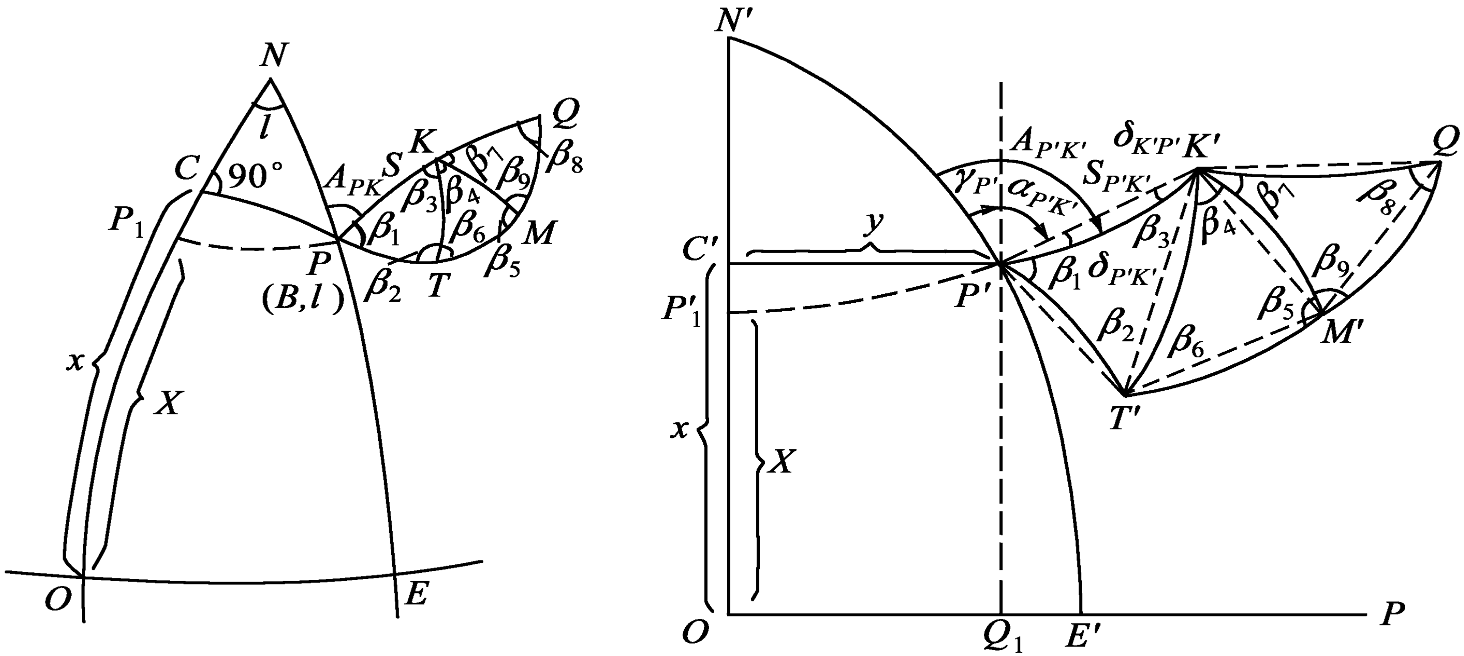

大地控制网
选点、造标、埋石
技术设计
观测
地面观测元素
方向
距离
天文方位角
归算
参考椭球面元素
方向
距离
大地方位角
归算
高斯平面元素
方向
距离
坐标方位角
平差
平差
大地坐标（L，B）
平面坐标（x，y）

大地测量数据处理流程

地面元素归算至椭球面后，为获得各点的高斯平面坐标可采用以下两种途径：

- 解算椭球面极三角形（大地主题解算）。
- 将椭球面元素归算到高斯平面上，然后解算平面三角形。

椭球面元素化算到高斯投影面



高斯投影计算的内容

1、**由椭球面上各点大地坐标（B，L）求解各点高斯平面坐标（x，y）：**先在椭球面上解算球面三角形，推算各边大地方位角，解算各点大地坐标，然后求解各点的高斯平面坐标。（**计算工作量大**）

2、**将椭球面上起算元素和观测元素归算至高斯投影平面**，然后解算平面三角形，推算各边坐标方位角，在平面上进行平差计算，求解各点的平面直角坐标。

高斯投影计算的内容

第二种方法的具体推算内容如下：

① 将起算点的大地坐标（B1，L1）换算为高斯平面坐标（x1，y1）——**高斯投影坐标计算**。

② 将起算边的大地方位角A12改换为**平面坐标方位角**T12；

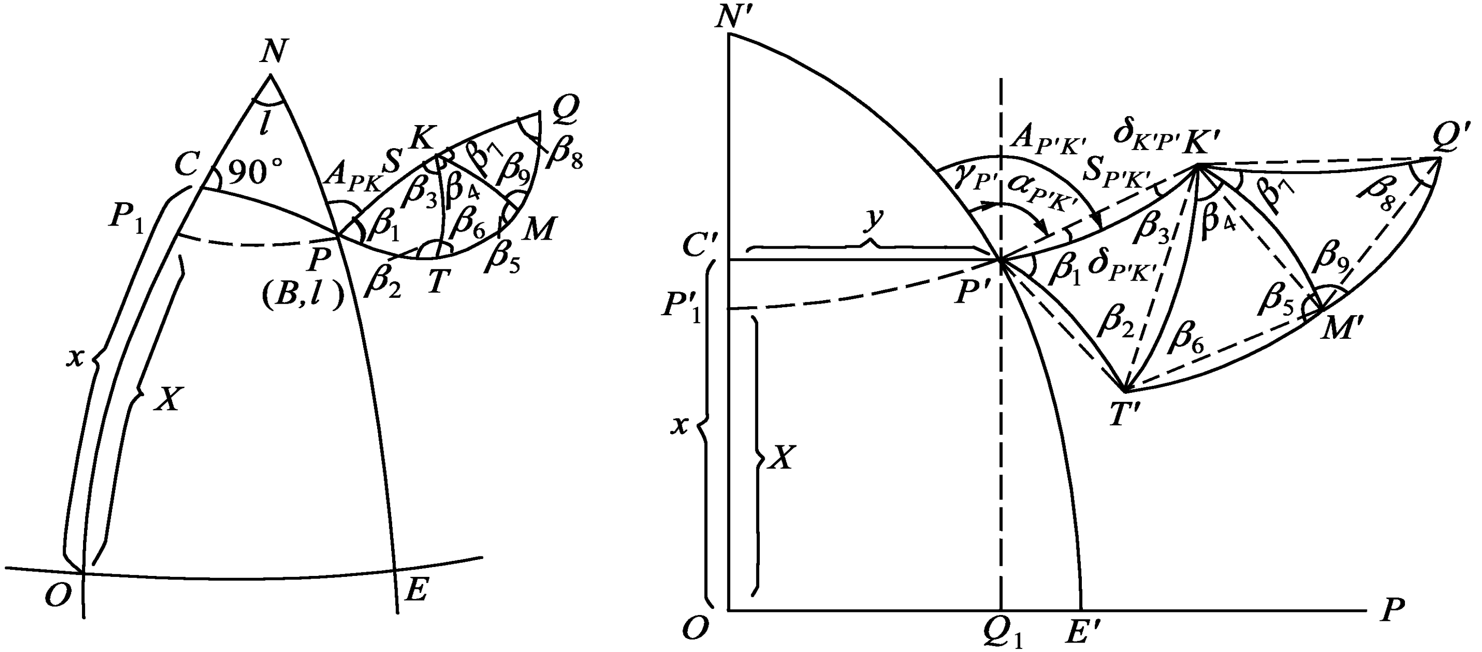
$T12=A12-\gamma+\delta 12$　　式中，γ为子午线收敛角，$\delta 12$为方向改正。

③ 将起算边的大地线长度S12归算为高斯平面上的**直线长度**D12：

$D12=S12+\triangle S$　　式中$\triangle S$为距离改正。

④ 对于椭球面上三角网的各观测方向和观测边长分别进行方向改正和距离改正，归算为高斯平面上的直线方向和直线距离。组成**平面三角网**，平差计算，推求各控制点的平面直角坐标。

椭球面元素化算到高斯投影面



椭球面元素化算到高斯投影面

▪椭球面三角系归算到高斯投影面的计算

1）将起始点P的大地坐标(L，B)归算为高斯平面直角坐标 x,y；为了检核还应进行反算，亦即根据 x,y反算B，L，这项工作统称为高斯投影坐标计算。

2）将椭球面上起算边大地方位角归算到高斯平面上相应边P’K’的坐标方位角，这是通过计算该点的子午线收敛角γ及方向改化δ实现的。

3） 将椭球面上各曲线三角形内角归算到高斯平面上的由相应直线组成的三角形内角。这是通过计算方向的曲率改化即方向改化来实现的。

椭球面元素化算到高斯投影面

■椭球面三角系归算到高斯投影面的计算

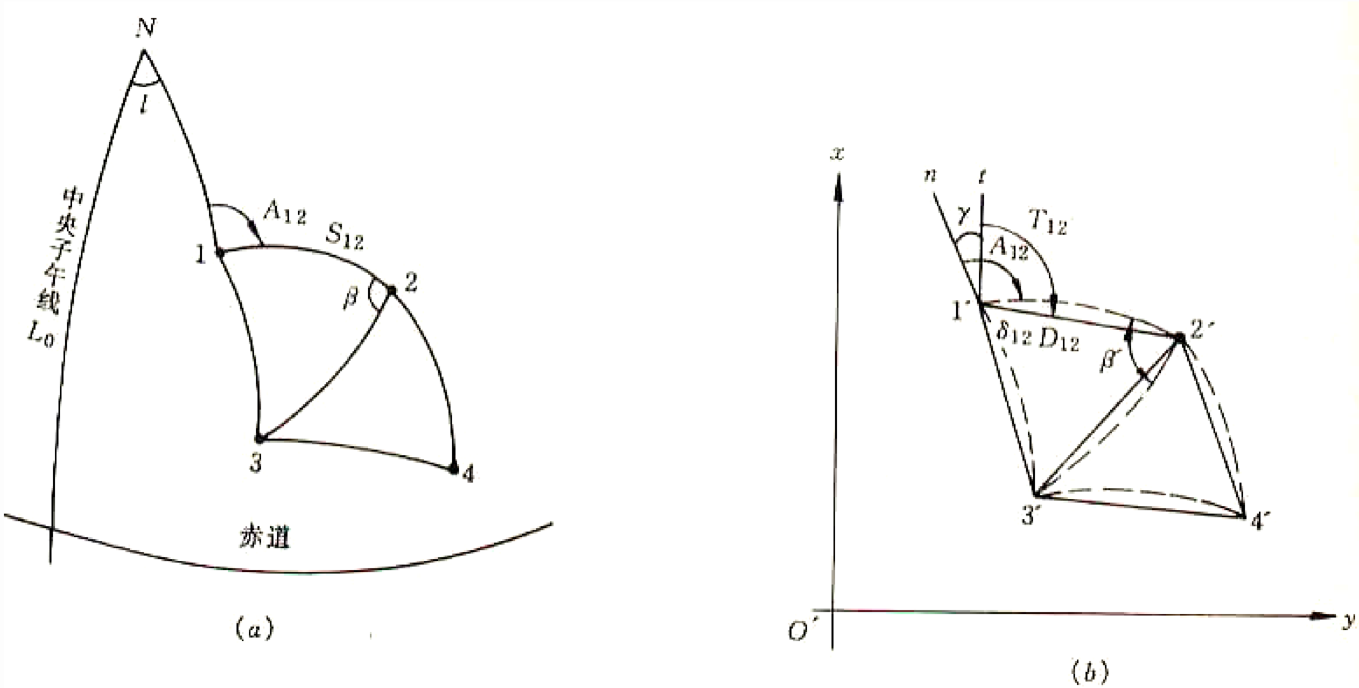
4）将椭球面上起算边PK的长度S归算到高斯平面上的直线长度s。这是通过计算距离改化Δs实现的。

因此将椭球面三角系归算到平面上，包括坐标、曲率改化、距离改化和子午线收敛角等项计算工作。

当控制网跨越两个相邻投影带，以及为将各投影带联成统一的整体，还需要进行平面坐标的邻带换算。

高斯投影计算的内容

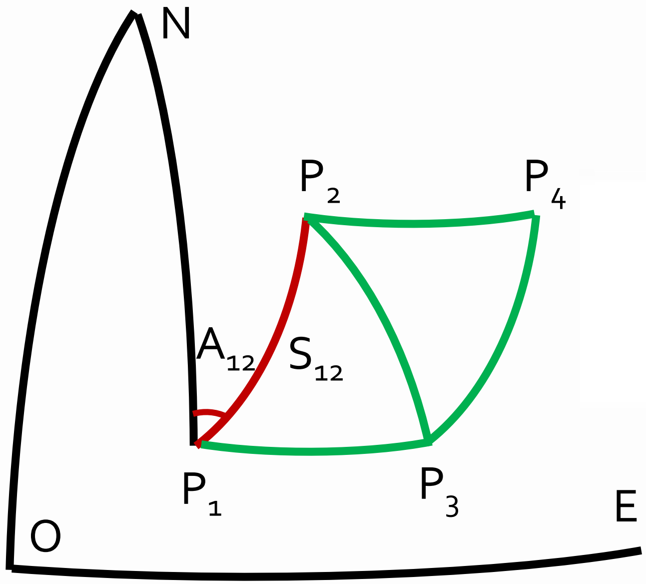
　　高斯投影坐标计算、平面子午线收敛角计算、方向改正计算、距离改正计算，统称为高斯投影计算。

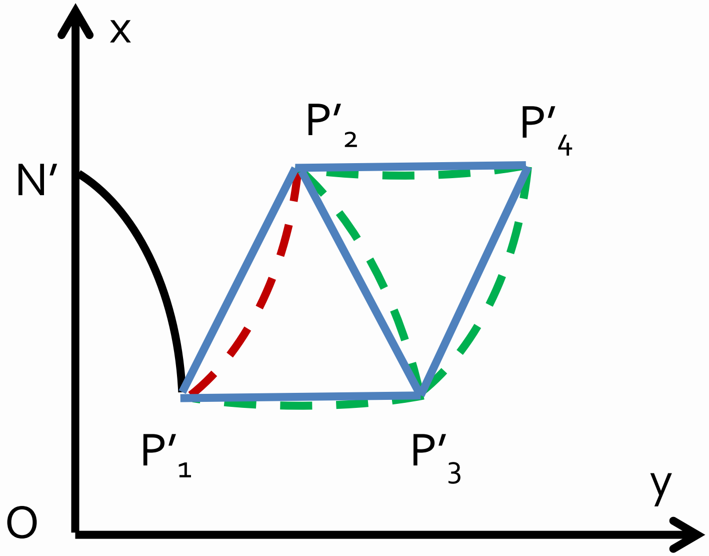


主要内容

- 椭球面三角网归算至高斯平面
- 方向改正
- 子午线收敛角
- 坐标方位角
- 距离改正

椭球面三角网归算至高斯平面



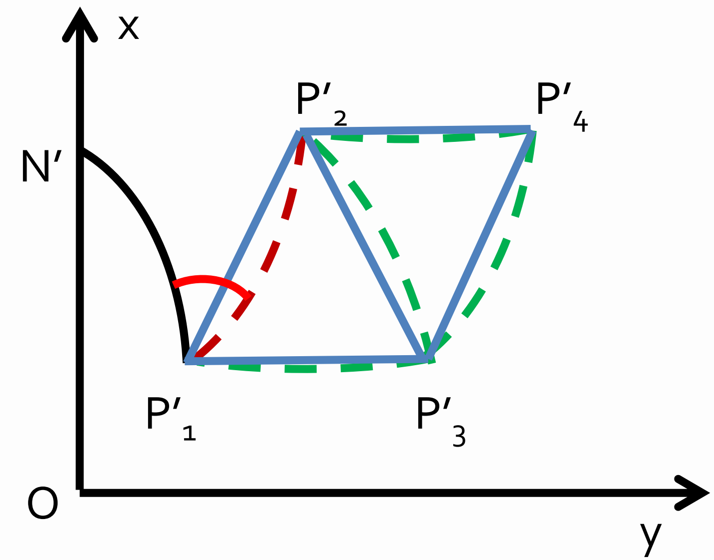


椭球面三角网归算至高斯平面

1、真北方向与真方位角

真北方向（True North）：高斯投影平面上过该点的真子午线（大地子午线）北端所指的方向，即指向椭球北极的方向。

真方位角（Geodetic Azimuth）：高斯投影平面上过该点的真北方向与大地线的夹角，即大地方位角。

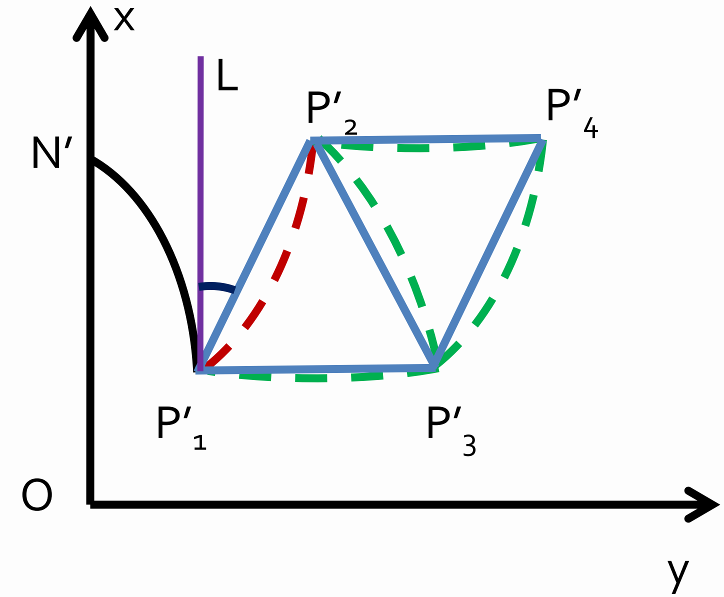


椭球面三角网归算至高斯平面

2、坐标北方向与坐标方位角

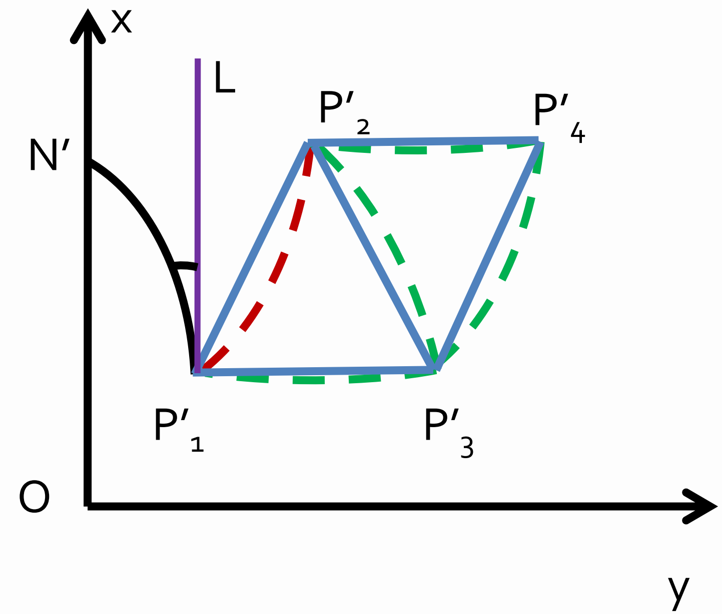
坐标北方向（Grid North）：高斯平面上过该点平行于纵坐标轴的直线北端所指的方向。

坐标方位角（Grid Azimuth，Plane-coordinate Azimuth ）：高斯平面上过该点的坐标北方向与某一直线方向的夹角，从坐标北方向顺时针量取。



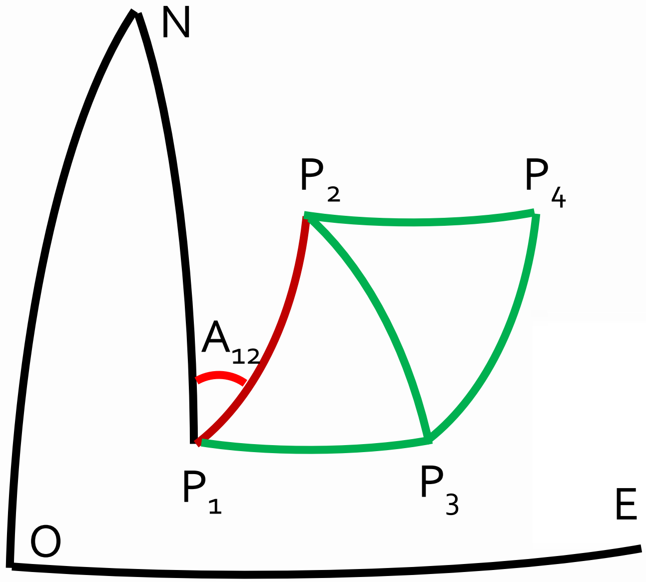
3、子午线收敛角

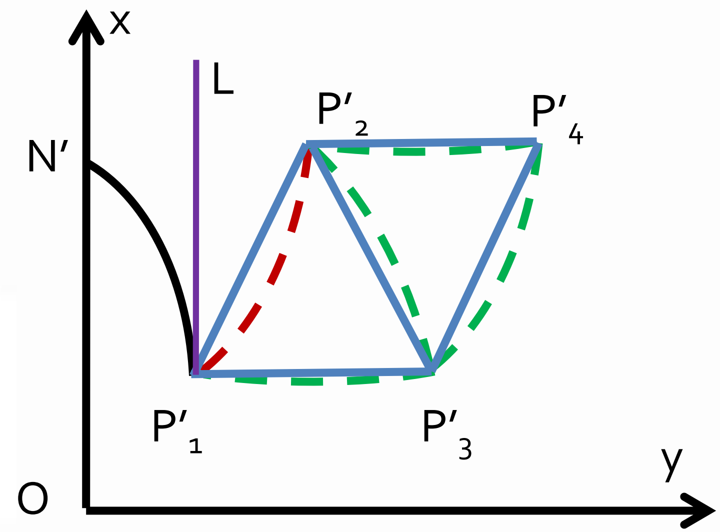
子午线收敛角（Convergence Angle）：高斯平面上过该点真北方向与坐标北方向的夹角。



椭球面三角网归算至高斯平面

4、归算内容





① (B1, L1) → (x1, y1)

② 大地线方向 → 平面弦线方向

③ 大地方位角→ 坐标方位角

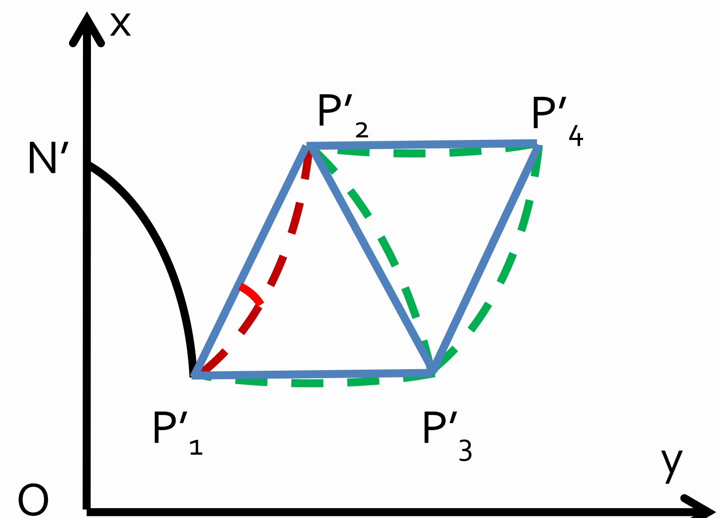
④ 大地线长 → 平面弦线长

二、方向改正（曲率改正）

1、概念

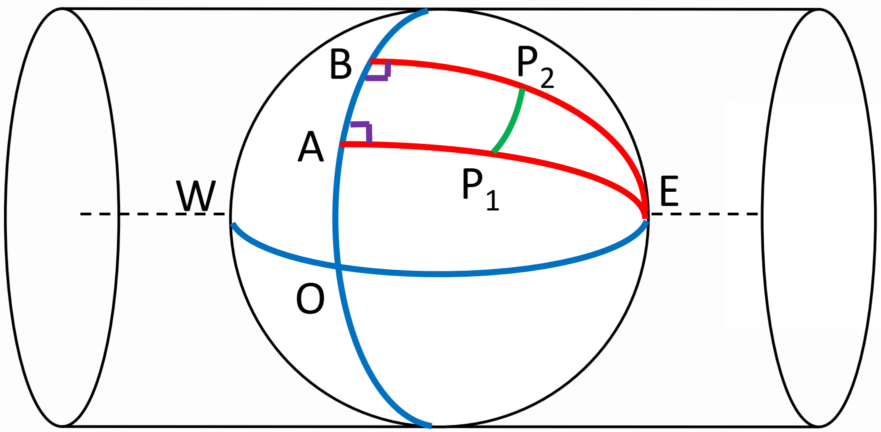
椭球面上两点间的大地线方向归算到高斯平面上相应两投影点间弦线方向，所加的改正叫做**方向改正**。

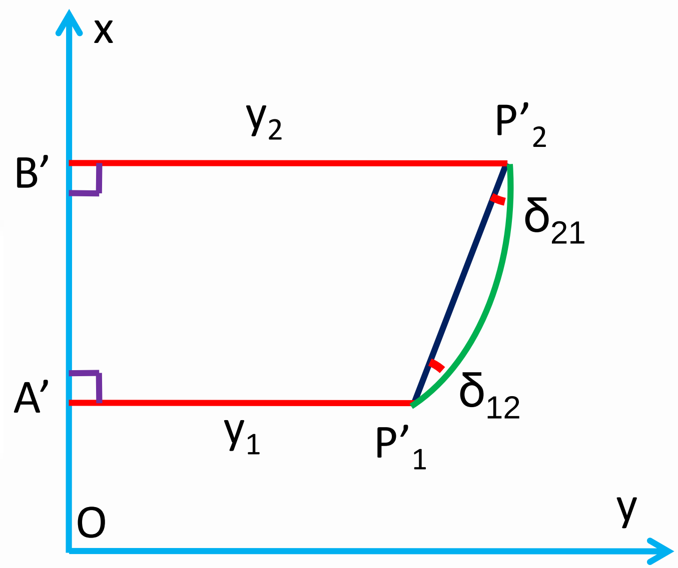
由大地线投影曲线的弯曲而引起，其大小和曲线的曲率有关，所以也称之为**曲率改正**。



二、方向改正（曲率改正）

2、近似公式

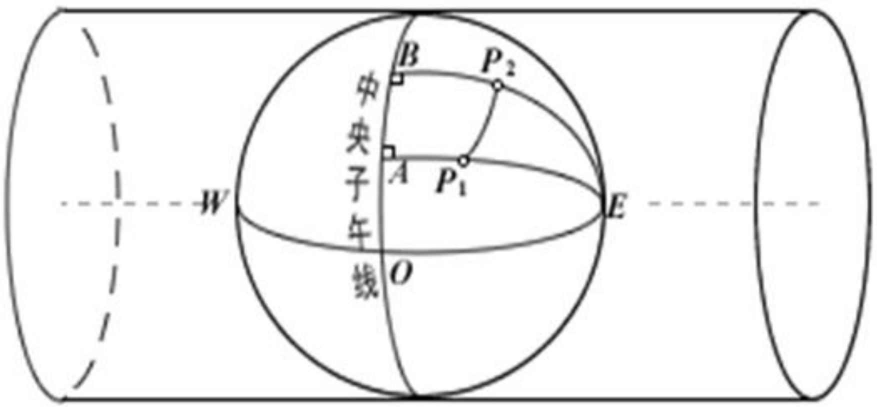


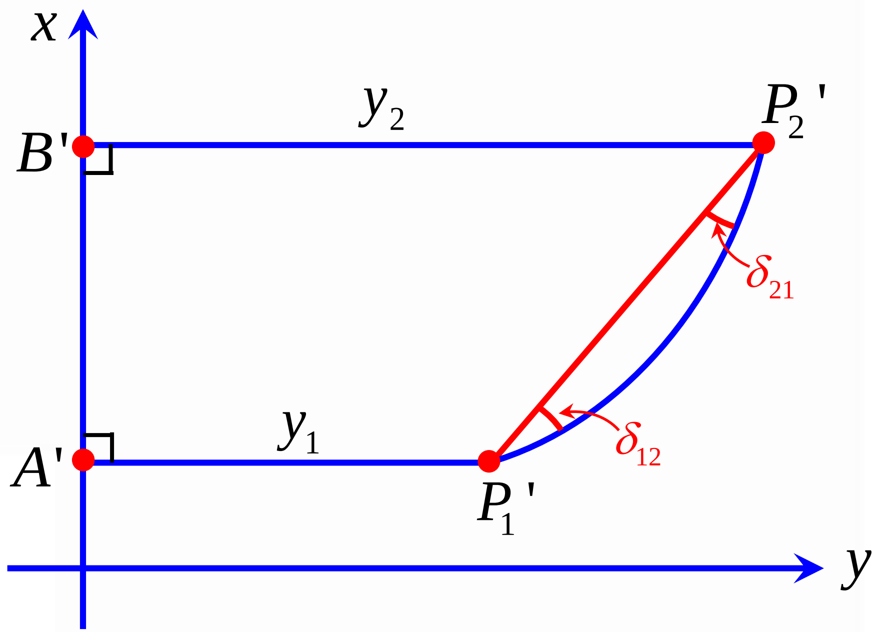


$$\delta_{12}'' = -\frac{\rho'' y_m}{2R_m^2}(x_2 - x_1)$$

$$\delta_{21}'' = \frac{\rho'' y_m}{2R_m^2}(x_2 - x_1)$$

二、方向改正（曲率改正）





$$360^\circ + \varepsilon = 360^\circ + \delta_{12} + \delta_{21}$$

设 $\delta_{12} = \delta_{21} = \delta$

$$\delta = \varepsilon / 2 \quad \left(\varepsilon = P / R^2 \right)$$

$$P = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_2 - x_1) = y_m (x_2 - x_1)$$

$$\Rightarrow \quad \delta = \frac{y_m}{2R_m^2}(x_2 - x_1)$$

近似公式：将椭球近似为球，误差小于0″.1

二、方向改正（曲率改正）

3、对概略坐标的精度要求

求全微分 $$\Delta\delta'' = \frac{\rho''}{2R^2}[y_m \cdot \Delta(x_2 - x_1) + (x_2 - x_1) \cdot \Delta y]$$

令 $$\Delta(x_2 - x_1) = \Delta y = \Delta P$$

则 $$\Delta\delta'' = \frac{\rho''}{2R^2} \cdot \Delta P[y_m + (x_2 - x_1)]$$

$$\Delta P = \frac{2R^2}{\rho''} \cdot \frac{\Delta\delta''}{y_m + (x_2 - x_1)}$$

说明：由于通常平面坐标x_2，y_2为待求量，需采用迭代的方法计算。

二、方向改正（曲率改正）

4、精密公式

$$\Delta\delta''_{1.2} = -\frac{\rho''}{6R^2}(x_2 - x_1)(2y_1 + y_2 - \frac{y_m^3}{R_m^2}) - \frac{\rho''\eta_m^2 t_m}{R_m^3}(y_2 - y_1)y_m^2$$

$$\Delta\delta''_{2.1} = \frac{\rho''}{6R^2}(x_2 - x_1)(2y_1 + y_2 - \frac{y_m^3}{R_m^2}) + \frac{\rho''\eta_m^2 t_m}{R_m^3}(y_2 - y_1)y_m^2$$

5、实用公式

$$\left.\begin{aligned}\delta''_{1.2} &= -\frac{\rho''}{6R_m^2}\left[(x_2 - x_1)\left(2y_1 + y_2 - \frac{y_m^3}{R_m^2}\right) + \frac{6\eta_m^2 t_m}{R_m}(y_2 - y_1)y_m^2\right] \\ \delta''_{2.1} &= -\delta''_{1.2} + \frac{\rho''}{6R_m^2}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\end{aligned}\right\}$$

说明：由于通常平面坐标x_2，y_2为待求量，需采用迭代的方法计算。

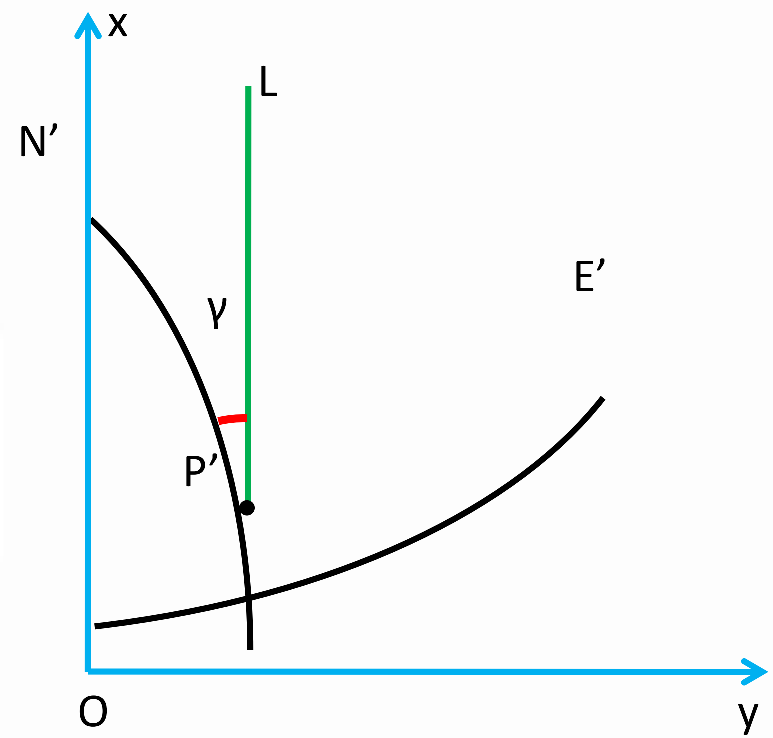
三、子午线收敛角

1、概念

子午线收敛角：高斯平面上过该点真北方向与坐标北方向的夹角。

产生原因：除中央子午线以外所有子午线投影后是曲线。

计算：由大地坐标或平面坐标计算。



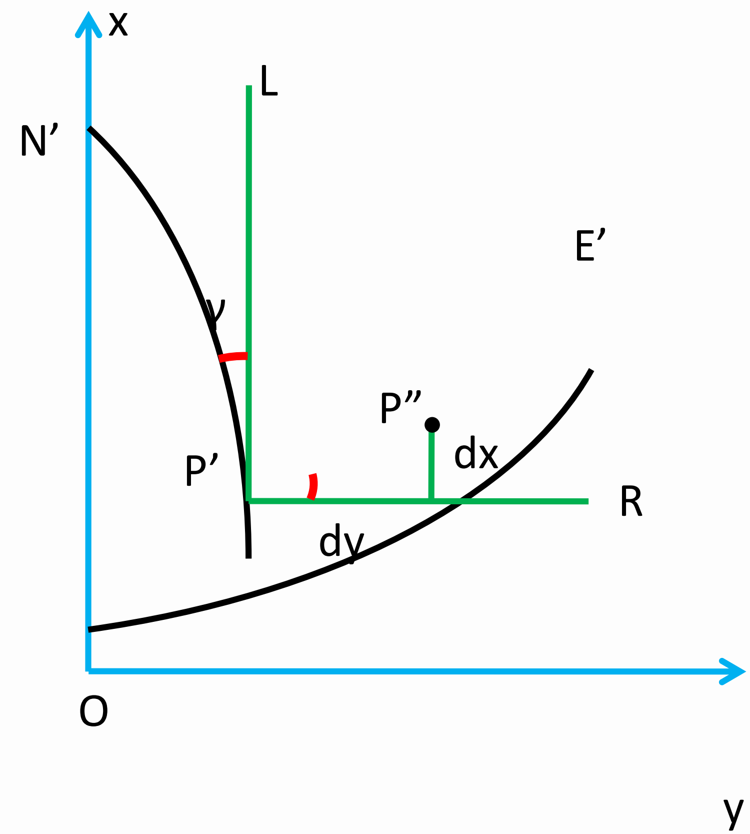
三、子午线收敛角

2、由大地坐标计算γ

$$\tan\gamma = \frac{dx}{dy}$$

$$\begin{cases} x = f_1(q,l) \\ y = f_2(q,l) \end{cases} \xrightarrow{dq=0} \begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial l}\cdot dl \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial l}\cdot dl \end{aligned}$$

$$\boxed{\tan\gamma = \frac{\partial x / \partial l}{\partial y / \partial l}}$$



三、子午线收敛角

2、由大地坐标计算γ

$$\tan\gamma = \sin l + \frac{1}{3}\sin B\cos^2 B(1+t^2+3\eta^2+2\eta^4)l^3 + \frac{1}{15}\sin B\cos^4 B(2+4t^2+2t^4)l^5$$

$$\gamma'' = l''\sin B[1+\frac{l''^2\cos^2 B}{3\rho''^2}(1+3\eta^2+2\eta^4)+\frac{l''^4\cos^4 B}{15\rho''^4}(2-t^2)]$$

三、子午线收敛角

2、由大地坐标计算γ

$$\gamma'' = l''\sin B[1+\frac{l''^2\cos^2 B}{3\rho''^2}(1+3\eta^2+2\eta^4)+\frac{l''^4\cos^4 B}{15\rho''^4}(2-t^2)]$$

① 当 l=0时，γ=0；当B=0时，γ=0。

② γ为 l 的奇函数，当P点在中央子午线以东时， l 为正，γ也为正；当P点在中央子午线以西时， l 为负，γ也为负。

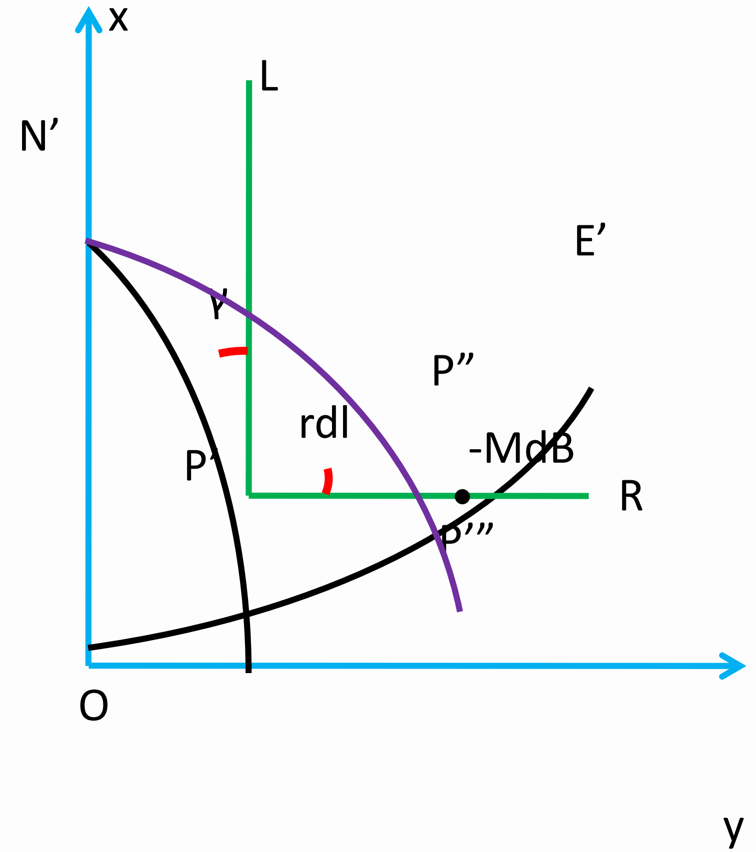
③ 当B不变时，P点与中央子午线的经差 l 越大，则γ也越大。

④ 当 l 不变时，纬度越高，γ越大，在极点处达到最大。

三、子午线收敛角

3、由高斯坐标计算 γ

$$\gamma'' = \frac{\rho'' y}{N_f} t_f - \frac{\rho'' y^3}{3N_f^3} t_f (1 + t_f^2 + \eta_f^2) + \frac{\rho'' y^5}{15N_f^5} t_f (2 + 5t_f^2 + 3t_f^4)$$



五、距离改正

1、长度比公式

$$\left.\begin{aligned} m^2 &= \frac{E}{r^2} \\ E &= \left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2 \\ r &= N\cos B \end{aligned}\right\} \Rightarrow m^2 = \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2}{N^2\cos^2 B}$$

$$\left.\begin{aligned} m^2 &= \frac{G}{r^2} \\ G &= \left(\frac{\partial x}{\partial l}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)^2 \\ r &= N\cos B \end{aligned}\right\} \Rightarrow m^2 = \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial l}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)^2}{N^2\cos^2 B}$$

五、距离改正

1、长度比公式

① 用大地坐标表示的长度比公式

$$m = 1 + \frac{l''^2}{2\rho''^2}\cos^2 B(1+\eta^2) + \frac{l''^4}{24\rho''^4}\cos^4 B(5-4t^2)$$

② 用高斯坐标表示的长度比公式

$$m = 1 + \frac{y^2}{2R^2} + \frac{y^4}{24R^4}$$

五、距离改正

1、长度比公式

③ 长度变形

$$r = m - 1 = \frac{y^2}{2R^2} + \frac{y^4}{24R^4}$$

（1） 长度变形与A无关

（2） 长度变形与点位有关

（3） $y=0$时$r=0$

（4） $y \neq 0$时$r > 0$

（5） r与y^2成正比

（6） r与R^2成反比

（7） 对除中央子午线以外的某一子午线在赤道有最大变形

五、距离改正

φ \ $\mu-1$ \ $\pm\lambda$	0°	1°	2°	3°
90°	0.000 00	0.000 00	0.000 00	0.000 00
80°	0.000 00	0.000 00	0.000 02	0.000 04
70°	0.000 00	0.000 02	0.000 07	0.000 16
60°	0.000 00	0.000 04	0.000 15	0.000 34
50°	0.000 00	0.000 06	0.000 25	0.000 58
40°	0.000 00	0.000 09	0.000 36	0.000 81
30°	0.000 00	0.000 11	0.000 46	0.001 03
20°	0.000 00	0.000 14	0.000 54	0.001 22
10°	0.000 00	0.000 15	0.000 59	0.001 34
0°	0.000 00	0.000 15	0.000 61	0.001 38

五、距离改正

UTM投影的长度变形

φ \ $\pm\lambda$ ($\mu-1$)	0°	1°	2°	3°
90°	0.000 40	0.000 40	0.000 40	0.000 40
80°	0.000 40	0.000 40	0.000 38	0.000 36
70°	0.000 40	0.000 38	0.000 33	0.000 24
60°	0.000 40	0.000 36	0.000 25	0.000 06
50°	0.000 40	0.000 34	0.000 15	0.000 17
40°	0.000 40	0.000 31	0.000 04	0.000 41
30°	0.000 40	0.000 28	0.000 06	0.000 63
20°	0.000 40	0.000 27	0.000 14	0.000 81
10°	0.000 40	0.000 26	0.000 19	0.000 94
0°	0.000 40	0.000 25	0.000 21	0.000 98

五、距离改正

2、距离改正计算

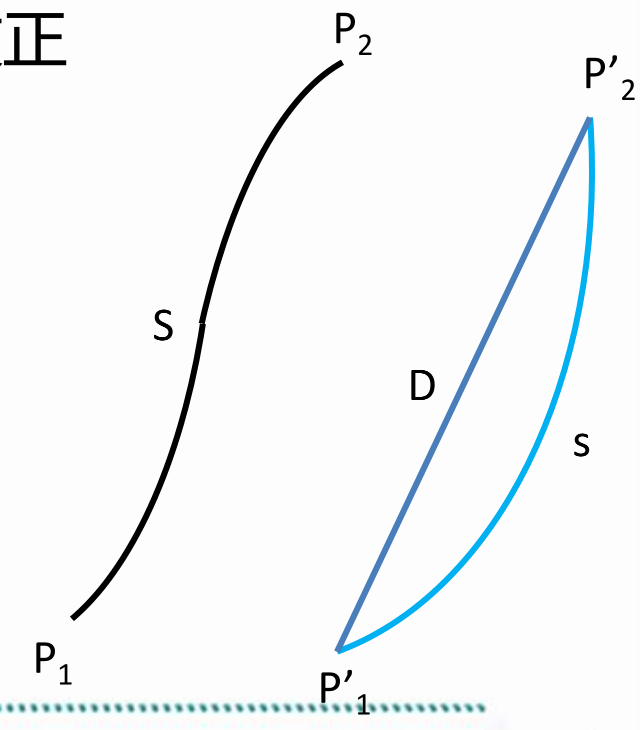
① 定义

将大地线长S归算为平面弦长D所加的改正

由于高斯投影的长度比在一般情况下恒大于1，因此有如下的关系：

$$\boxed{S \le s \ge D}$$

$$\boxed{S \le D}$$

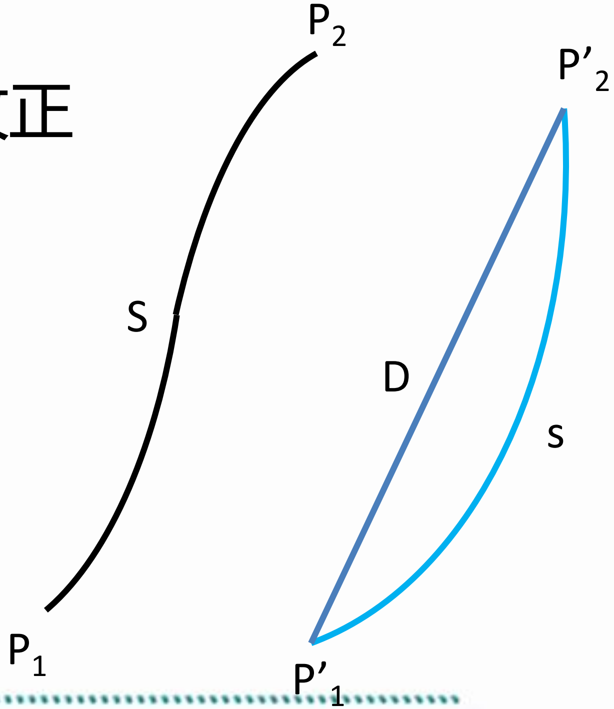


五、距离改正

2、距离改正计算

① 定义

将大地线长S归算为平面弦长D所加的改正



② 由S求s

$$ds = mdS$$

$$s = \int_{P_1}^{P_2} mdS = \int_0^S mdS$$

辛普逊公式

$$s = \frac{S}{6}(m_1 + 4m_m + m_2)$$

五、距离改正

2、距离改正计算

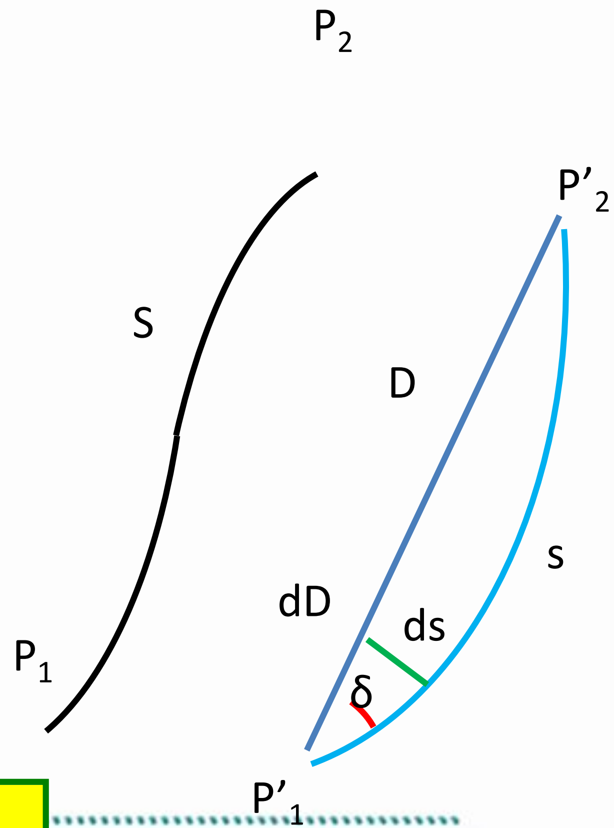
③ 由s求D

$$dD = ds\cos\delta = ds(1 - \frac{\delta^2}{2} + \ldots\ldots)$$

$$D = s - \frac{\delta^2}{2}s$$

$$D = s$$

$$\therefore D = \frac{S}{6}(m_1 + 4m_m + m_2)$$



$s = 40km$

$\delta = 30'' = 0.00015$

$\frac{\delta^2}{2}s = 0.44mm$

2、距离改正计算

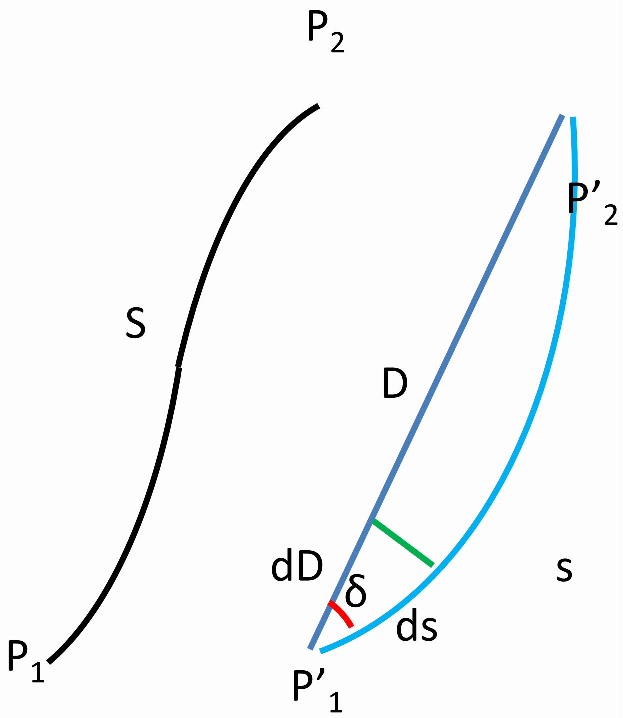
③ 由s求D

$$D=\frac{S}{6}(m_1+4m_m+m_2)$$

$$m_1=1+\frac{y_1^2}{2R_1^2}+\frac{y_1^4}{24R_1^4}$$

$$m_m=1+\frac{y_m^2}{2R_m^2}+\frac{y_m^4}{24R_m^4}$$

$$m_2=1+\frac{y_2^2}{2R_2^2}+\frac{y_2^4}{24R_2^4}$$



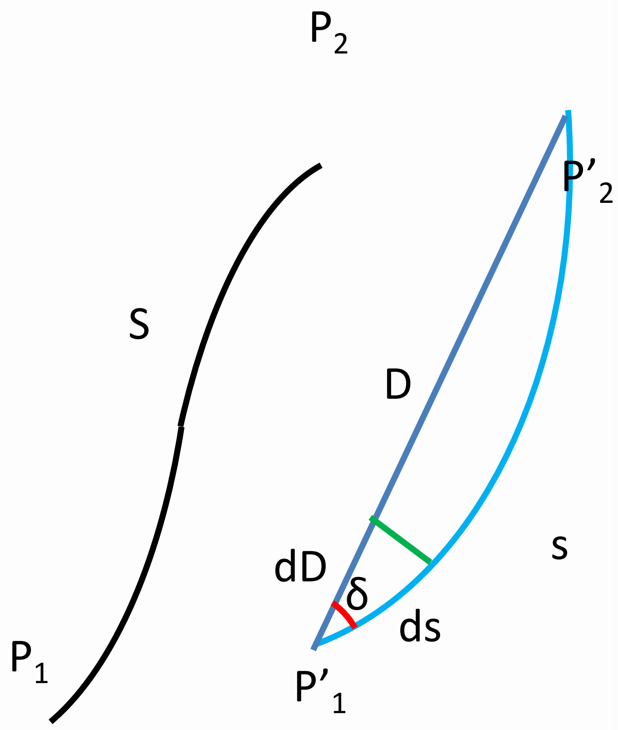
2、距离改正计算

③ 由S求D

$$D = S\left(1 + \frac{y_m^2}{2R_m^2} + \frac{\Delta y^2}{24R_m^2} + \frac{y_m^4}{24R_m^4}\right)$$

$$y_m = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad \Delta y = y_2 - y_1$$

$$\Delta S = D - S = S\left(\frac{y_m^2}{2R_m^2} + \frac{\Delta y^2}{24R_m^2} + \frac{y_m^4}{24R_m^4}\right)$$



五、距离改正

3、公式分析

$$\Delta S = D - S = S\left(\frac{y_m^2}{2R_m^2} + \frac{\Delta y^2}{24R_m^2} + \frac{y_m^4}{24R_m^4}\right)$$

当$S < 70km$和$y_m < 350km$时，误差小于$0.001m$，故可用于一等测量计算。二等可以省去最后一项，三等则可以省去两项。

$y = 0$时，$\Delta S = 0$，即中央子午线无距离改正；

$y \neq 0$时，$\Delta S > 0$，即离开中央子午线恒有改正；

大地测量数据处理流程

确定水平坐标的流程

已知坐标（L，B） → 已知坐标（X，Y）

- 水平方向
- 垂直角
- 地面距离
- 天文经纬度
- 天文方位角

- 水平方向
- 大地线长
- 大地方位角

- 水平方向
- 平面距离
- 平面方位角

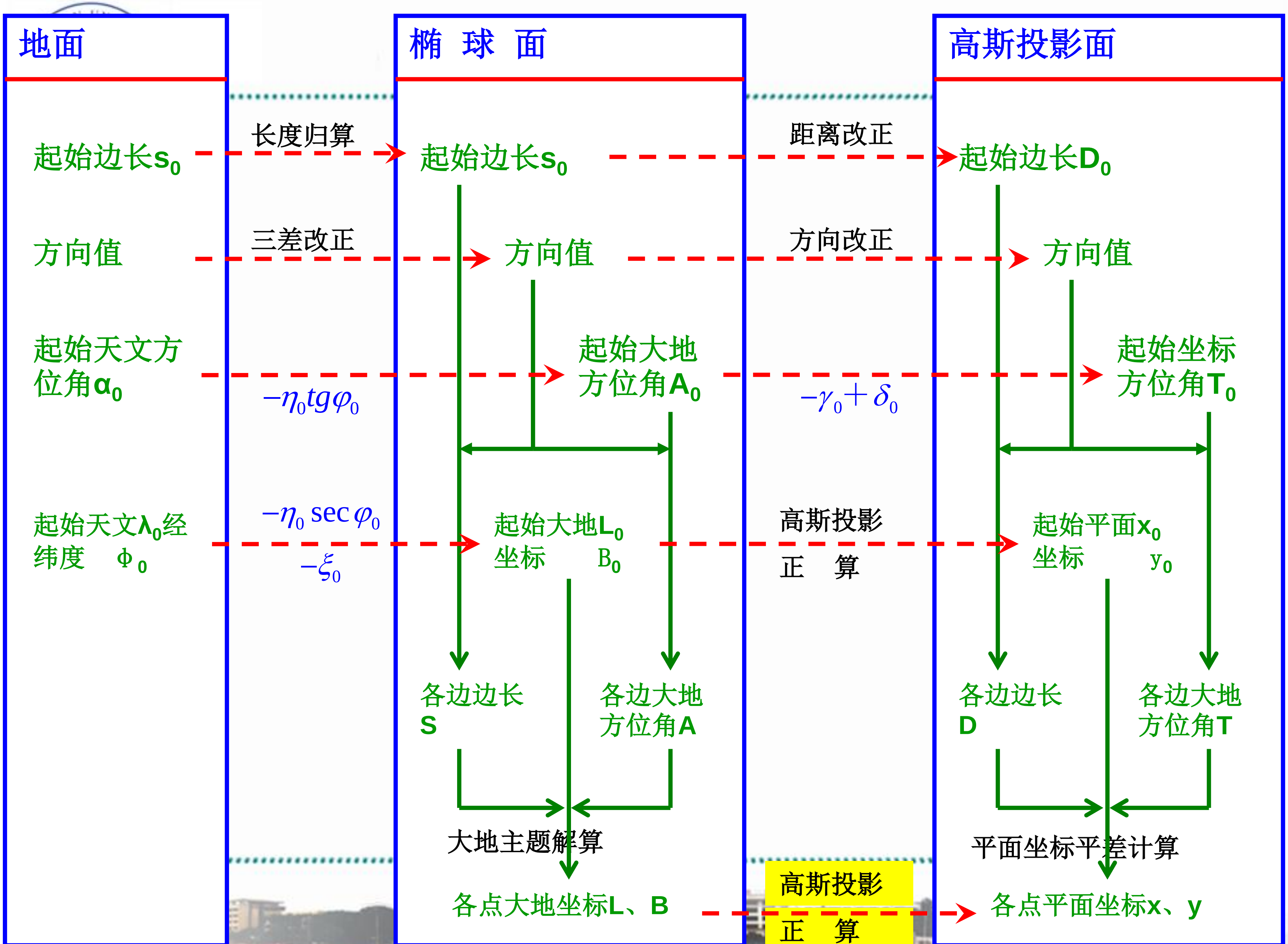
布设水平控制网 —观测→ 地面上观测元素 —归算→ 椭球面上的元素 —归算→ 高斯平面的元素

椭球面上的元素 —推算 平差→ 大地坐标（L，B）

高斯平面的元素 —推算 平差→ 平面坐标（X，Y）

大地坐标（L，B） → 平面坐标（X，Y）

水平坐标



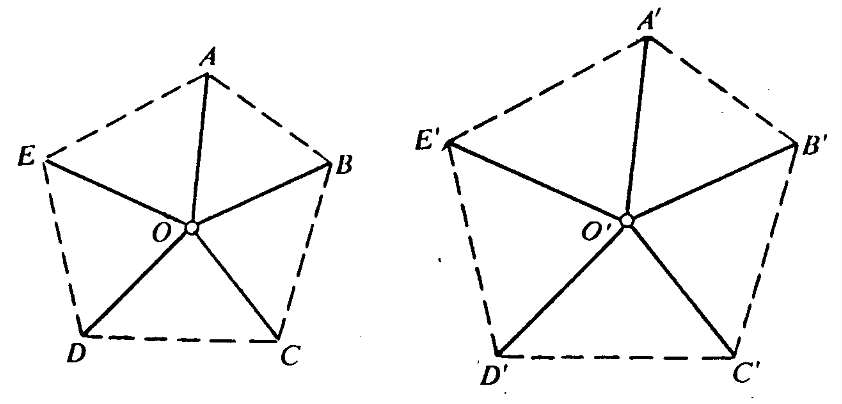
地面
椭 球 面
高斯投影面
起始边长s_0
长度归算
起始边长s_0
距离改正
起始边长D_0
方向值
三差改正
方向值
方向改正
方向值
起始天文方位角α_0
$-\eta_0 tg\varphi_0$
起始大地方位角A_0
$-\gamma_0+\delta_0$
起始坐标方位角T_0
起始天文λ_0经纬度 φ_0
$-\eta_0 \sec\varphi_0$
$-\xi_0$
起始大地L_0坐标 B_0
高斯投影
正 算
起始平面x_0坐标 y_0
各边边长S
各边大地方位角A
各边边长D
各边大地方位角T
大地主题解算
平面坐标平差计算
各点大地坐标L、B
高斯投影
正 算
各点平面坐标x、y

正形投影的一般条件

高斯投影（正形投影）

1、定义

在微小区域内，椭球面图形投影后保持形状不变，也就是说，投影到平面上的微小图形与椭球面上的微小图形相似。



2、特点

在微小范围内投影的长度比m 与方向无关，但随点位而改变。

$$\boxed{a = b}$$

高斯投影具备的条件

高斯投影的三个条件：

- 正形条件，投影后角度不变
- 中央子午线投影为一直线
- 中央子午线投影后长度不变

$$
\begin{cases}
x = F_1(B, L) \\
y = F_2(B, L)
\end{cases}
$$

高斯投影具备的条件

- 正形投影条件

正形投影的一般条件

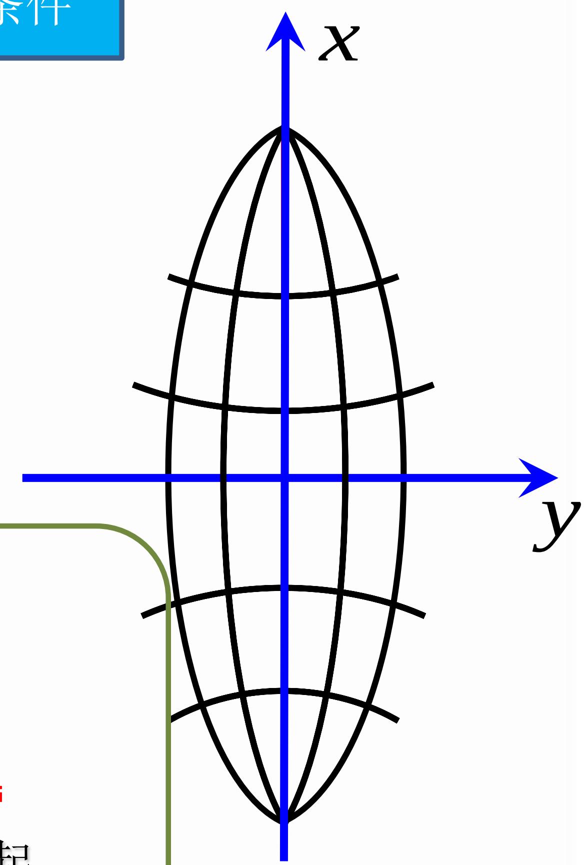
- 中央子午线投影后为一直线
- 中央子午线投影后长度不变

高斯投影本身的特定条件

控制测量对地图投影的要求

- 等角投影
- 长度和面积变形不大，并能用简单公式计算变形
- 能按高精度、简单、同样的公式和用表把各带连在一起。

?



正形投影的一般条件

正形投影是地图投影的一种，而高斯投影又是正形投影的一种。所以，正形投影对于投影来说是一种特殊的投影，但对于高斯投影来说却是一种一般投影。

因此，高斯投影首先必须满足正形投影的一般条件。基于正形投影的一般条件，再加上高斯投影的特殊条件，就可以导出高斯投影坐标正、反算公式。

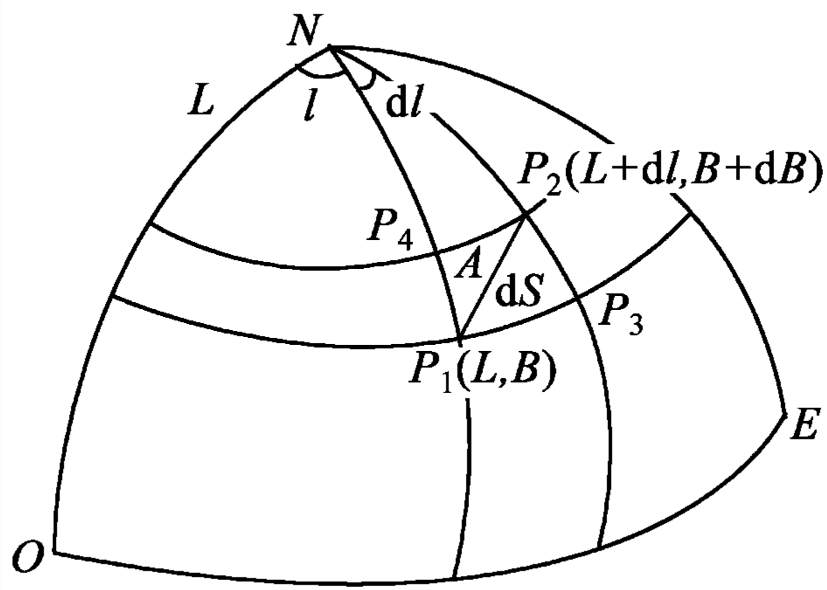
正形投影的一般条件

在正形投影中，**长度比与方向无关**，这是**推导正形投影一般条件的基本出发点**。

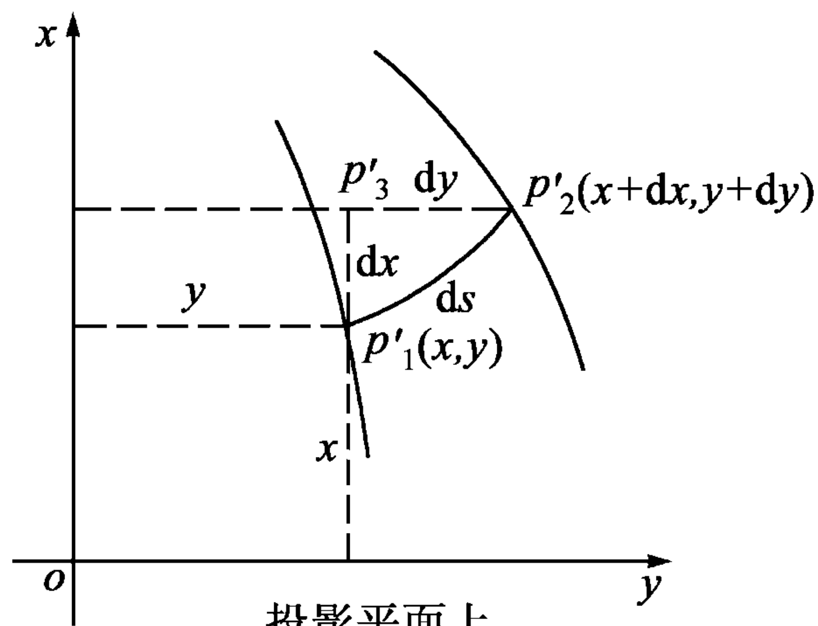
将椭球面弧段向平面进行投影时：

$$\begin{cases} x = F_1(B,L) \\ y = F_2(B,L) \end{cases}$$

长度比：$m = \dfrac{ds}{dS}$



椭球体面上



投影平面上

正形投影的一般条件

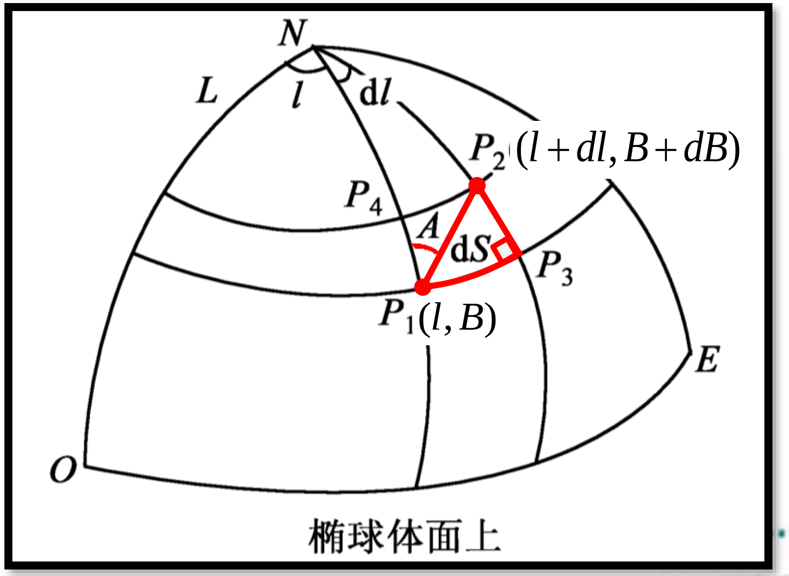
正形投影中长度比与方向无关

$$m = \frac{ds}{dS}$$

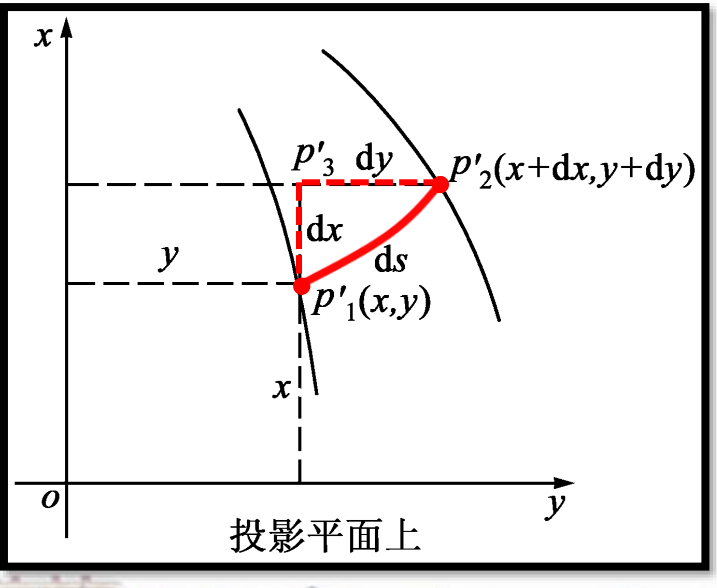
$$A$$

$$dS^2 = (MdB)^2 + (N\cos Bdl)^2$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$



椭球体面上



投影平面上

正形投影的一般条件

$$m^2=\left(\frac{ds}{dS}\right)^2=\frac{dx^2+dy^2}{(MdB)^2+(N\cos B dl)^2}$$

r

dq

等量纬度

$$dq=\frac{MdB}{N\cos B}$$

$$q=\int_0^B\frac{MdB}{N\cos B}$$

$$m^2=\frac{dx^2+dy^2}{r^2\left[(dq)^2+(dl)^2\right]}$$

地图
数学投影

$$\begin{cases}x=F_1(L,B)\\ y=F_2(L,B)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=x(l,q)\\ y=y(l,q)\end{cases}$$

地图投影就是要具体确定F1和F2的函数式，亦即建立平面坐标x,y和大地坐标L,B的函数关系。大地纬度B同等量纬度q有确定的关系，因此投影问题亦即建立x,y与l,q的函数关系。

正形投影的一般条件（长度比通用公式）

$$\begin{cases} x = x(l,q) \\ y = y(l,q) \end{cases}$$

全微分

$$\begin{cases} dx = \dfrac{\partial x}{\partial q}dq + \dfrac{\partial x}{\partial l}dl \\ dy = \dfrac{\partial y}{\partial q}dq + \dfrac{\partial y}{\partial l}dl \end{cases}$$

$$m^2 = \left(\frac{ds}{dS}\right)^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{r^2\left[(dq)^2 + (dl)^2\right]}$$

$$\boxed{ds^2 = dx^2 + dy^2}$$

$$ds^2 = E(dq)^2 + 2F(dq)(dl) + G(dl)^2$$

$$\begin{cases} E = \left(\dfrac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial q}\right)^2 \\ F = \dfrac{\partial x}{\partial q}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial l} + \dfrac{\partial y}{\partial q}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial l} \\ G = \left(\dfrac{\partial x}{\partial l}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial l}\right)^2 \end{cases}$$

$$m^2 = \frac{E(dq)^2 + 2F(dq)(dl) + G(dl)^2}{r^2\left[(dq)^2 + (dl)^2\right]}$$

正形投影的一般条件（长度比通用公式）

正形投影中长度比与方向无关

长度比
通用公式

$$m=\frac{ds}{dS}$$

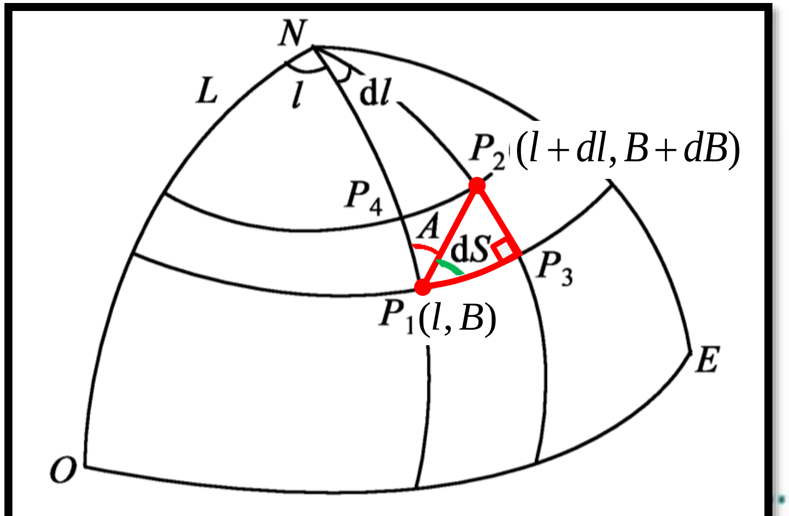
A

柯西-黎曼条件

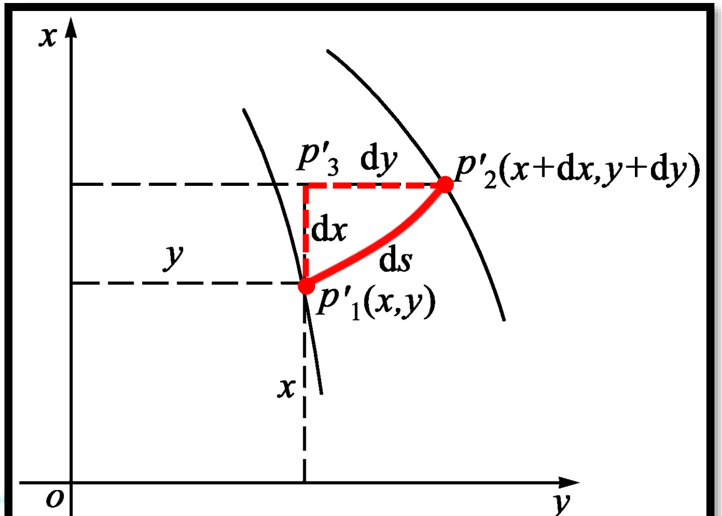
$$dl=\tan A dq$$

$$m^2=\frac{E(dq)^2+2F(dq)(dl)+G(dl)^2}{r^2\left[(dq)^2+(dl)^2\right]}$$

$$\tan(90^\circ-A)=\frac{P_2P_3}{P_1P_3}$$



椭球体面上



投影平面上

正形投影的一般条件（长度比通用公式）

$$m^2=\frac{E(dq)^2+2F(dq)(dl)+G(dl)^2}{r^2\left[(dq)^2+(dl)^2\right]}$$

$$\begin{cases} E=\left(\dfrac{\partial x}{\partial q}\right)^2+\left(\dfrac{\partial y}{\partial q}\right)^2 \\ F=\dfrac{\partial x}{\partial q}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial l}+\dfrac{\partial y}{\partial q}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial l} \\ G=\left(\dfrac{\partial x}{\partial l}\right)^2+\left(\dfrac{\partial y}{\partial l}\right)^2 \end{cases}$$

m与A无关

$$F=0 \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial q}\cdot\frac{\partial x}{\partial l}+\frac{\partial y}{\partial q}\cdot\frac{\partial y}{\partial l}=0$$

$$\frac{\partial x}{\partial l}=-\frac{\dfrac{\partial y}{\partial q}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial l}}{\dfrac{\partial x}{\partial q}}$$

$$E=G \Rightarrow \left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2=\boxed{\left(\frac{\partial x}{\partial l}\right)^2}+\left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)^2$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2=\left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)^2$$

正形投影的一般条件（长度比通用公式）

开方

$$\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2=\left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)^2$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial x}{\partial q}=\dfrac{\partial y}{\partial l}\\[2ex]\dfrac{\partial x}{\partial l}=-\dfrac{\partial y}{\partial q}\end{cases}$$

椭球面→平面

正形投影一般公式

平面→椭球面

$$\begin{cases}\dfrac{\partial q}{\partial x}=\dfrac{\partial l}{\partial y}\\[2ex]\dfrac{\partial l}{\partial x}=-\dfrac{\partial q}{\partial y}\end{cases}$$

柯西-黎曼条件

$$m^2=\frac{E\cos^2 A+\cancel{2F\sin A\cos A}+G\sin^2 A}{r^2}$$

m与A无关

$$\left.\begin{aligned}&F=0 \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial q}\cdot\frac{\partial x}{\partial l}+\frac{\partial y}{\partial q}\cdot\frac{\partial y}{\partial l}=0\\&E=G \Rightarrow \left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2=\left(\frac{\partial x}{\partial l}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)^2\end{aligned}\right\}$$

$$m^2=\frac{E}{r^2}$$

$$m^2=\frac{G}{r^2}$$

正形投影的一般条件（长度比通用公式）

正形投影中长度比与方向无关

$$m=\frac{ds}{dS}$$

A

长度比通用公式

$$m^2=\frac{E(dq)^2+2F(dq)(dl)+G(dl)^2}{r^2\left[(dq)^2+(dl)^2\right]}$$

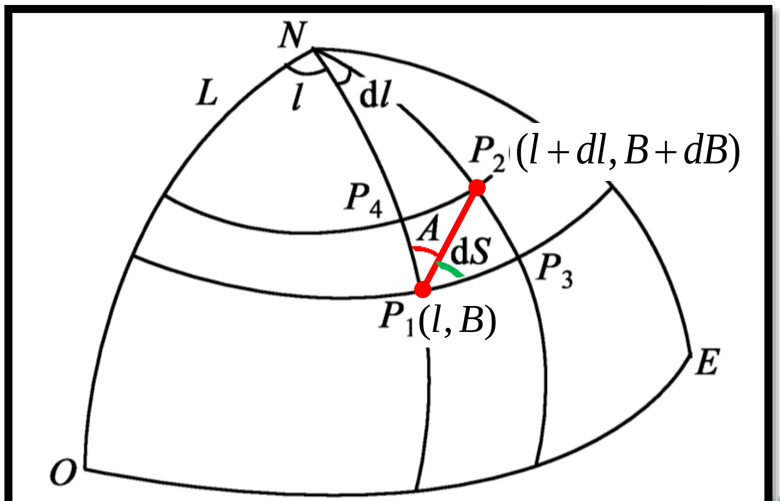
柯西-黎曼条件

$$\begin{cases}\dfrac{\partial x}{\partial q}=\dfrac{\partial y}{\partial l}\\[2ex]\dfrac{\partial x}{\partial l}=-\dfrac{\partial y}{\partial q}\end{cases}$$

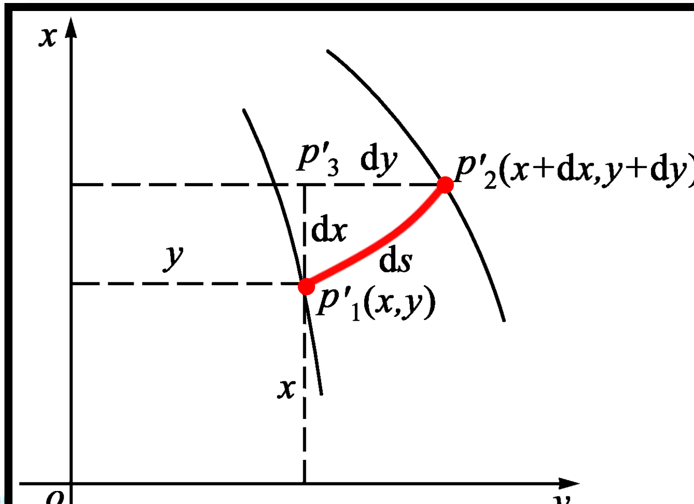
椭球面⇩平面

平面⇩椭球面

$$\begin{cases}\dfrac{\partial q}{\partial x}=\dfrac{\partial l}{\partial y}\\[2ex]\dfrac{\partial l}{\partial x}=-\dfrac{\partial q}{\partial y}\end{cases}$$



椭球体面上



投影平面上

正形投影的一般条件

长度比的平方： $m^2 = \dfrac{E\cos^2 A + 2F\sin A\cos A + G\sin^2 A}{r^2}$

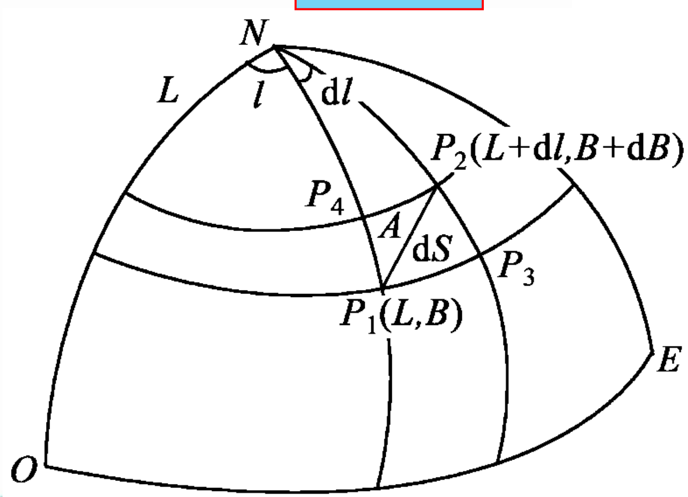
其中： $E = (\dfrac{\partial x}{\partial q})^2 + (\dfrac{\partial y}{\partial q})^2, F = \dfrac{\partial x}{\partial q}\dfrac{\partial x}{\partial l} + \dfrac{\partial y}{\partial q}\dfrac{\partial y}{\partial l}, G = (\dfrac{\partial x}{\partial l})^2 + (\dfrac{\partial y}{\partial l})^2$　　$q = \int_0^B \dfrac{MdB}{N\cos B}$

为了使上式与方向A无关： $E = G \qquad F = 0$

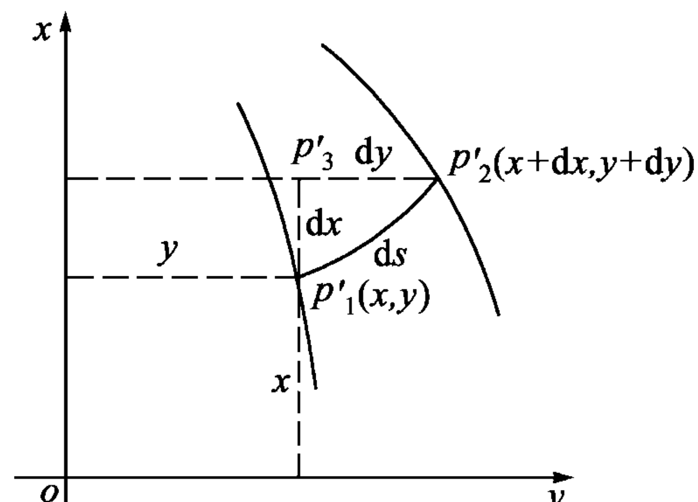
$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial q} = \dfrac{\partial y}{\partial l} \\ \dfrac{\partial x}{\partial l} = -\dfrac{\partial y}{\partial q} \end{cases} \quad (1)$$

（椭球面到平面正形投影一般条件公式

柯西–黎曼微分方程）



椭球体面上



投影平面上

正形投影的一般条件

长度比通用公式

对应于（1）由平面到椭球面正形投影的一般条件为（2）：

（1）
$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial q} = \dfrac{\partial y}{\partial l} \\ \dfrac{\partial x}{\partial l} = -\dfrac{\partial y}{\partial q} \end{cases}$$

椭球面

平面

（2）
$$\begin{cases} \dfrac{\partial q}{\partial x} = \dfrac{\partial l}{\partial y} \\ \dfrac{\partial q}{\partial y} = -\dfrac{\partial l}{\partial x} \end{cases}$$

柯西-黎曼方程是正形投影的充要条件

高斯投影的正算公式

高斯投影正反算公式

将椭球体上的元素投影到平面上，包括坐标、方向和长度三类问题，但是从本质上讲，如果我们确定了椭球面与平面对应点间的**坐标关系**的具体形式，那么方向和长度的投影关系也就解决了。因此确定投影坐标计算公式是高斯投影计算的关键。

$$
\begin{cases}
x = x(l,q) \\
y = y(l,q)
\end{cases}
$$

如何确定具体的坐标投影函数关系式？

高斯投影正反算公式

高斯投影坐标正算

函数关系 $\begin{cases} x = x(l, B) \\ y = y(l, B) \end{cases}$

(1) 中央子午线投影后为直线；

(2) 中央子午线投影后长度不变；

(3) 正形投影条件。

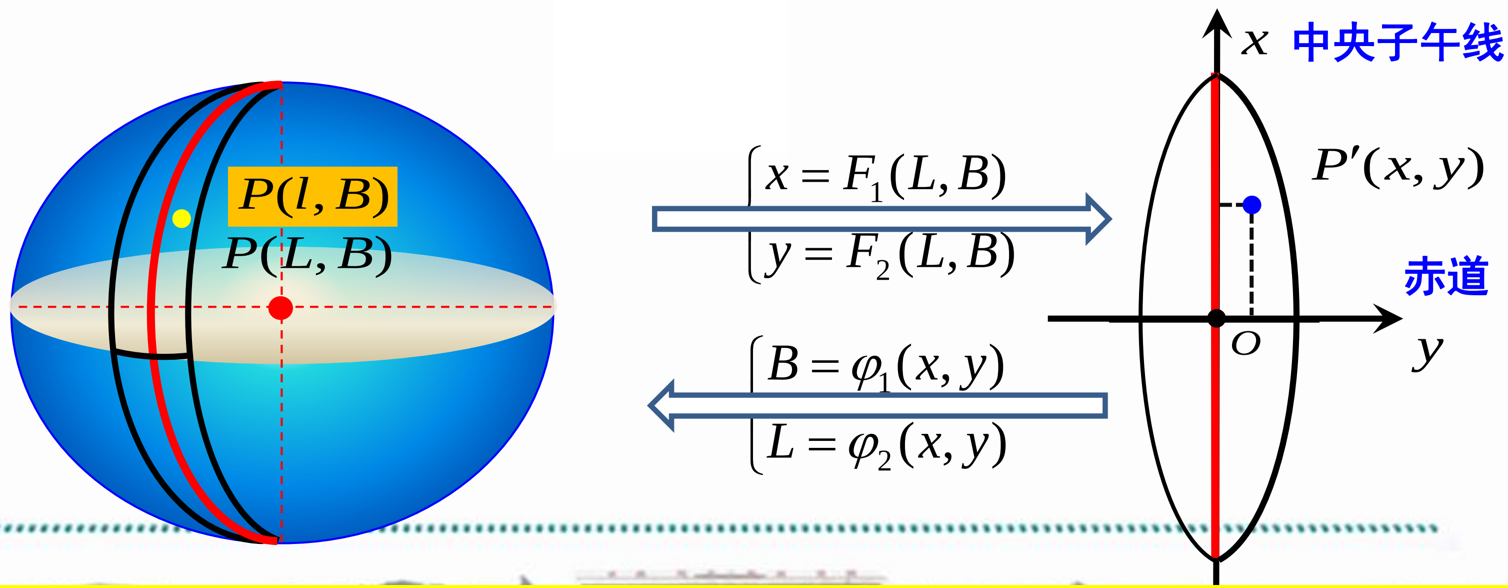
高斯投影坐标反算

函数关系 $\left.\begin{array}{l} B = \varphi_1(x, y) \\ l = \varphi_2(x, y) \end{array}\right\}$

(1) x坐标轴投影成中央子午线,为对称轴；

(2) x轴上的长度投影保持不变；

(3) 正形投影条件。



高斯投影的关键问题是找到坐标间的对应关系！！！

高斯投影正算公式

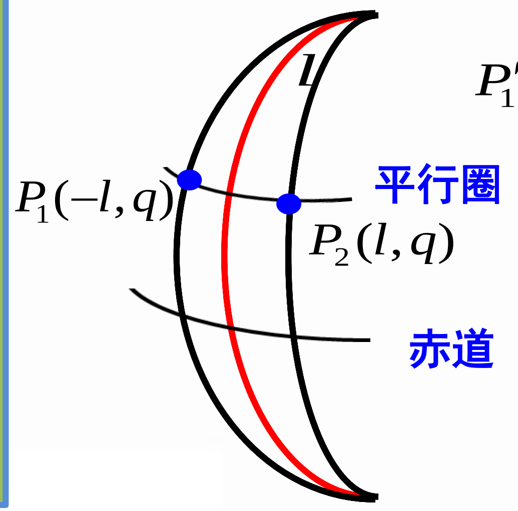
高斯投影坐标正算

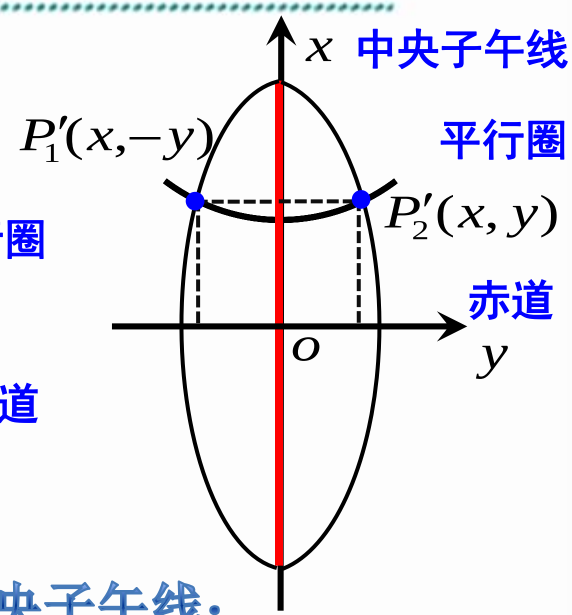
函数关系 $\begin{cases} x = x(l, B) \\ y = y(l, B) \end{cases}$

(1) 中央子午线投影后为直线；

(2) 中央子午线投影后长度不变；

(3) 正形投影条件。





- 中央子午线东西两侧的投影必然对称于中央子午线；
- 当 B 为常数时， x为 l 的偶函数，而 y 则为 l 的奇函数。
- 投影方程可展开为经差 l 的幂级数

投影方程 $\begin{cases} x = x(l, q) \\ y = y(l, q) \end{cases}$ $\begin{cases} x = m_0 + m_2 l^2 + m_4 l^4 + \cdots \\ y = m_1 l + m_3 l^3 + m_5 l^5 + \cdots \end{cases}$

$1/\rho$ 是一个微小量

由于高斯投影是按带投影的，在每一带内经差l是不大的，l/ρ是一个微小量，因此可将投影方程的函数展开为经差l的幂级数。

高斯投影正算公式

高斯投影坐标正算

函数关系 $\begin{cases} x = x(l, B) \\ y = y(l, B) \end{cases}$

(1) 中央子午线投影后为直线；
(2) 中央子午线投影后长度不变；
(3) 正形投影条件。

$$\begin{cases} x = m_0 + m_2 l^2 + m_4 l^4 + \cdots \\ y = m_1 l + m_3 l^3 + m_5 l^5 + \cdots \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial q} = \dfrac{\partial y}{\partial l} \\ \dfrac{\partial x}{\partial l} = -\dfrac{\partial y}{\partial q} \end{cases}$$

椭球面→平面

柯西—黎曼条件

- 柯西-黎曼条件，椭球面到平面正形投影

$$\begin{cases} m_1 + 3m_3 l^2 + 5m_5 l^4 + \cdots = \dfrac{dm_0}{dq} + \dfrac{dm_2}{dq} l^2 + \dfrac{dm_4}{dq} l^4 + \cdots \\ 2m_2 l + 4m_4 l^3 + \cdots = -\dfrac{dm_1}{dq} l - \dfrac{dm_3}{dq} l^3 - \cdots \end{cases}$$

$m_1 = \dfrac{dm_0}{dq}$ ； $m_2 = -\dfrac{1}{2}\dfrac{dm_1}{dq}$ ； $m_3 = \dfrac{1}{3}\dfrac{dm_2}{dq}$ ……

如何求解$m_0 = ?$

高斯投影正算公式

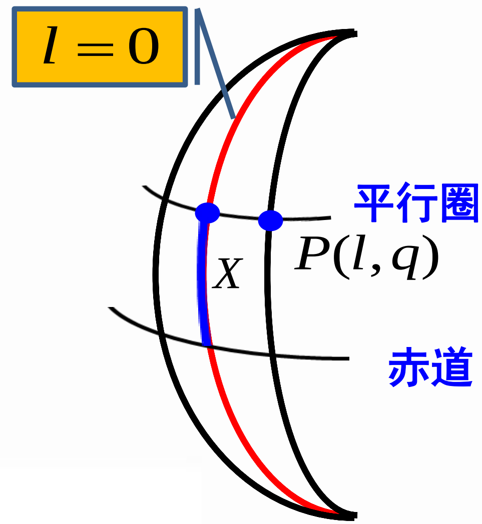
高斯投影坐标正算

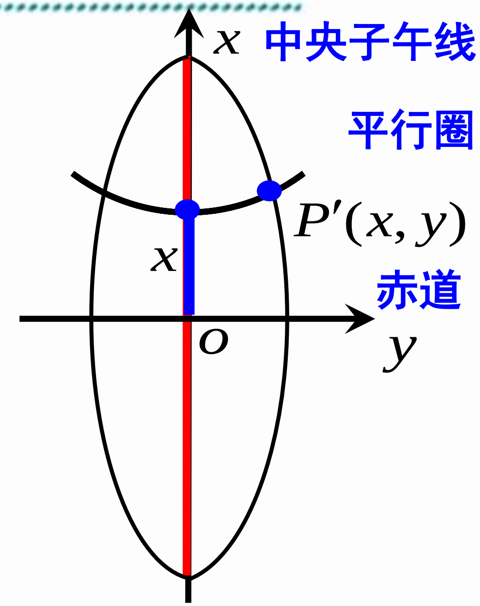
函数关系 $\begin{cases} x = x(l, B) \\ y = y(l, B) \end{cases}$

(1) 中央子午线投影后为直线；

(2) 中央子午线投影后长度不变；

(3) 正形投影条件。





1 位于中央子午线上的点，投影后的纵坐标 x 应该等于投影前从赤道量至该点的子午弧长X。

$$x = m_0 = X$$

$$\begin{cases} x = m_0 \cancel{+ m_2 l^2 + m_4 l^4 + } \\ y = m_1 l + m_3 l^3 + m_5 l^5 + \cdots \end{cases}$$

$$m_1 = \frac{dm_0}{dq} = \frac{dX}{dB} \cdot \frac{dB}{dq} =$$

$$m_1 = \frac{dm_0}{dq}; \quad m_2 = -\frac{1}{2}\frac{dm_1}{dq}; \quad m_3 = \frac{1}{3}\frac{dm_2}{dq} \quad \cdots\cdots$$

$$\frac{dX}{dB} = M$$

$$dq = \frac{MdB}{N\cos B}$$

$$N = \frac{c}{V}$$

高斯投影正算公式

高斯投影坐标正算

函数关系 $\begin{cases} x = x(l, B) \\ y = y(l, B) \end{cases}$

(1) 中央子午线投影后为直线；
(2) 中央子午线投影后长度不变；
(3) 正形投影条件。

$$\begin{cases} x = m_0 + m_2 l^2 + m_4 l^4 + \cdots \\ y = m_1 l + m_3 l^3 + m_5 l^5 + \cdots \end{cases}$$

当l<3.5°时，公式换算精度为0.001m;

欲精度只需达到0.1m，可略去 $\eta^2 l^5, l^6$项。

$$\begin{cases} m_1 = N\cos B = \dfrac{c}{V}\cos B \\ m_2 = \dfrac{N}{2}\sin B\cos B \\ m_3 = \dfrac{N}{6}\cos^3 B(1-t^2+\eta^2) \\ m_4 = \dfrac{N}{24}\sin B\cos^3 B(5-t^2+9\eta^2) \\ m_5 = \dfrac{N}{120}\cos^5 B(5-18t^2+t^2) \\ \ldots \end{cases}$$

$$x = X + \frac{N}{2\rho''^2}\sin B\cos B l''^2 + \frac{N}{24\rho''^4}\sin B\cos^3 B(5-t^2+9\eta^2)l''^4 + \frac{N}{720\rho''^6}\sin B\cos^5 B(61-58t^2+t^4)l''^6$$

$$y = \frac{N}{\rho''}\cos B l'' + \frac{N}{6\rho''^3}\cos^3 B(1-t^2+\eta^2)l''^3 + \frac{N}{120\rho''^5}\cos^5 B(5-18t^2+t^4+14\eta^2-58\eta^2 t^2)l''^5$$

高斯投影正算公式

自赤道量起的到所求点的子午线弧长

$$x = \boxed{X} + \frac{N}{2\rho^2}\sin B\cos B\cdot l^2 + \frac{N}{24\rho^4}\sin B\cos^3 B(5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4)l^4 + \cdots$$

$$y = \frac{N}{\rho}\cos B\cdot l + \frac{N}{6\cdot\rho^3}\cos^3 B(1 - t^2 + \eta^2)\boxed{l^3} + \cdots$$

所求点的大地经度与该点所在带的中央子午线的大地经度之差

式中：$t = \tan B$；$\eta = e'^2\cos^2 B$

高斯投影（归纳总结正算公式）

高斯投影正算中必须满足的三个投影条件

□中央子午线投影后为直线

□中央子午线投影后长度不变

□正形投影条件，投影后角度不变

1) 由第一个条件可知，中央子午线东西两侧的投影对称于中央子午线。 x为l的偶函数，而y则为l的奇函数。

展开成经差l的幂级数，其中m为待定系数，是纬度B的函数

$$\begin{cases} x = f_1(q,l) \\ y = f_2(q,l) \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x &= m_0 + m_2 l^2 + m_4 l^4 + \cdots \\ y &= m_1 l + m_3 l^3 + m_5 l^5 + \cdots \end{aligned} \quad (1)$$

高斯投影（归纳总结正算公式）

由第三个条件正形投影条件 $\frac{\partial y}{\partial l}=\frac{\partial x}{\partial q}$ 和 $\frac{\partial x}{\partial l}=-\frac{\partial y}{\partial q}$ 代入（1）式

$$\begin{cases} m_1+3m_3l^2+5m_5l^4+\cdots=\frac{dm_0}{dq}+\frac{dm_2}{dq}l^2+\frac{dm_4}{dq}l^4+\cdots \\ 2m_2l+4m_4l^3+\cdots=-\frac{dm_1}{dq}l-\frac{dm_3}{dq}l^3-\frac{dm_5}{dq}l^5-\cdots \end{cases} \quad (2)$$

由恒等式两边对应系数相等，建立求解待定系数的递推公式：

$$m_1=\frac{dm_0}{dq} \qquad m_2=-\frac{1}{2}\frac{dm_1}{dq} \qquad m_3=\frac{1}{3}\frac{dm_2}{dq} \qquad \cdots$$

m_0=?

由第二条件可知，位于中央子午线上的点，投影后的纵坐标 x 应该等于投影前从赤道量至该点的子午弧长X。

即当 l=0 时， $m_0=X$

高斯投影（归纳总结正算公式）

顾及前面讲到的子午线弧长微分公式：

$$dx = MdB$$

$$\frac{dm_0}{dq} = \frac{dX}{dB}\frac{dB}{dq} = M\frac{N\cos B}{M} = N\cos B \qquad m_1 = N\cos B = \frac{c}{V}\cos B$$

$$m_2 = \frac{N}{2}\sin B\cos B$$

$$\begin{cases} m_3 = \dfrac{N}{b}\cos^3 B(1 - t^2 + \eta^2) \\ m_4 = \dfrac{N}{24}\sin B\cos^3 B(5 - t^2 + 9\eta^2) \\ m_5 = \dfrac{N}{120}\cos^5 B(5 - 18t^2 + t^4) \end{cases}$$

式中：$t = \tan B$；$\eta = e'^2\cos^2 B$

高斯投影（归纳总结正算公式）

第一、三条件

$$\begin{cases} m_1 + 3m_3 l^2 + 5m_5 l^4 + \cdots = \dfrac{dm_0}{dq} + \dfrac{dm_2}{dq} l^2 + \dfrac{dm_4}{dq} l^4 + \cdots \\ 2m_2 l + 4m_4 l^3 + \cdots = -\dfrac{dm_1}{dq} l - \dfrac{dm_3}{dq} l^3 - \dfrac{dm_5}{dq} l^5 - \cdots \end{cases}$$

第二条件

$$m_0 = X$$

正算公式：

$$x = X + \frac{N}{2} \sin B \cos B l^2 + \frac{N}{24} \sin B \cos^3 B (5 - t + 9\eta^2 + 4\eta^4) l^4 + \frac{N}{720} \sin B \cos^5 B (61 - 58t^2 + t^4) l^6$$

$$y = N \cos B l + \frac{N}{6} \cos^3 B (1 - t^2 + \eta^2) l^3 + \frac{N}{120} \cos^5 B (5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58t^2\eta^2) l^5$$

高斯投影坐标正算公式的几何解释

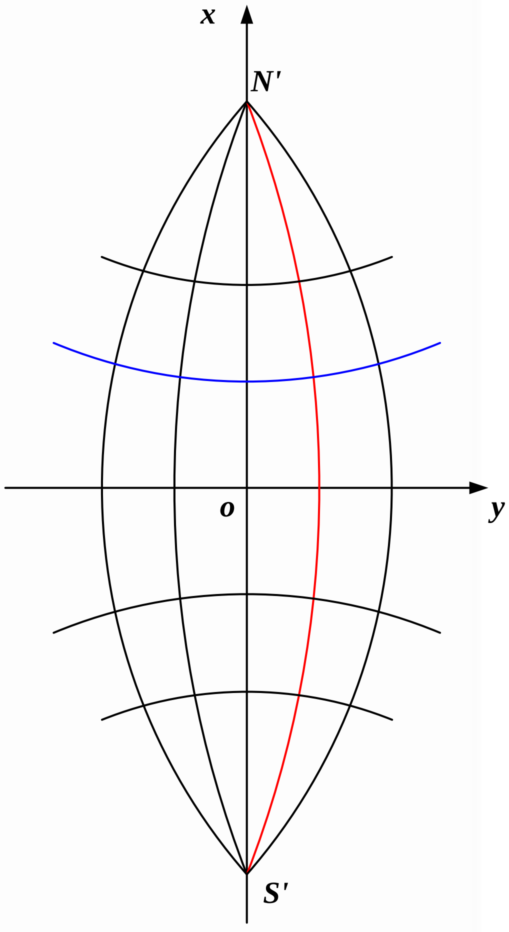
（1）当 l 等于常数时，随着 B 的增加 x 值增大，y 值减小；又因 $\cos(-B)=\cos B$，所以无论 B 值为正或负，y 值不变。

椭球面上除中央子午线外，其它子午线投影后，均向中央子午线弯曲，并向两极收敛，同时还对称于中央子午线和赤道。

（2）当 B 等于常数时，随着 l 的增加，x值和 y 值都增大。

在椭球面上对称于赤道的纬圈，投影后仍成为对称的曲线，同时与子午线的投影曲线互相垂直凹向两极。

（3）距中央子午线愈远的子午线，投影后弯曲愈厉害，长度变形也愈大。



高斯投影的反算公式

高斯投影反算公式

高斯投影坐标正算

函数关系
$$\begin{cases} x = x(l, B) \\ y = y(l, B) \end{cases}$$

(1) 中央子午线投影后为直线；

(2) 中央子午线投影后长度不变；

(3) 正形投影条件。

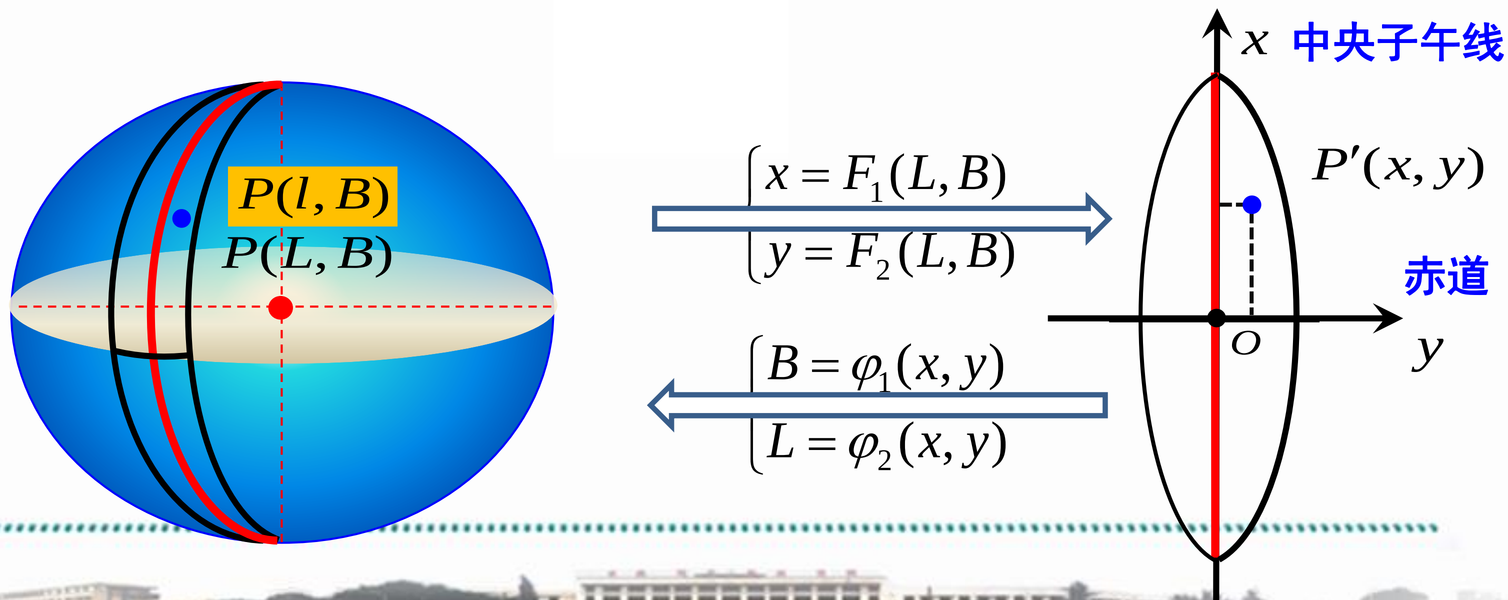
高斯投影坐标反算

函数关系
$$\left.\begin{aligned} B &= \varphi_1(x, y) \\ l &= \varphi_2(x, y) \end{aligned}\right\}$$

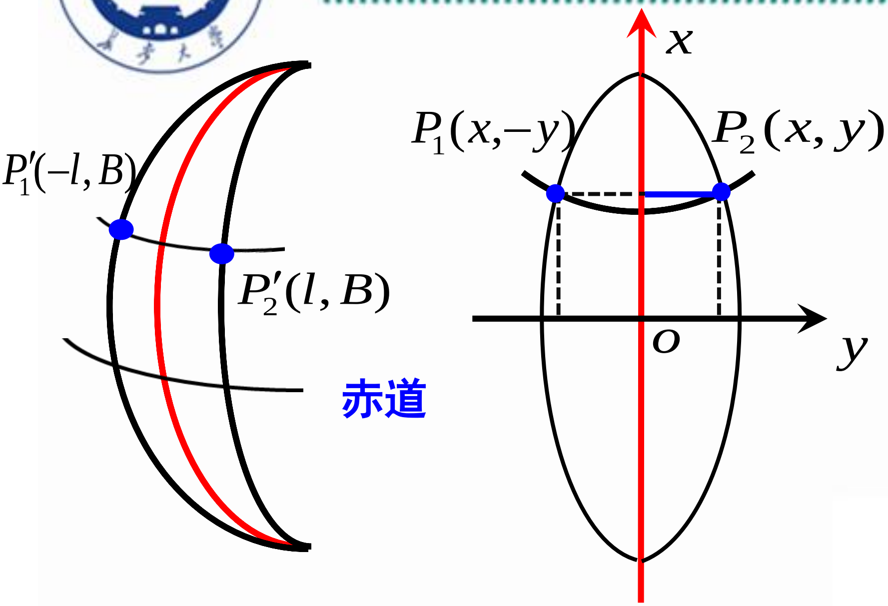
(1) x坐标轴投影成中央子午线,为对称轴；

(2) x轴上的长度投影保持不变；

(3) 正形投影条件。



高斯投影反算公式



高斯投影坐标反算

投影方程
$$\left.\begin{aligned} B &= \varphi_1(x,y) \\ l &= \varphi_2(x,y) \end{aligned}\right\}$$

(1) x坐标轴投影成中央子午线，且为对称轴；

(2) x轴上的长度投影保持不变；

(3) 正形投影条件。

- 由于对称投影，大地纬度 B 必是 y 的偶函数，大地经差 l 必是 y 的奇函数。
- y 值与椭球半径相比是一个相对较小的数值，故投影方程可展开成 y 的幂级数；

$$\begin{cases} B = n_0 + n_2 y^2 + n_4 y^4 + \cdots \\ l = n_1 y + n_3 y^3 + n_5 y^5 + \cdots \end{cases} \Leftarrow \left.\begin{aligned} B &= \varphi_1(x,y) \\ l &= \varphi_2(x,y) \end{aligned}\right\} \text{投影方程}$$

高斯投影反算公式

$$\begin{cases} B = n_0 + n_2 y^2 + n_4 y^4 + \cdots \\ l = n_1 y + n_3 y^3 + n_5 y^5 + \cdots \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial q}{\partial x} = \dfrac{\partial l}{\partial y} \\ \dfrac{\partial l}{\partial x} = -\dfrac{\partial q}{\partial y} \end{cases}$$

平面→椭球面

正形投影一般公式

高斯投影坐标反算

投影方程 $\left.\begin{array}{l} B = \varphi_1(x, y) \\ l = \varphi_2(x, y) \end{array}\right\}$

(1) x坐标轴投影成中央子午线,且为对称轴;

(2) x轴上的长度投影保持不变;

(3) 正形投影条件。

1　高斯反算，投影必须满足平面到椭球面的柯西-黎曼条件

$$\begin{cases} \dfrac{\partial B}{\partial x} = \dfrac{N\cos B}{M}\dfrac{\partial l}{\partial y} \\ \dfrac{\partial B}{\partial y} = -\dfrac{N\cos B}{M}\dfrac{\partial l}{\partial x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dn_0}{dx} + \dfrac{dn_2}{dx}y^2 + \dfrac{dn_4}{dx}y^4 + \cdots = \dfrac{N\cos B}{\ } \\ 2n_2 y + 4n_4 y^3 + \cdots = -\dfrac{N\cos B}{M} \end{cases}$$

如何求解$n_0 = ?$

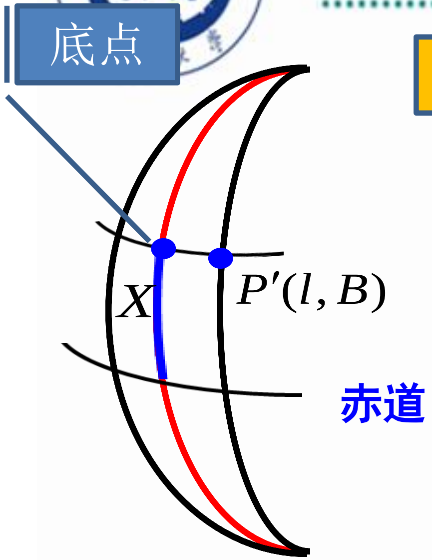
等量纬度

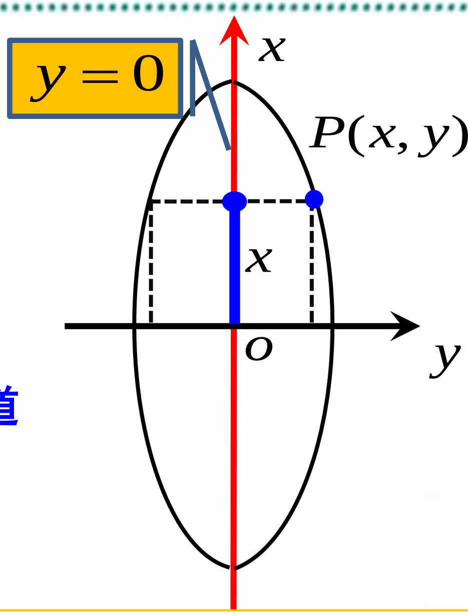
$$dq = \frac{MdB}{N\cos B}$$

$$q = \int_0^B \frac{MdB}{N\cos B}$$

$$n_1 = \frac{M}{N\cos B}\frac{dn_0}{dx} \qquad n_2 = -\frac{1}{2}\frac{N\cos B}{M}\frac{dn_1}{dx} \qquad n_3 = \frac{M}{3N\cos B}$$

高斯投影反算公式





高斯投影坐标反算

投影方程 $$\left.\begin{aligned} B &= \varphi_1(x,y) \\ l &= \varphi_2(x,y) \end{aligned}\right\}$$

(1) x坐标轴投影成中央子午线,且为对称轴;

(2) x轴上的长度投影保持不变;

(3) 正形投影条件。

◆ 当 y=0 时，$x=X$, 此时的点称为底点，其纬度称为底点纬度（B_f）。

$$\begin{cases} B = n_0 \cancel{+ n_2 y^2 + n_4 y^4 +} \\ l = n_1 y + n_3 y^3 + n_5 y^5 + \cdots \end{cases}$$

$$\boxed{B = n_0 = B_f}$$

$$\frac{dn_0}{dx} = -$$

$$n_1 = \frac{M}{N\cos B}\frac{dn_0}{dx} \quad n_2 = -\frac{1}{2}\frac{N\cos B}{M}\frac{dn_1}{dx} \quad n_3 = \frac{M}{3N\cos B}\frac{dn_2}{dx} \quad n_4 = -\frac{N\cos B}{4M}\frac{dn_3}{dx} \quad \cdots\cdots$$

$$\frac{dX}{dB_f} = M_f$$

高斯投影反算公式

$$\begin{cases} B = n_0 + n_2 y^2 + n_4 y^4 + \cdots \\ l = n_1 y + n_3 y^3 + n_5 y^5 + \cdots \end{cases}$$

高斯投影坐标反算

投影方程

$$\left.\begin{aligned} B &= \varphi_1(x, y) \\ l &= \varphi_2(x, y) \end{aligned}\right\}$$

(1) x坐标轴投影成中央子午线,且为对称轴;

(2) x轴上的长度投影保持不变;

(3) 正形投影条件。

$$\begin{cases} n_0 = B_f \\ n_2 = -\dfrac{t_f}{2M_f N_f} \\ n_4 = \dfrac{t_f}{24M_f N_f^3}(5+3t_f^2+\eta_f^2-9\eta_f^2 t_f^2) \\ n_6 = -\dfrac{t_f}{720M_f N_f^5}(61+90t_f^2+45t_f^4) \\ n_1 = \dfrac{1}{N_f \cos B_f} \\ n_3 = -\dfrac{1}{6N_f^3 \cos B_f}(1+2t_f^2+\eta_f^2) \\ n_5 = \dfrac{1}{120N_f^5 \cos B_f}(5+28t_f^2+24t_f^4+6\eta_f^2+8\eta_f^2 t_f^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = B_f - \dfrac{t_f}{2M_f N_f} y^2 + \dfrac{t_f}{24M_f N_f^3}(5+3t_f^2+\eta_f^2-9\eta_f^2 t_f^2) y^4 - \\ \quad \dfrac{t_f}{720M_f N_f^5}(61+90t_f^2+45t_f^4) y^6 \\ l = \dfrac{1}{N_f \cos B_f} y - \dfrac{1}{6N_f^3 \cos B_f}(1+2t_f^2+\eta_f^2) y^3 + \\ \quad \dfrac{1}{120N_f^5 \cos B_f}(5+28t_f^2+24t_f^4+6\eta_f^2+8\eta_f^2 t_f^2) y^5 \end{cases}$$

当l<3.5°时，公式换算精度为0.0001″;
欲使精度只需达到0.01″，对上式简化。

高斯投影正反算公式

高斯投影坐标正算

函数关系 $\begin{cases} x = x(l, B) \\ y = y(l, B) \end{cases}$

(1) 中央子午线投影后为直线；

(2) 中央子午线投影后长度不变；

(3) 正形投影条件。

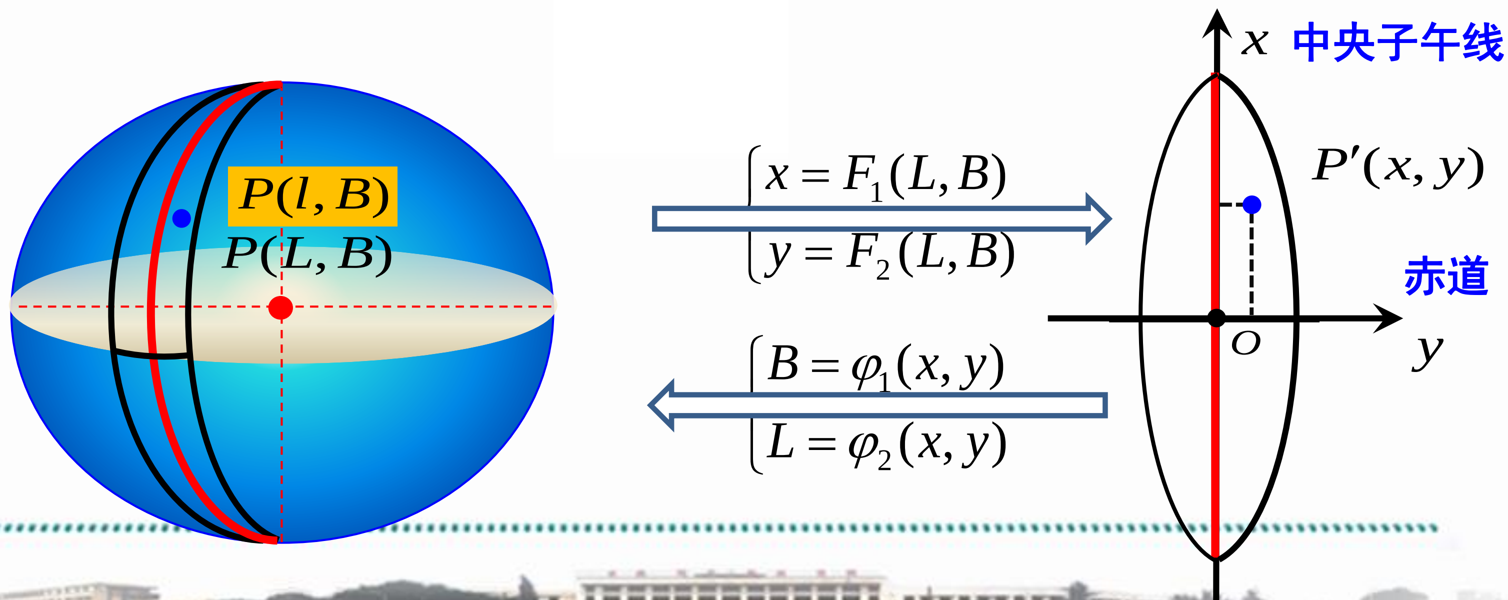
高斯投影坐标反算

函数关系 $\left.\begin{aligned} B &= \varphi_1(x, y) \\ l &= \varphi_2(x, y) \end{aligned}\right\}$

(1) x坐标轴投影成中央子午线,为对称轴；

(2) x轴上的长度投影保持不变；

(3) 正形投影条件。



高斯投影（归纳总结反算公式）

在高斯投影坐标反算时，原面是高斯平面，投影面是椭球面，已知的是平面坐标（x，y），要求的是大地坐标（B，L），相应地有如下投影方程：

$$\left.\begin{aligned} B &= \varphi_1(x,y) \\ l &= \varphi_2(x,y) \end{aligned}\right\}$$

同正算一样，对投影函数提出三个条件：

（1）x轴投影后为中央子午线，是投影的对称轴

（2）x轴长度投影后不变

（3）正形投影

高斯投影（归纳总结反算公式）

第一、三条件

$$\begin{cases} \dfrac{dn_0}{dx}+\dfrac{dn_2}{dx}y^2+\dfrac{dn_4}{dx}y^4+\cdots=\dfrac{N\cos B}{M}(n_1+3n_3y^2+5n_3y^4+\cdots) \\ 2n_2y+4n_4y^3+\cdots=-\dfrac{N\cos B}{M}(\dfrac{dn_1}{dx}y+\dfrac{dn_3}{dx}y^3+\dfrac{dn_5}{dx}y^5+\cdots) \end{cases}$$

第二条件

$$n_0=B_f$$

$$B=B_f-\frac{t_f}{2M_fN_f}y^2+\frac{t_f}{24M_fN_f^3}(5+3t_f^2+\eta_f^2-9\eta_f^2t_f^2)-\frac{t_f}{720M_fN_f^5}(61+90t_f^2+45t_f^4)y^6$$

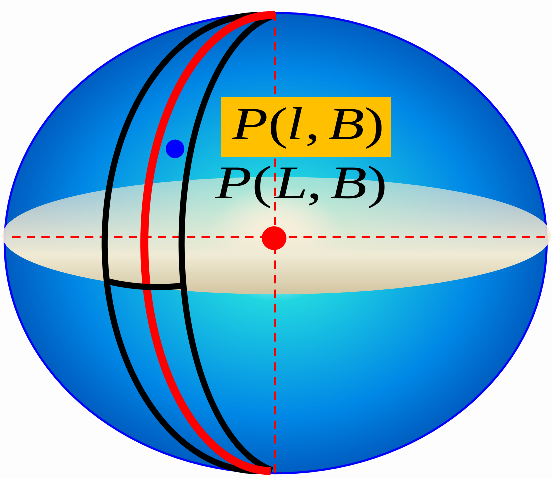
$$l=\frac{1}{N_f\cos B_f}y-\frac{1}{6N_f^3\cos B_f}(1+2t_f^2+\eta_f^2)y^3+\frac{1}{120N_f^5\cos B_f}(5+28t_f^2+6\eta_f^2+24t_f^4+8t_f^2\eta_f^2)y^5$$

在满足正形投影的一般条件公式的前提下，再加入高斯投影本身的特殊条件，才能导出高斯投影正反算公式。

高斯投影正反算公式

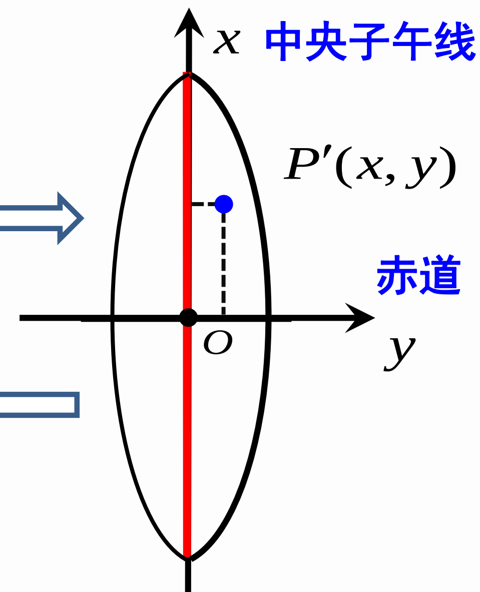
· 高斯投影应具备的条件

- 正形投影条件 柯西–黎曼方程
- 中央子午线投影后为一直线
- 中央子午线投影后长度不变



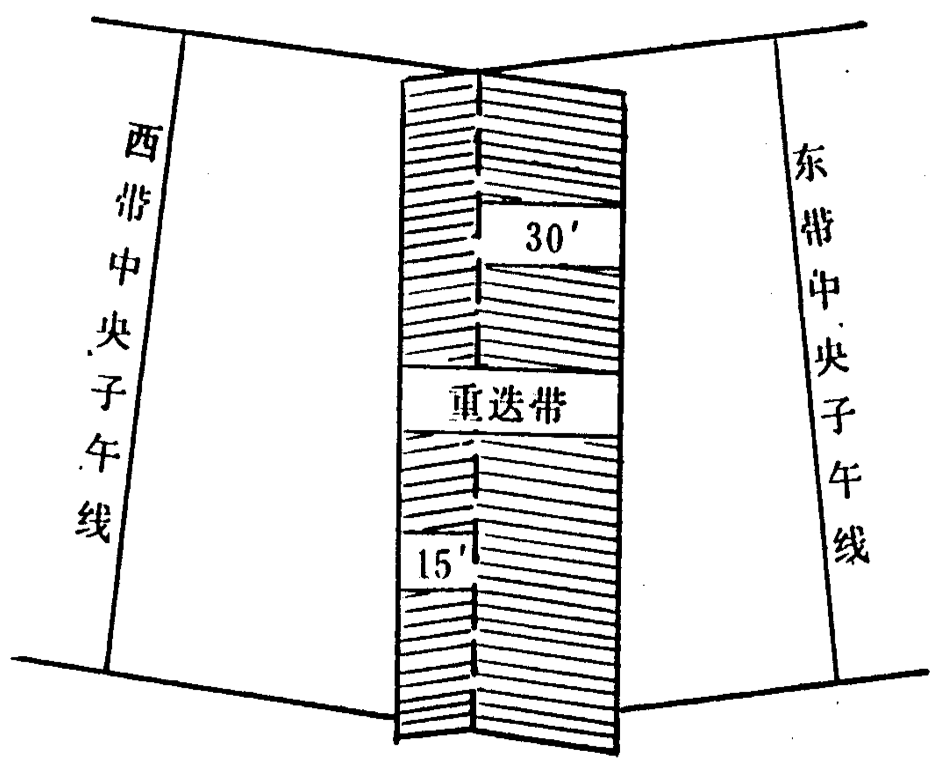
$$\begin{cases} x = F_1(L,B) \\ y = F_2(L,B) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Leftarrow \begin{cases} B = \varphi_1(x,y) \\ L = \varphi_2(x,y) \end{cases}$$



高斯投影的邻带换算

邻带换算的提出



邻带换算的提出

- 三角锁网分跨于不同的投影带，平差计算时，要将邻带的部分或全部坐标换算到同一带中；
- 在投影带边缘地区测图时，往往需要用到另一带的三角点作为控制，因此必须将这些点换算到同一带中；

邻带换算的提出

- 大比例尺测图（1：1万及更大比例尺）要求采用三度带，而国家控制点通常只有六度带的坐标，因此还产生三度带和六度带相互之间的换算。

高斯投影的邻带坐标换算

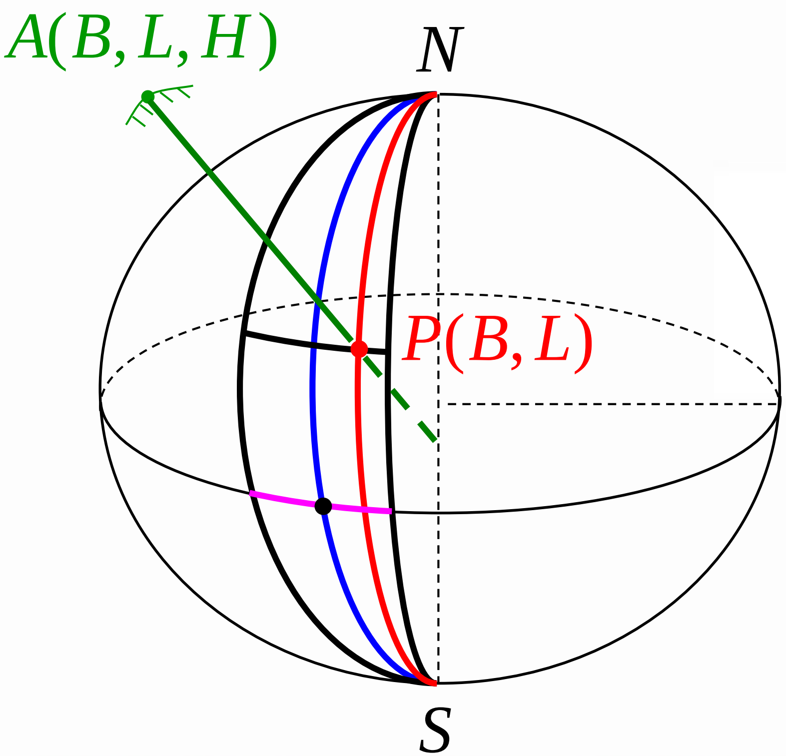
高斯投影虽然保证了角度没有变形这一特点，但其长度变形比较严重。为了限制高斯投影的长度变形，必须依中央子午线进行分带，把投影范围限制在中央子午线东、西两侧一定的狭长带内分别进行。但这又使得统一的坐标系分割成各带的独立坐标系。于是，因分带的结果产生了新的矛盾，即在生产建设中提出了各相邻带的互相联系问题。这个问题是通过由一个带的平面坐标换算到相邻带的平面坐标，简称为“邻带换算”的方法来解决的。

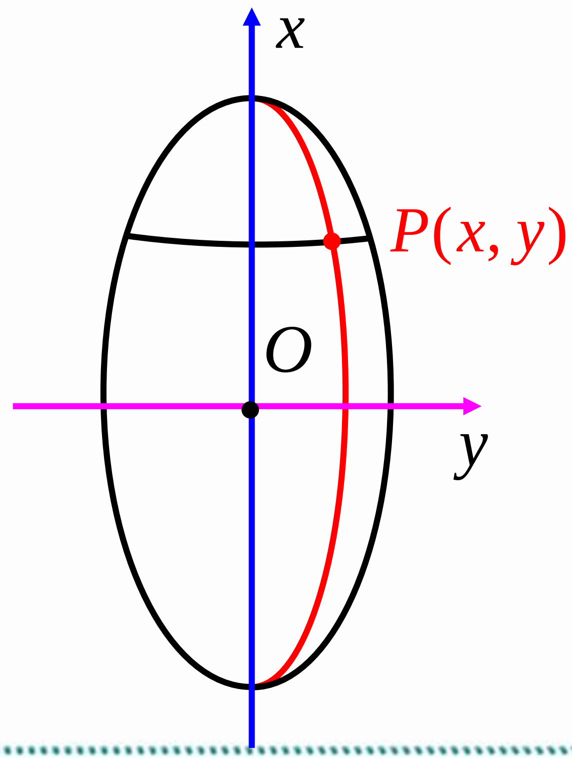
利用高斯投影正反算公式进行邻带坐标换算的实质是把椭球面上的大地坐标作为过渡坐标。

高斯投影正、反算

高斯正算： （B，L）→（x, y）

高斯反算： （x, y）→（B，L）





参考椭球　　　　高斯平面

邻带换算的间接法

$(x, y)_{\mathrm{I}}$

$\downarrow$ 高斯投影反算 $(L_0)_{\mathrm{I}}$

(L, B)

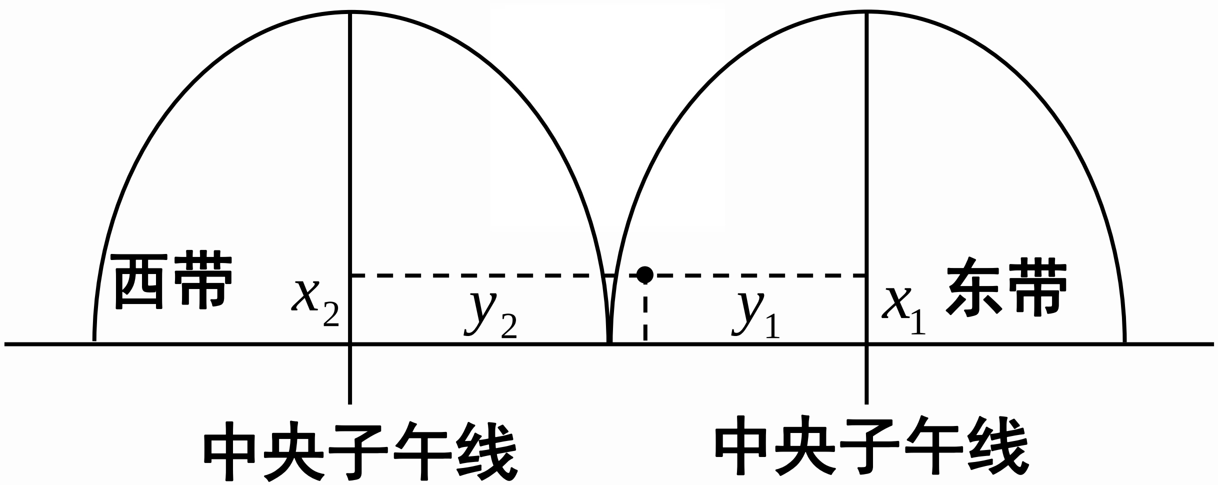
$\downarrow$ 高斯投影正算 $(L_0)_{\mathrm{II}}$

$(x, y)_{\mathrm{II}}$

高斯投影的邻带坐标换算

1、三度带和六度带的邻带换算

$$东带:(x_1,y_1) \xleftrightarrow{\text{高斯投影正反算}} (B,L) \xleftrightarrow{\text{高斯投影正反算}} 西带:(x_2,y_2)$$



高斯投影的邻带坐标换算

1、 邻带换算（x，y）$_1$ → （x，y）$_2$

■ **算例**

已知某点54坐标系下的六度带平面坐标为

$$\begin{cases} x_1 = 5\ 590\ 641.589m \\ y_1 = 20\ 291\ 134.210m \end{cases}$$

试编程求该点的邻带坐标。（结果以米为单位，保留小数点后3位）

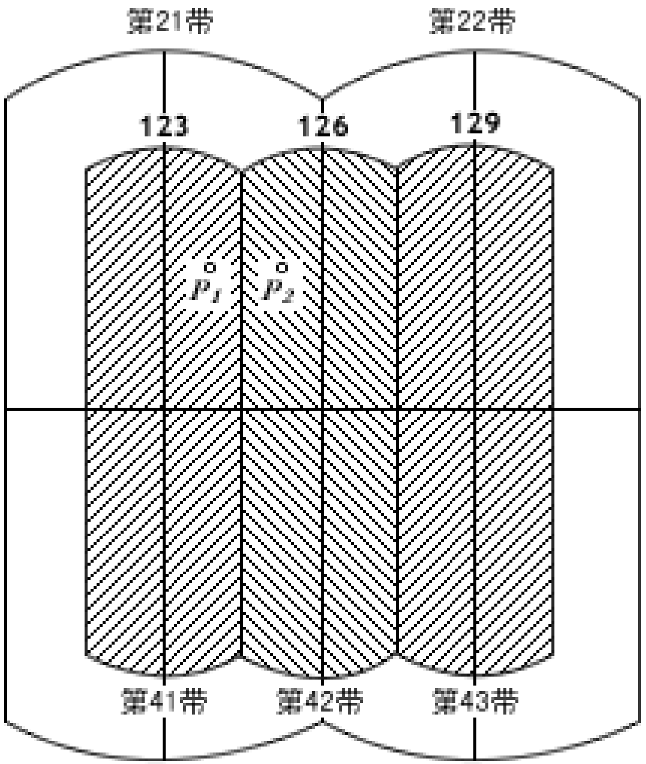
注：1954年北京坐标系使用的是克拉索夫斯基椭球。

高斯投影的邻带坐标换算

2、三度带通用坐标换算至六度带

- **三度带的中央子午线（三度带的奇数带）与六度带中央子午线重合**

例：P_1点的三度带自然坐标与六度带自然坐标完全相同，通用坐标只需要改变带号。

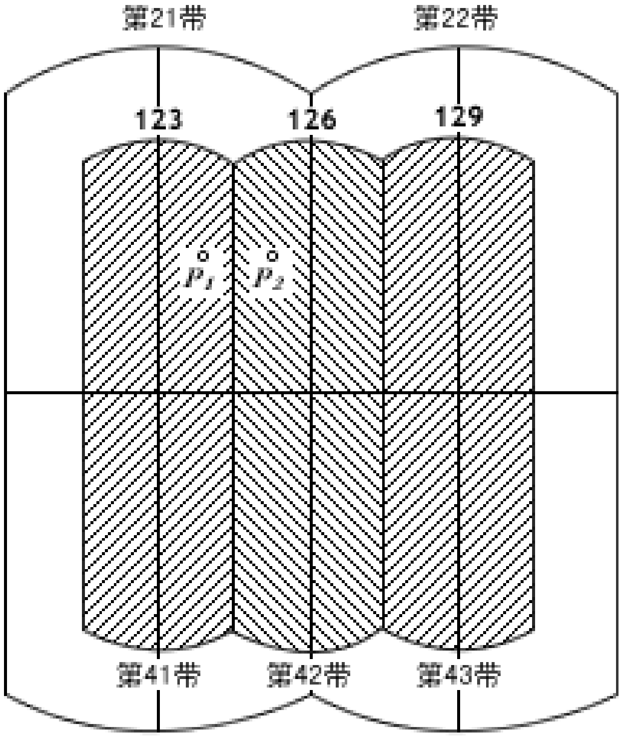


高斯投影的邻带坐标换算

3、六度带通用坐标换算至三度带

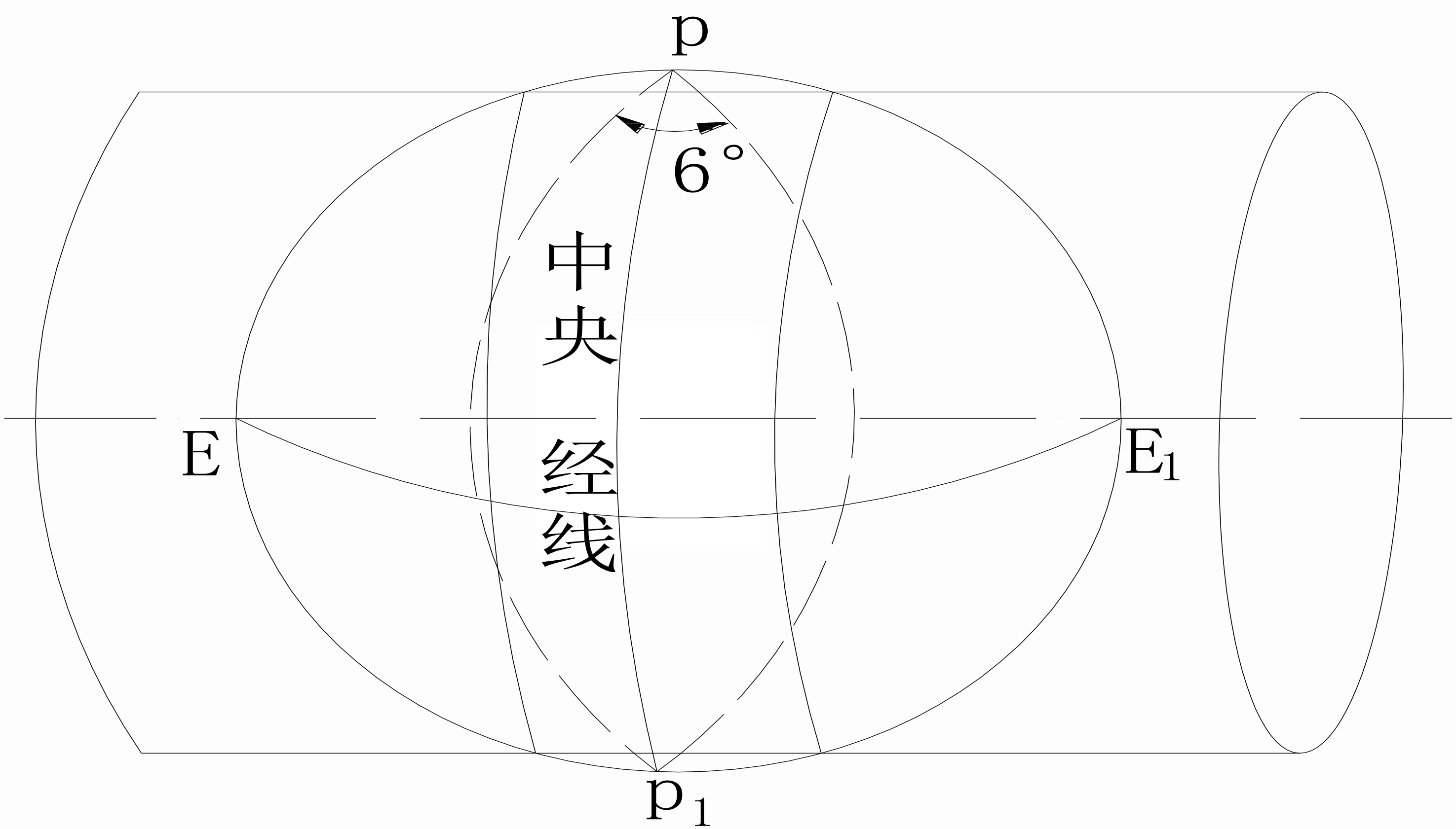
- 三度带的中央子午线（三度带的奇数带）与六度带中央子午线重合

例：P_1点的六度带自然坐标与三度带自然坐标完全相同，通用坐标只需要改变带号。



通用横轴墨卡托投影

通用横轴墨卡托投影UTM



通用横轴墨卡托投影UTM

通用横轴墨卡托投影(Universal Transverse Mercator Projection)取其前面三个英文单词的大写字母而称UTM投影。从几何意义上讲，UTM投影属于横轴等角割椭圆柱投影，高斯克吕格投影为横轴等角切椭圆柱投影，两者非常相似。满足等角条件和中央子午线投影后成为直线，并为纵坐标轴，只是在通用横轴墨卡托投影中，中央子午线投影长度比不再等于1，而是等于0.9996，投影后两条割线上没有变形，它的平面直角系与高斯投影相同，且和高斯投影坐标有一个简单的比例关系，因而有的文献上也称它为＝0.9996的高斯投影。该投影由美国军事测绘局1938年提出，1945年开始采用。已被许多国家、地区采用作为大地测量和地形图的投影基础。

通用横轴墨卡托投影UTM

墨卡托投影——等角正圆柱投影

通用UTM投影——横轴等角正割圆柱投影：

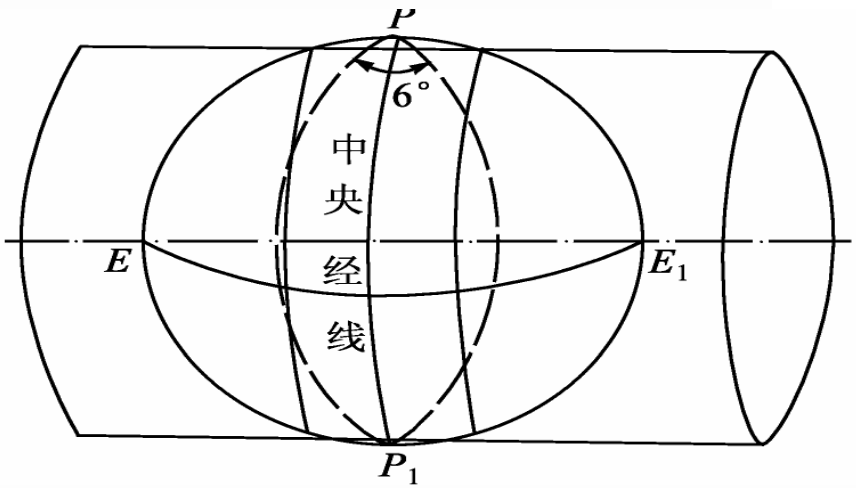
（1）标准线投影后不变形；

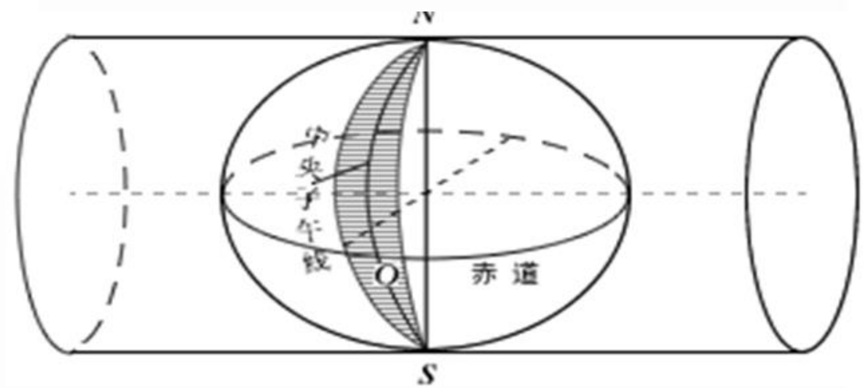
（2）两条标准纬线间的区域，投影后产生负变形，两条标准纬线以外的区域投影后产生正变形；

（3）距离标准纬线越远，投影变形越大。

通用横轴墨卡托投影UTM

通用横轴墨卡托投影UTM（Universal Transverse Mercator Projection）属于横轴等角割椭圆柱投影。高斯投影为等角横切椭圆柱投影。





通用横轴墨卡托投影UTM

通用横轴墨卡托投影UTM为等角割圆柱投影，圆柱与椭球面相割于$\pm B_0$的两条纬线，投影后不变形。

UTM的投影条件是取高斯投影中第3个条件“中央经线投影长度比不等于1，而是等于0.9996”，投影后两条割线上没有变形，它的平面直角系与高斯投影相同，且和高斯投影坐标有一个简单的比例关系，因而有的文献上也称它为$m_0 = 0.9996$的高斯投影。

通用横轴墨卡托投影UTM

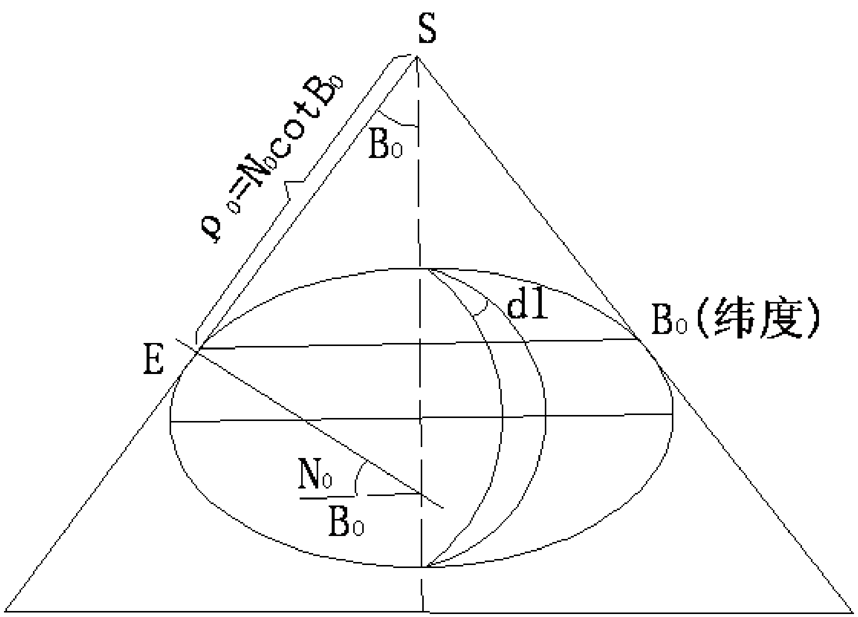
UTM与高斯投影相比，仅仅是中央子午线的尺度比为0.9996，其投影公式如下：

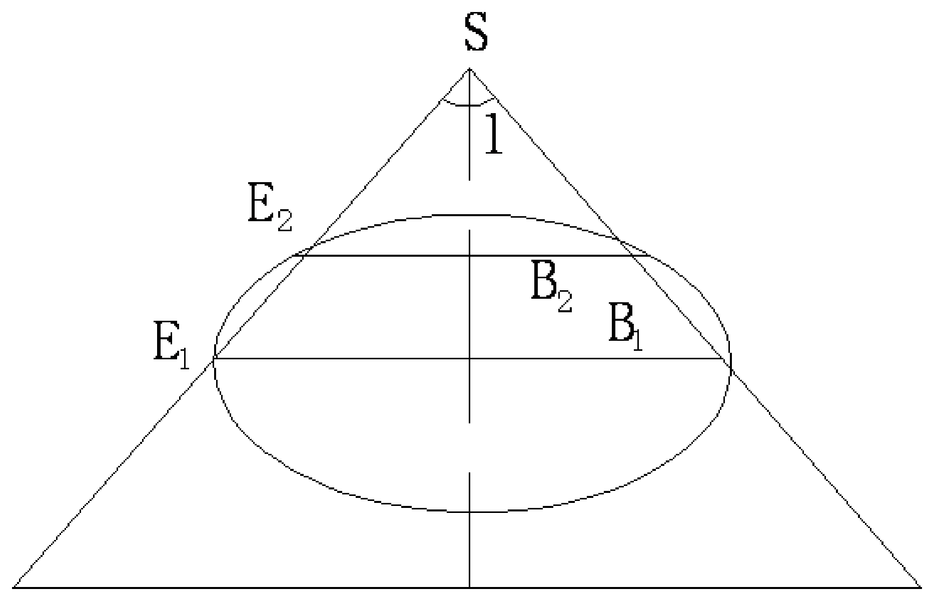
$$x = 0.9996\left[X + \frac{1}{2}Nt\cdot\cos^2 B\cdot l^2 + \frac{1}{24}Nt\cdot\left(5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4\right)\cos^4 B\cdot l^4 + \frac{1}{720}Nt\left(61 - 58t^2 + t^4 + 270\eta^2 - 330\eta^2 t^2\right)\cdot\cos^6 B l^6\right]$$

$$y = 0.9996\left[N\cos B\cdot l + \frac{1}{6}N\left(1 - t^2 + \eta^2\right)\cos^3 B\cdot l^3 + \frac{1}{120}N\left(5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58\eta^2 t^2\right)\cdot\cos^5 B l^5\right]$$

兰勃脱（Lambert）投影

兰勃脱投影





兰勃脱投影

兰勃脱投影是正形正轴圆锥投影。设想用一个圆锥套在地球椭球面上，使圆锥轴与椭球自转轴相一致，使圆锥面与椭球面的一条纬线(纬度)相切，按照正形投影的一般条件和兰勃脱投影的特殊条件，将椭球面上的纬线投影到圆锥面上成为同心圆，子午线投影到圆锥面上成为从圆心发出的辐射直线，然后沿圆锥面某条母线(一般为中央子午线)，将圆锥面切开而展成平面，从而实现了兰勃脱切圆锥投影。如果圆锥面与椭球面上二条纬线(纬度分别为及)相割，则称之为兰勃脱割圆锥投影。

兰勃脱投影

我国新编百万分之一地图采用兰勃脱割圆锥投影，按纬差4°进行分带，自赤道由南向北将我国分成14个投影带，采取每带的中纬和边纬的长度变形绝对值相等的条件确定投影常数。

兰勃脱投影是正形正轴圆锥投影，它的长度变形与经度无关，但随着纬差即纵坐标x的增大而迅速增大，为限制长度变形，采用按纬度的分带投影，因此，这种投影适宜南北狭窄，东西延伸的国家和地区。但与高斯投影相比较，兰勃脱投影子午线收敛角有时过大，精密的方向改化和距离改化公式也较高斯投影要复杂，故目前国际上还是建议采用高斯投影。

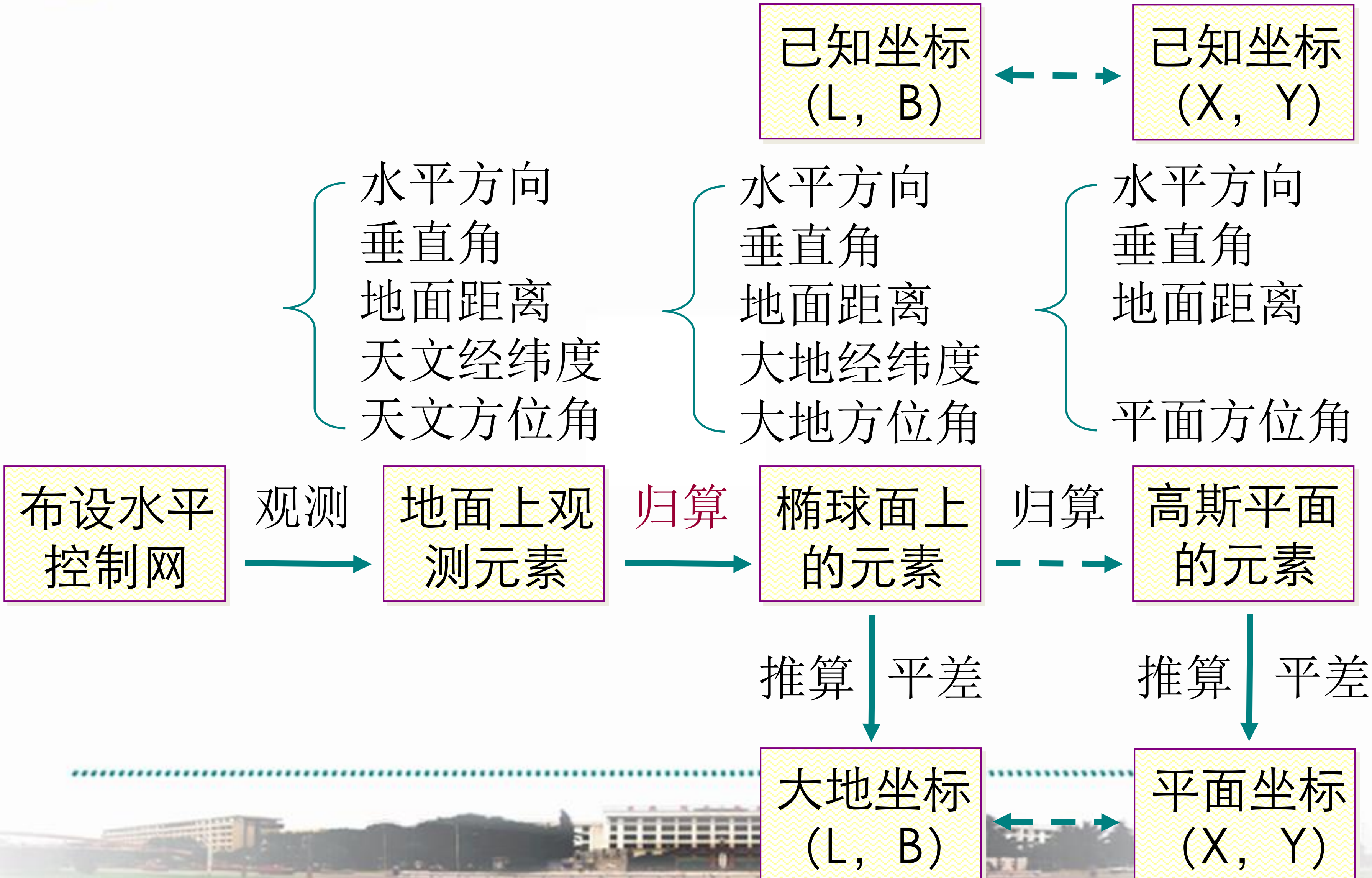
习题与思考题

- 为什么要选择某一参考椭球面作为测量的基准面？
- 法截面、法截线、相对法截线、大地线的定义。
- 产生相对法截线的原因是什么？
- 掌握空间直角坐标与大地坐标的转换公式。
- 地面方向观测值与距离观测值如何归算到椭球面上？
- 概述将椭球面上一个三角网投影到高斯平面上的计算过程。
- 何谓大地主题解算？什么是大地主题正算与反算？大地主题解算有何用途？

习题与思考题

- 高斯投影应满足的三个条件是什么？
- 什么是高斯投影的正反算？高斯投影的三个基本条件在正反公式推导中起什么作用？
- 高斯正、反算公式的推导思路？
- 什么情况下会遇到邻带换算的问题？其基本思路是什么？
- 作图表示从椭球面投影到高斯平面所需要 进行的计算内容。
- 什么叫子午线收敛角？作图表示出大地方位角和坐标方位角的关系。

传统大地测量水平坐标的获取



大地测量学课程要解决的核心问题

1. 大地测量学的目的与任务是什么?
2. 空间大地测量未来的发展趋势?
3. 大地测量的时空基准是什么（参心、地心坐标、ITRF）？
4. 参考椭球、总地球椭球、正常椭球的目的是什么?
5. 为什么要进行大地坐标系的转换？转换方法有哪些?
6. 地球重力场在大地测量中发挥什么作用？水准原点?
7. 为什么要选择正常高作为我国的高程系统?
8. 为什么要选择大地水准面？大地水准面精化的目的是什么?
9. 正常高与GPS高如何转换?
10. 为什么要进行大地测量观测值的归算?
11. 为什么要进行高斯投影？如何进行高斯坐标正反算?

投影变形作业1

用测距仪测得地面上A,B两点间的斜距（仪器设于A点）为4869.593m,A点的高程为1065.747m,B点的高程为1088.000m，A、B两点的y坐标的平均值为y_m=34521.796m（此处为y值的自然值），沿AB方向A点的参考椭球面的曲率半径为R_A=6368000m，其平均曲率半径R=6367900m。在不考虑其它误差影响的情况下试求：

1、A、B两点在椭球面上的距离；

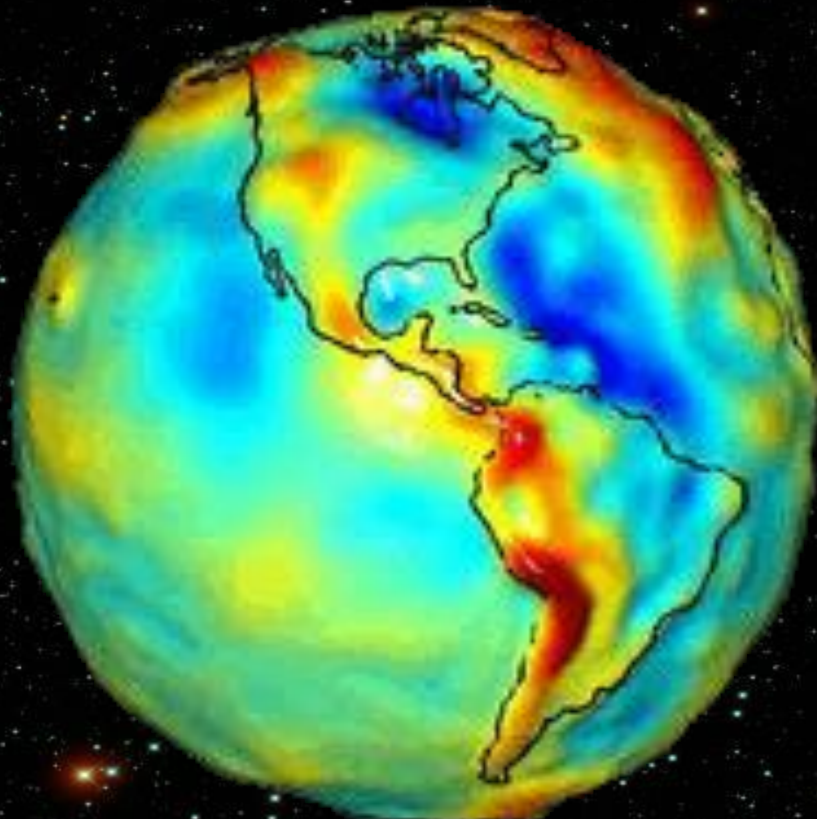
2、A、B两点投影到高斯面上的距离；

3、其长度综合变形及相对变形是多少。

投影变形作业2

某测区中心在高斯投影3°带的坐标y=100km，其测区内平均高程为H0=600m，要使测区内抵偿投影面上（即图纸上）的长度与实地长度只差最小，试问抵偿高程面应怎样选定？

第六章讲解结束，谢谢！



感谢大家对本课程的支持！